УДК 378.147:372.851
DOI 10.17513/snt.40947

CC BY 4.0

КОМПЬЮТЕРНАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА КАК ИНСТРУМЕНТ ФОРМИРОВАНИЯ МЕТАПРЕДМЕТНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКОГО ВУЗА

Пронина Е. В. ORCID ID 0000-0002-2447-7175,
Муханов С. А. ORCID ID 0000-0001-6959-5047,
Пихтилькова О. А. ORCID ID 0009-0004-4632-5158

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет», Москва, Российская Федерация, e-mail: s_a_mukhanov@mail.ru

Статья посвящена решению методической проблемы преодоления разрыва между алгебраическим описанием кривых и поверхностей второго порядка и их геометрическим образом при изучении линейной алгебры на первом курсе технического вуза. Цель исследования – теоретическое обоснование и разработка модели использования средств компьютерной визуализации (GeoGebra и авторских HTML/JavaScript-страниц) как инструмента формирования метапредметных компетенций студентов. Для достижения цели проведен сравнительный анализ требований Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования и метапредметных компетенций международной модели Европейского общества инженерного образования (European Society for Engineering Education); выявлен набор компетенций, связанных с визуализацией (пространственное мышление, математическое моделирование, оперирование символами, использование цифровых инструментов, коммуникация); разработана структурно-функциональная модель и дидактические кейсы для занятий. Практическая значимость работы состоит в предложении готовых сценариев применения визуализации – динамическое варьирование параметров, построение сечений, демонстрация поворота осей при приведении к каноническому виду, интерактивные тренажеры самопроверки. Сценарии апробированы на лекциях и практических занятиях в РТУ МИРЭА в курсе «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». Разработанные материалы не требуют установки дополнительного программного обеспечения и работают в любом браузере, что обеспечивает доступность в аудитории и при дистанционном обучении, а также воспроизводимость и методическую гибкость модели. Результаты могут быть использованы при проектировании курсов по аналитической геометрии, создании электронных пособий и дальнейшей экспериментальной апробации подхода.

Ключевые слова: визуализация, GeoGebra, кривые и поверхности второго порядка, аналитическая геометрия, линейная алгебра, метапредметные компетенции, цифровая дидактика, пространственное мышление, техническое образование, HTML-ресурсы

COMPUTER VISUALIZATION OF SECOND-ORDER CURVES AND SURFACES AS A TOOL FOR DEVELOPING META-SUBJECT COMPETENCIES IN TECHNICAL UNIVERSITY STUDENTS

Pronina E. V. ORCID ID 0000-0002-2447-7175,
Mukhanov S. A. ORCID ID 0000-0001-6959-5047,
Pikhtilkova O. A. ORCID ID 0009-0004-4632-5158

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "MIREA – Russian Technological University", Moscow, Russian Federation, e-mail: s_a_mukhanov@mail.ru

The article addresses the methodological problem of bridging the gap between the algebraic description of second-order curves and surfaces and their geometric (spatial) representation in the study of linear algebra and analytic geometry by first-year engineering students. The aim of the study is to provide a theoretical justification for and to develop a model for the use of computer visualization tools – GeoGebra and custom HTML/JavaScript pages–as a means of fostering students' meta-subject competencies. To achieve this aim, a comparative analysis was conducted between the requirements of the Russian Federal State Educational Standards and the meta-subject competencies of the international European Society for Engineering Education framework; a set of visualization-related competencies was identified (spatial thinking, mathematical modelling, symbolic manipulation, use of digital tools, and communication); and a structural–functional model with specific didactic cases for classroom use was developed. The practical significance of the work lies in offering ready-made visualization scenarios, including dynamic parameter variation, cross-section construction, demonstration of axis rotation when reducing equations to canonical form, and interactive self-assessment exercises. These scenarios were piloted in lectures and practical sessions at RTU MIREA as part of the course «Linear Algebra and Analytic Geometry.» The developed materials require no software installation and run in any modern browser, ensuring accessibility both in the classroom and in distance learning settings, as well as reproducibility and methodological flexibility of the model. The results can be used in designing analytic geometry courses, creating electronic teaching aids, and further experimental validation of the proposed approach.

Keywords: visualization, GeoGebra, second-order curves and surfaces, analytic geometry, linear algebra, meta-subject competencies, digital didactics, spatial thinking, technical education, HTML resources

Введение

Преподавание аналитической геометрии в технических вузах представляет собой фундаментальную основу инженерного образования, закладывающую математический аппарат, необходимый для изучения физики, теоретической механики, сопротивления материалов и других общеинженерных дисциплин. Однако раздел, посвященный кривым и поверхностям второго порядка, традиционно воспринимается студентами как один из наиболее сложных для освоения. Переход от двумерных конических сечений (эллипс, гипербола, парабола) к трехмерным поверхностям (эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды) требует качественно иного уровня пространственного воображения, способности к мысленному вращению объектов и умения реконструировать трехмерную форму по ее аналитическому заданию – уравнению второго порядка общего вида. Традиционный методический подход – метод сечений (анализ пересечений поверхности координатными плоскостями) – является логически строгим, но накладывает значительную когнитивную нагрузку на студентов с недостаточно развитым пространственным мышлением, что приводит к формальному, алгоритмическому усвоению материала без подлинного понимания геометрической природы изучаемых объектов.

