

УДК 519.65
DOI 10.17513/snt.40834



РАЗРАБОТКА СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ L-МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

¹Фадеева Л. Ю. ORCID ID 0009-0005-5344-5227, ²Титов А. Н.

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева – КАИ», Казань, Российская Федерация, e-mail: milafadeeva@yandex.ru;

²Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет», Казань, Российская Федерация

Интерполяция случайных процессов является одним из ключевых математических инструментов, позволяющих решать широкий спектр прикладных задач, в которых создаются более точные, полные математические модели и восстанавливаются данные измерений. Решением задачи интерполяции занимались многие ученые, однако явные интерполяционные формулы в настоящее время известны только для процессов с рациональным спектром. Целью настоящей работы является построение на основе методов спектрального анализа случайных процессов и теории аналитических и целых функций комплексного переменного стохастической модели оптимального оператора интерполяции для L-марковского процесса с квазирациональной спектральной плотностью. С привлечением метода математической индукции и теории разностных уравнений получена формула для спектральной характеристики интерполяции L-марковского процесса, на основе которой выявлена форма его оптимального интерполятора. Показано, что оптимальный линейный оператор интерполирования представляет собой сумму двух несобственных стохастических интегралов и линейной комбинации значений исследуемого процесса и его производных в определенные моменты времени, зависящие от параметров