Параллельно с предметными трудностями преподавания аналитической геометрии в российской системе высшего образования происходят институциональные изменения, связанные с переходом на компетентностную парадигму. Федеральные государственные образовательные стандарты высшего образования поколения 3++ (ФГОС ВО 3++) [1] вводят категорию универсальных компетенций (УК), в составе которых выделяются системное и критическое мышление (УК-1), разработка и реализация проектов (УК-2), командная работа и лидерство (УК-3), коммуникация (УК4), межкультурное взаимодействие (УК-5), самоорганизация и саморазвитие (УК-6, УК-7), безопасность жизнедеятельности (УК-8). Эти компетенции, концептуально восходящие к понятию метапредметных образовательных результатов, сформулированному в работах Ю. В. Громыко [2], А. В. Хуторского [3], И. А. Зимней [4] и других исследователей, требуют от преподавателей поиска новых методических подходов, интегрирующих предметное содержание с универсальными учебными действиями.

Цель исследования – теоретическое обоснование и разработка дидактической модели интеграции средств компьютерной визуализации (интерактивной геометрической системы GeoGebra и авторских HTML/JavaScript-страниц) в процесс изучения кривых и поверхностей второго порядка, ориентированной на формирование метапредметных компетенций студентов первого курса технического вуза.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

1. Провести сравнительный анализ требований федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО 3++) и компетентностной модели Европейского общества инженерного образования (SEFI) с целью выявления интегрального набора метапредметных компетенций, актуализируемых при изучении аналитической геометрии.

2. Разработать структурно-функциональную модель применения средств компьютерной визуализации в лекционных и практических занятиях по теме «Кривые и поверхности второго порядка», включающую конкретные дидактические сценарии (кейсы).

3. Апробировать разработанную модель в реальном учебном процессе на базе РТУ МИРЭА в курсе «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» и оценить ее влияние на качество усвоения материала и уровень сформированности пространственного мышления студентов.

4. Выявить методические условия и ограничения эффективного использования GeoGebra и авторских HTML-страниц как инструментов цифровой дидактики, а также определить направления дальнейшего совершенствования предложенного подхода.

Материалы и методы исследования

Исследование, проведенное авторами, построено на основе методологии аналитического обзора и педагогического проектирования и включает аналитический и проектный этапы.

1. На аналитическом этапе проведен сравнительный анализ требований к универсальным компетенциям ФГОС ВО (в части компетенций, формируемых при изучении математических дисциплин) и метапредметных математических компетенций, зафиксированных в международном документе Европейского общества инженерного образования (SEFI) Mathematics Working Group «A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education» [5]. На основе контент-анализа указанных документов выделен интегральный набор компетенций, непосредственно связанных с визуализацией геометрических объектов: пространственное и системное мышление, математическое моделирование, оперирова-

ние представлениями и символами, использование цифровых инструментов, коммуникация результатов.

2. На основе выявленного набора компетенций на проектном этапе разработана структурно-функциональная модель интеграции средств визуализации (GeoGebra, авторские HTML-страницы) в курс линейной алгебры и аналитической геометрии. Для каждой компетенции интегрального списка разработаны сценарии (дидактические кейсы) применения визуализации на лекционных и практических занятиях по теме «Кривые и поверхности второго порядка».

3. Апробация разработанных материалов в течение трех учебных лет (2023–2025) для студентов первого курса РТУ МИРЭА. В исследовании приняли участие 363 студента (по две экспериментальные и две контрольные группы в осенних семестрах в течение трех лет). Занятия проводились в смешанном формате: лекции с демонстрацией динамических моделей, практические занятия с самостоятельной работой студентов с использованием вычислительной техники.

4. Сбор обратной связи через анкетирование, контрольные срезы и сравнительный анализ академической успеваемости по теме «Кривые и поверхности второго порядка» в экспериментальных и контрольной группах. Статистическая обработка результатов контрольных срезов выполнялась с применением непараметрического U-критерия Манна – Уитни; различия между экспериментальными и контрольными группами признавались статистически значимыми при уровне значимости $p \leq 0{,}05$.

Результаты исследования и их обсуждение

Метапредметные компетенции при изучении аналитической геометрии

Сравнительный анализ ФГОС ВО 3++ и компетентностной модели SEFI показывает, что, несмотря на различия в исходных подходах и целевых аудиториях, в области визуализации геометрических объектов между ними существует значительное концептуальное пересечение. Более детализированный взгляд на компетенции, формируемые при изучении математики в инженерном образовании, представлен в документе SEFI «A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education» [5], разработанном на основе компетентностной модели М. Нисса (M. Niss). Документ выделяет восемь математических компетенций. В табл. 1 представлены наиболее значимые, по мнению авторов, компетенции для изучения темы «Кривые и поверхности второго порядка».

Проведенный анализ подтверждает, что выделенный интегральный набор компетенций находит свое отражение в обеих моделях, но с разной степенью детализации и на разных уровнях. В ФГОС ВО 3++ компетенции, связанные с визуализацией, часто «размыты» на уровне универсальных компетенций (УК) и должны конкретизироваться в общепрофессиональных (ОПК) и профессиональных (ПК). Модель SEFI предлагает более четкие и операционализируемые формулировки на уровне базовых математических компетенций. Тем не менее сопоставление требований ФГОС ВО и компетентностной модели SEFI выявило существенное содержательное пересечение – в обоих документах напрямую указана необходимость развития у студента способности видеть за символьной записью содержательный объект и осознанно применять цифровые инструменты для его анализа. Это подтверждает универсальность требований к метапредметной подготовке будущего инженера независимо от образовательной традиции и служит основанием для разработки педагогической модели, представленной ниже.

Структурно-функциональная модель интеграции средств визуализации

Проведенный сравнительный анализ компетенций (табл. 1) позволил выделить интегральный набор метапредметных результатов, на достижение которых должна быть ориентирована разрабатываемая методика. На основе этого набора и с учетом теоретических положений когнитивной психологии (теория двойного кодирования, снижения когнитивной нагрузки) нами была спроектирована структурно-функциональная модель интеграции средств компьютерной визуализации в учебный процесс, представленная на рис. 1. Модель включает четыре взаимосвязанных уровня: целевой, методологический, инструментально-процессуальный и результативный.

Теоретические основы исследования (методологический блок модели)

Принцип наглядности – один из старейших дидактических принципов, однако его содержание существенно изменилось с приходом цифровых технологий. При использовании компьютерной визуализации в качестве педагогического инструмента авторы опираются на теорию когнитивной нагрузки Дж. Свеллера [6], теорию двойного кодирования А. Пайвио [7] и теорию мультимедийного обучения Р. Майера [8], развивающую идеи Пайвио применительно к цифровым образовательным средам.

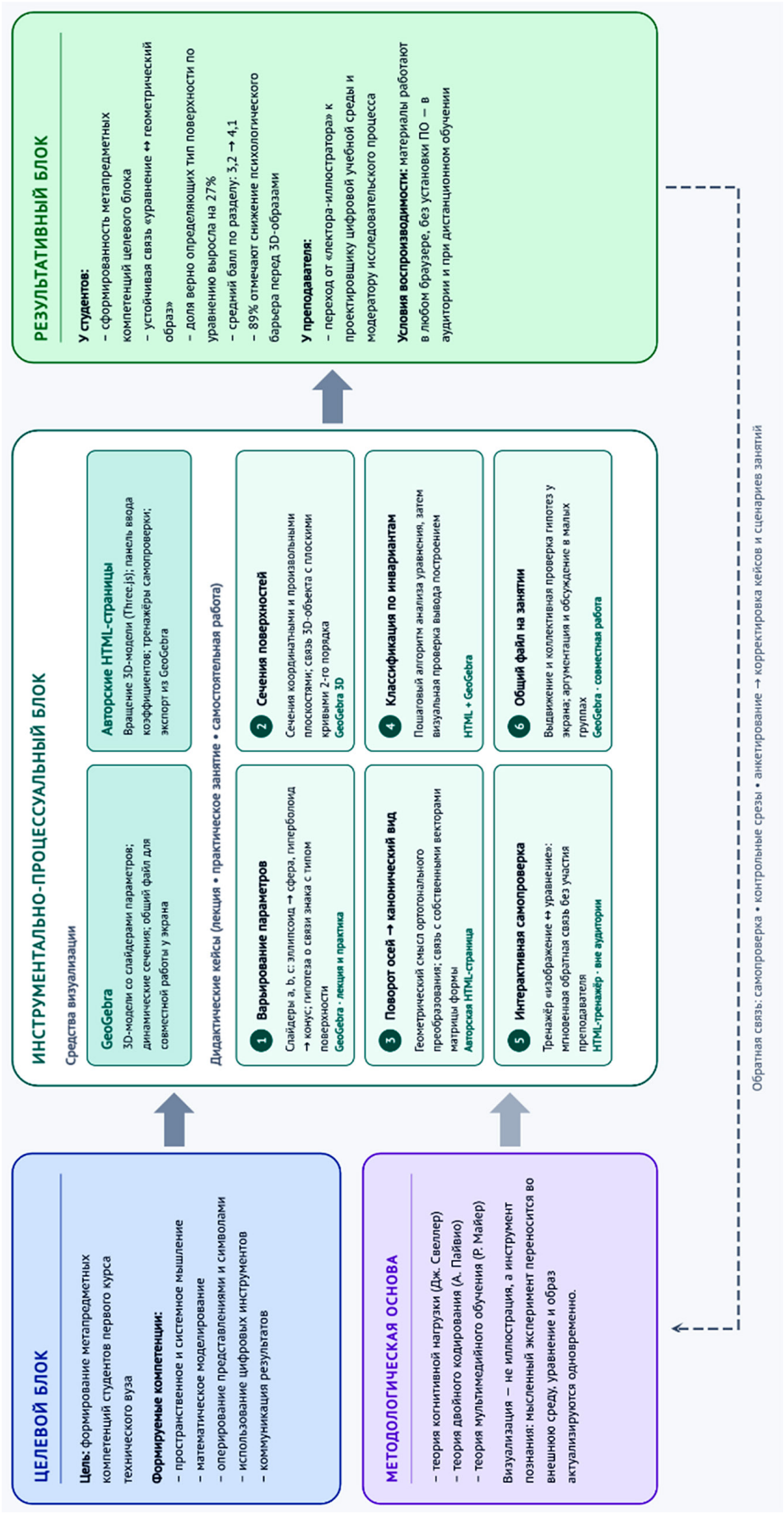


Рис. 1. Структурно-функциональная модель (GeoGebra и HTML-страницы)
Примечание: составлен авторами по результатам данного исследования

Таблица 1

Сравнительный анализ ФГОС ВО 3++ и модели SEFI
в разрезе математических компетенций, важных
для изучения темы «Кривые и поверхности второго порядка»

Интегральная компетенция	ФГОС ВО 3++ (формулировки)	Модель SEFI (формулировки)	Сходства и различия
Пространственное и системное мышление	УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	Thinking mathematically: Способность понимать, использовать и применять математические концепции в контексте. Reasoning mathematically: Способность к математическому рассуждению	Пересечение: Обе модели требуют системного подхода к решению задач. SEFI делает акцент на математическом контексте, в то время как ФГОС формулирует это более общо, как научное мировоззрение
Математическое моделирование	Прямого аналога в УК нет. Эта компетенция, как правило, включается в ОПК или ПК (например, способность использовать современный математический аппарат)	Modelling mathematically: Способность строить и использовать математические модели. Posing and solving mathematical problems: Способность ставить и решать математические задачи	Различие: В SEFI это одна из восьми ключевых математических компетенций. Во ФГОС 3++ эта компетенция отнесена к профессиональному уровню, что дает вузам свободу в ее конкретизации
Оперирование представлениями и символами	УК-1: Критический анализ информации. (Косвенное указание на работу с разными формами представления данных)	Representing mathematical entities: Способность представлять математические объекты. Handling mathematical symbols and formalism: Способность оперировать математическими символами и формализмами	Различие: SEFI дает четкое и прямое описание этой компетенции. Во ФГОС она подразумевается, но явно не выделяется, что может приводить к неоднозначности в трактовке
Использование цифровых инструментов	Прямого аналога в УК нет. Входит в ОПК или ПК (например, способность использовать современные информационные технологии)	Making use of aids and tools: Способность использовать вспомогательные средства и инструменты (включая цифровые)	Различие: SEFI прямо указывает на использование инструментов. Во ФГОС эта компетенция не выделена на уровне УК, что является упущением, учитывая современные реалии
Коммуникация результатов	УК-3: Способен осуществлять социальное взаимодействие и реализовывать свою роль в команде. УК-5: Способен осуществлять деловую коммуникацию в устной и письменной формах...	Communicating in, with, and about mathematics: Способность коммуницировать с использованием математического языка	Пересечение: Обе модели требуют эффективной коммуникации. SEFI конкретизирует это через «математический язык», а ФГОС делает акцент на деловой коммуникации в целом

Примечание: составлена авторами на основе полученных данных в ходе исследования.

Теория когнитивной нагрузки утверждает, что объем рабочей памяти ограничен: в ней единовременно удерживается лишь небольшое число элементов. Поэтому задачи, требующие одновременной активации множества взаимосвязанных понятий, создают высокую внутреннюю нагрузку. К таким задачам авторы относят преобразование кривых второго порядка. Использование динамической визуализации позволяет перенести мысленный эксперимент во внешнюю среду. Часть когнитивной работы делегируется зрительной системе, что высвобождает ресурсы рабочей памяти для осмысления геометрического образа.

В своих исследованиях авторы опираются на теорию двойного кодирования, согласно которой вербальная и образная системы представления информации относительно независимы. Авторы считают, что одновременная активация обоих каналов и использование взаимосвязанных сим-

вольного и графического образа приводят к формированию устойчивых связей между ними, что существенно повышает качество усвоения материала. Изменяя значение параметра, студент одновременно видит изменение числового значения в уравнении и трансформацию геометрического образа. Это устраняет разрыв между уравнением и образом: вербальный и образный каналы активируются одновременно, что, согласно теории Пайвио, создает более прочные и разветвленные мнемические следы.

Теория мультимедийного обучения Р. Майера [8], развивающая идеи Пайвио применительно к цифровым образовательным средам, формулирует несколько принципов, актуальных для данного исследования. Принцип модальности утверждает, что сочетание визуального и вербального каналов эффективнее передачи информации через какой-либо один из них. Принцип пространственной и временной смежности требует, чтобы соответствующие потоки информации из разных каналов предъявлялись одновременно и в непосредственной близости, а не были разнесены во времени и пространстве. Принцип интерактивности дает возможность самостоятельно изменять параметры объекта и немедленно наблюдать следствия этих изменений, что переводит студента из роли пассивного наблюдателя в роль активного исследователя. Майер квалифицирует такую активность как генеративную обработку – студент не просто воспринимает готовые образы, а конструирует собственные ментальные модели через пробы и наблюдения. Генеративная обработка, в отличие от репродуктивного запоминания, формирует гибкое, применимое в новых контекстах знание.

В более ранних работах отечественных исследователей было отмечено, что компьютерная визуализация не сводится к демонстрации уже известного результата. Она становится инструментом познания, позволяющим обучаемому самостоятельно выстраивать образ математического объекта. В. Л. Авербух, рассматривая теоретические основания компьютерной визуализации, подчеркивает, что визуализация – это не просто представление данных в графической форме, а специально организованный процесс, поддерживающий когнитивную деятельность человека при работе со сложными абстрактными структурами: «проектирование видов отображения является важной частью для определения когнитивной составляющей конкретной специализированной системы визуализации» [9, с. 197]. А. А. Вербицкий в рамках концепции знаково-контекстного обучения указывает, что наглядный образ выступает промежуточным звеном между абстрактным понятием и практическим действием: свертывание содержания в образ облегчает его дальнейшее развертывание в развернутое рассуждение. Он также отмечает, что «визуализация как средство образного мышления: способствует восприятию и усвоению материала; активизирует умственную деятельность; позволяет глубже понять сущность явлений» [10, с. 163]. Применительно к аналитической геометрии это означает следующее. Интерактивный образ поверхности второго порядка, построенный студентом самостоятельно при динамическом изменении параметров, закрепляется в сознании прочнее, чем статичный чертеж, перерисованный с доски.

Данное понимание согласуется с задачами формирования пространственного мышления – способности оперировать пространственными образами, критически важной для успешного освоения инженерных дисциплин [11].

GeoGebra и авторские HTML-страницы в изучении кривых и поверхностей второго порядка (инструментально-процессуальный блок модели)

Интерактивная геометрическая система GeoGebra предоставляет преподавателю возможность строить трехмерные модели поверхностей второго порядка с параметрами, заданными в виде управляемых слайдеров, и демонстрировать студентам изменение формы объекта в реальном времени. В отличие от статичного изображения, динамическая модель позволяет показать, например, непрерывный переход эллипсоида в сферу при выравнивании полуосей; вырождение однополостного гиперболоида в конус; изменение эксцентриситета эллипса при изменении соотношения полуосей; поведение поверхности при обращении одного из коэффициентов в ноль. Исследования показывают, что использование программного обеспечения для динамической геометрии (Dynamic Geometry Software или DGS), в частности GeoGebra, повышает интерес студентов к геометрии и улучшает понимание сложных теорем [12; 13]. В российском образовательном пространстве накоплен положительный опыт применения GeoGebra в школе и вузе [14; 15]. Однако большинство работ ориентировано на планиметрию или стандартные задачи; целенаправленное использование 3D-возможностей GeoGebra для изучения поверхностей второго порядка в инженерных группах освещено недостаточно.

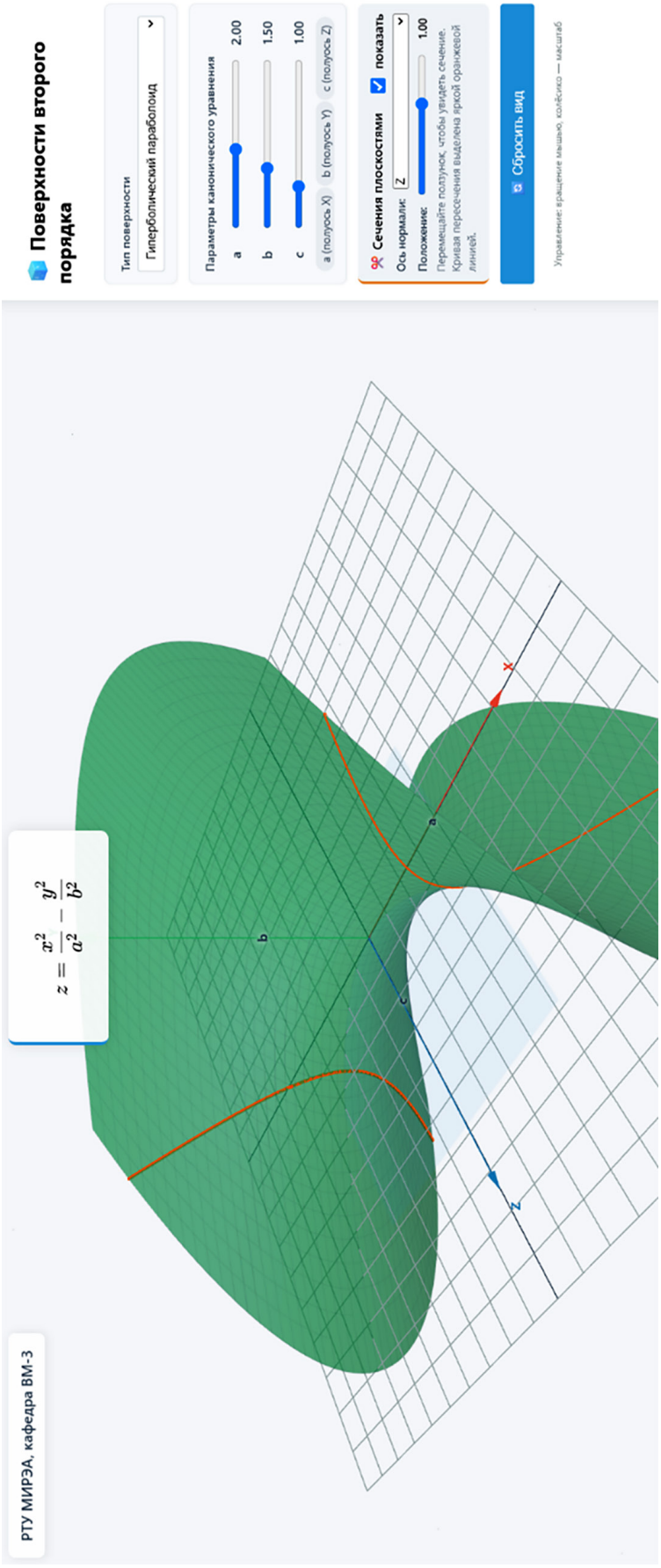


Рис. 2. Скриншот HTML страницы с визуализацией поверхности второго порядка
Примечание: составлен авторами на основе полученных данных в ходе исследования

Таблица 2

Дидактические кейсы использования GeoGebra и авторских HTML-страниц при изучении кривых и поверхностей второго порядка

Функциональная возможность визуализации	Дидактическое применение	Пример задания
GeoGebra 3D: Динамическое варьирование параметров канонического уравнения (интерактивные слайдеры *a*, *b*, *c*)	Наблюдение непрерывной трансформации формы поверхности (эллипсоид → сфера; однополостный гиперболоид → конус → двуполостный гиперболоид) для понимания роли коэффициентов и границ между типами поверхностей	«Изменяя параметр *c* в уравнении однополостного гиперболоида, зафиксируйте момент вырождения поверхности в конус. Сформулируйте гипотезу о связи знака параметра с типом поверхности и проверьте ее аналитически»
GeoGebra: траектория точки и анимация параметра	Изучение кривых как траекторий движения; параметрическое задание; связь с физическими процессами	Построение эллипса как траектории точки, движущейся согласно параметрическим уравнениям $x = a\cos t; y = b\sin t$. Изменяя значения параметров *a* и *b*, исследовать изменение эксцентриситета
GeoGebra 3D: построение поверхности по уравнению	Демонстрация формы поверхности при разных значениях коэффициентов; сопоставление канонического и общего уравнения	Преподаватель вводит уравнение эллипсоида с параметрами *a, b*, *c*, управляемыми слайдерами. Студенты наблюдают, как изменение полуосей влияет на сжатие/растяжение и приближение к сфере
Построение сечений поверхности координатными и произвольными плоскостями	Установление связи между пространственным объектом и плоскими кривыми второго порядка (эллипс, парабола, гипербола); формирование умения переходить между размерностями	«Постройте в GeoGebra семейство горизонтальных сечений эллиптического параболоида $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ при разных *z*, выведите уравнение сечения самостоятельно и сверьте с построением»
GeoGebra: динамические сечения плоскостями	Визуализация метода сечений для определения типа поверхности; связь с кривыми второго порядка на плоскости	Для гиперболического параболоида (седловая поверхность) демонстрируются горизонтальные и вертикальные сечения. Студенты видят, что горизонтальные сечения – гиперболы, вертикальные – параболы, что помогает запомнить классификацию
Визуализация поворота координатных осей при приведении уравнения кривой/поверхности к каноническому виду	Наглядная демонстрация геометрического смысла ортогонального преобразования координат и связи с собственными векторами матрицы квадратичной формы	HTML-страница синхронно показывает график кривой общего вида $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Fy = 0$ и ее канонический вид после поворота на угол, вычисленный через собственные значения матрицы формы
Пошаговый интерактивный алгоритм классификации поверхности по инвариантам	Развитие алгоритмического и критического мышления: студент последовательно проверяет инварианты уравнения и сопоставляет вывод с визуальным образом	«Определите тип поверхности по уравнению без построения, обоснуйте вывод через инварианты, а затем проверьте результат визуализацией в GeoGebra»
HTML-страница (Three.js): интерактивное вращение и масштабирование	Свободное исследование 3D-объекта с любого ракурса; развитие пространственного воображения.	На странице загружена модель однополостного гиперболоида. Студенты с помощью мыши вращают модель, увеличивают отдельные участки, включают/выключают каркасное отображение. Задание: определить, при каких условиях гиперболоид становится конусом
HTML-страница: панель управления параметрами с числовым вводом	Экспериментальная работа: студент самостоятельно задает значения параметров, наблюдает изменение формы и делает выводы о классификации	Страница содержит поля для ввода коэффициентов общего уравнения второй степени. После ввода генерируется поверхность и автоматически распознается ее тип (эллипсоид, гиперболоид, параболоид и т. д.). Студент проверяет свои теоретические расчеты

Окончание табл. 2

Функциональная возможность визуализации	Дидактическое применение	Пример задания
GeoGebra + HTML: совместное использование на практическом занятии	Организация исследовательской работы в парах или малых группах; обсуждение результатов и защита выводов	Групповое задание: «Исследуйте влияние знака коэффициента при *xy* на форму поверхности, используя HTML-модель, и подготовьте краткое объяснение»
Интерактивные HTML-тренажеры для самопроверки (сопоставление изображения и уравнения)	Формирование навыка самоконтроля и самостоятельной работы вне аудитории; мгновенная обратная связь без участия преподавателя	Тренажер на авторской HTML-странице предлагает студенту сопоставить изображение поверхности с одним из четырех уравнений и объясняет ошибку при неверном выборе
Совместная работа с общим GeoGebra-файлом на лекции/практическом занятии	Развитие коммуникативной компетенции, навыков аргументации и коллективного обсуждения геометрической интерпретации алгебраического объекта	Групповое обсуждение: «Почему при данном соотношении параметров поверхность распадается на пару плоскостей?» – студенты выдвигают и совместно проверяют гипотезы у экрана

Примечание: составлена авторами на основе полученных данных в ходе исследования

Опыт создания подобных электронных пособий средствами GeoGebra описан, в частности, в работах А. В. Ушакова, посвященных визуализации свойств кривых второго порядка на примере эллипса [16], и Е. И. Егоровой, рассмотревшей применение пакета GeoGebra при изучении уравнений поверхностей второго порядка [17]. Авторы отмечают, что подготовленные преподавателем электронные материалы могут использоваться как для сопровождения лекции, так и в качестве самостоятельного задания на практическом занятии в компьютерном классе.

Наряду с готовыми апплетами GeoGebra практический интерес представляют авторские HTML-страницы, подготавливаемые преподавателем самостоятельно (в том числе на основе экспорта GeoGebra-конструкций в формат HTML5/JavaScript). Скриншот такой HTML страницы представлен на рис. 2. Такой подход обладает рядом методических преимуществ по сравнению с использованием только программы GeoGebra, поскольку материал может распространяться среди студентов как автономный файл, структура страницы и порядок подачи материала полностью определяются преподавателем и могут быть выстроены в соответствии с логикой конкретной лекции; в страницу могут быть встроены элементы самопроверки (интерактивные вопросы, сопоставление изображения и уравнения) и пошаговое раскрытие материала, недоступное в типовом апплете.

Совместное использование GeoGebra (для оперативной демонстрации и экспериментирования на занятии) и заранее подготовленных HTML-страниц (для самостоятельной работы студента вне аудитории) формирует целостную дидактическую среду, в которой визуализация выступает не иллюстрацией, а полноценным инструментом познания, проверки и опровержения гипотез о свойствах геометрического объекта.

Приведем примеры дидактических кейсов применения GeoGebra и авторских HTML-страниц при изучении темы «Кривые и поверхности второго порядка», направленные на формирование выделенных выше метапредметных компетенций (табл. 2).

Данные кейсы являются базовыми; в зависимости от уровня подготовки группы и времени занятия они могут комбинироваться и усложняться. Важным методическим приемом является использование обратного проектирования: студентам предлагается не только смотреть на готовые визуализации, но и самим создавать простые модели в GeoGebra (например, построить поверхность по заданному уравнению), что способствует более глубокому пониманию изучаемых объектов.

Результаты педагогической апробации

После трехлетней апробации разработанной методики были получены следующие результаты:

− В экспериментальных группах (с использованием визуализации) доля студентов, правильно определяющих тип поверхности по уравнению, увеличилась на 27 % по сравнению с контрольными группами (средний балл за контрольную работу по разделу повысился с 3,2 до 4,1 по 5-балльной шкале; различия между экспериментальными и контрольными группами статисти-

чески значимы при $p \leq 0,05$ по U-критерию Манна – Уитни).

− В анкетах 89 % студентов отметили, что интерактивные модели помогли им «увидеть» пространственные формы и снизили психологический барьер при работе с пространственными геометрическими образами.

− Преподаватели, участвовавшие в эксперименте, отметили рост заинтересованности студентов на практических занятиях, о чем свидетельствовало выросшее число вопросов, связанных с поиском причинно-следственных связей между параметрами уравнений, задающих кривые и поверхности и их геометрическими свойствами.

− Студенты стали чаще использовать инструменты 3D-графики при подготовке к контрольным работам и при выполнении индивидуальных домашних заданий.

В ходе реализации исследования авторы столкнулись с рядом методических трудностей. Во-первых, разработка качественных HTML-страниц требует от преподавателя навыков веб-программирования, что не всегда доступно. Решением данной проблемы стало создание библиотеки типовых шаблонов, которые могут быть адаптированы под конкретную тему без глубокого знания JavaScript. Во-вторых, некоторые студенты склонны воспринимать внедрение визуализации как игровой элемент, в результате чего упускается аналитическая составляющая занятия. Для предотвращения данного явления авторами разработана система заданий, предполагающих обязательный перевод визуальных наблюдений в аналитические выкладки (например, после изменения параметра студент должен записать новое уравнение и объяснить, как изменились фокусы или асимптоты).

С методической точки зрения наиболее важным результатом авторы считают смену роли преподавателя из традиционного «лектора-иллюстратора» в разработчика цифровых сред и модератора исследовательского процесса. Это соответствует современным трендам, зафиксированным в федеральных государственных образовательных стандартах и профессиональных стандартах педагога высшей школы.

Заключение

Проведенное исследование подтвердило актуальность пересмотра методики преподавания раздела «Кривые и поверхности второго порядка» курса линейной алгебры и аналитической геометрии для студентов первого курса технического вуза в условиях цифровой трансформации образования.

1. Установлено содержательное соответствие между универсальными компетенциями ФГОС ВО и метапредметными математическими компетенциями международной рамочной модели SEFI. Показано, что визуализация кривых и поверхностей второго порядка непосредственно затрагивает такие компетенции, как математическое мышление, моделирование, представление объектов в разных формах, использование цифровых инструментов и коммуникация.

2. Разработана и детализирована структурно-функциональная модель применения средств компьютерной визуализации – GeoGebra и авторских HTML-страниц – в лекционных и практических занятиях. Модель включает конкретные дидактические кейсы: динамическое варьирование параметров уравнений, построение сечений поверхностей, визуализацию поворота осей при приведении уравнения к каноническому виду, пошаговую классификацию поверхности по инвариантам, интерактивную самопроверку и совместную работу с общим файлом на занятии.

3. Обоснована трансформация роли преподавателя – подготовка собственных интерактивных материалов (GeoGebra-конструкций и HTML-страниц) переводит его из демонстратора готовых чертежей в проектировщика учебной цифровой среды, в которой студент получает возможность самостоятельно экспериментировать с математическим объектом и проверять собственные гипотезы о его свойствах.

4. Проведена трехлетняя апробация разработанной модели в реальном учебном процессе РТУ МИРЭА (2023–2025 учебные годы, 363 студента, экспериментальные и контрольные группы). По результатам контрольных срезов и анкетирования установлено, что применение средств компьютерной визуализации повышает качество усвоения раздела «Кривые и поверхности второго порядка» в экспериментальных группах по сравнению с контрольными и способствует снижению психологического барьера при работе с пространственными геометрическими образами.

Перспективы дальнейших исследований связаны с разработкой методики оценки уровня сформированности пространственных представлений с использованием визуализационных тестов (включая пре- и посттестирование), позволяющих точнее количественно оценить эффективность применения визуализации для формирования пространственного мышления студентов, созданием массового открытого банка интерактивных GeoGebra-апплетов и HTML-тренажеров по разделу «Кривые и поверхности второго порядка» и проведением более масштабного педагогического эксперимента на нескольких вузовских площадках.

Список литературы

1. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника: утв. приказом Минобрнауки РФ от 19.09.2017 № 929. URL: https://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS %20VO %20 3++/Bak/090301_B_3_15062021.pdf (дата обращения: 10.05.2026).

2. Громыко Ю. В., Просекин М. Ю. Обучающая мыследеятельность нового поколения и базовые педагогические компетенции // Психолого-педагогические исследования. 2022. № 14 (2). С. 100–128. DOI: 10.17759/psyedu.2022140207.

3. Хуторской А. В. Метапредметный подход в обучении: Научно-методическое пособие. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Издательство «Эйдос»; Издательство Института образования человека, 2016. 80 с. ISBN 978-5-904329-73-0.

4. Зимняя И. А. Ключевые компетентности как результативно-целевая основа компетентностного подхода в образовании. М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2004. 42 с. [Электронный ресурс]. URL: https://fgosvo.ru/uploadfiles/npo/20120325214132.pdf (дата обращения: 12.05.2026).

5. Alpers B., Demlova M., Fant C.-H., Gustafsson T., Lawson D., Mustoe L., Olsson-Lehtonen B., Robinson C., Velichova D. A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education. – Brussels: European Society for Engineering Education (SEFI), 2013. 78 p. ISBN 978-2-87352-007-6.

6. Sweller J., Van Merriënboer J. J. G., Paas F. Cognitive architecture and instructional design: 20 years later // Educational Psychology Review. 2019. Vol. 31. Is. 2. P. 261–292. DOI: 10.1007/s10648-019-09465-5.

7. Clark J. M., Paivio A. Dual coding theory and education // Educational Psychology Review. 1991. Vol. 3. Is. 3. P. 149–210. DOI: 10.1007/bf01320076.

8. Mayer R. E. The Past, Present, and Future of the Cognitive Theory of Multimedia Learning // Educational Psychology Review. 2024. Vol. 36. Art. 8. DOI: 10.1007/s10648-023-09842-1.

9. Авербух В. Л., Авербух Н. В., Васев П. А., Гвоздарев И. Л., Левчук Г. И., Мелкозеров Л. О. Визуализация программного обеспечения на базе средств виртуальной реальности геопространственных данных. Обзор и перспективы разработки // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2020. Т. 331. № 1. С. 195–210. DOI: 10.18799/24131830/2020/1/2461. EDN: MKMWCX.

10. Вербицкий А. А. Теория и технологии контекстного образования; Московский педагогический государственный университет. М.: Московский педагогический государственный университет, 2017. 266, [1] с. ISBN 978-5-4263-0384-3. EDN: LATCHI.

11. Шавелкова В. В. Развитие пространственного мышления у студентов с помощью CAD и 3D-моделирования // Актуальные исследования. 2023. № 38–2 (168). С. 74–80. URL: https://apni.ru/uploads/ai_38_2_2023_sv.pdf (дата обращения: 12.05.2026).

12. Власов Д. А., Синчуков А. В. Модернизация методических систем преподавания математических дисциплин на основе GeoGebra // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2020. Т. 16. № 1. С. 187–197. DOI: 10.25559/SITITO.16.202001.187-197. EDN: OMNNKR.

13. Bhagat K. K., Chang C. Y. Incorporating GeoGebra into Geometry Learning – A Lesson from India // Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education. 2015. Vol. 11. Is. 1. P. 77–86. DOI: 10.12973/eurasia.2015.1307a.

14. Ziatdinov R., Rakuta V. M. Dynamic Geometry Environments as a Tool for Computer Modeling in the System of Modern Mathematics Education // European Journal of Contemporary Education. 2012. Vol. 1. Is. 1. P. 93–100. DOI: 10.13187/ejced.2012.1.93.

15. Шабалина М. Р. Применение компьютерной среды GeoGebra при исследовании поверхностей второго порядка методом параллельных сечений // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2018. № 20. С. 328–334. EDN: YWNQNC. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_32827349_18133675.pdf (дата обращения: 12.05.2026).

16. Ушаков А. В. Использование программы GeoGebra для визуализации свойств кривых второго порядка // Международный научно-исследовательский журнал. 2017. № 4–3 (58). С. 63–67. DOI: 10.23670/IRJ.2017.58.160.

17. Егорова Е. И. Использование пакета GEOGEBRA в изучении уравнений поверхностей второго порядка // Концепт. 2016. Т. 43. С. 119–125. URL: http://e-koncept.ru/2016/76434.htm (дата обращения: 12.05.2026).

Конфликт интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest: The authors declare that there is no conflict of interest.

Финансирование: Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования.

Financing: The research was performed without external funding.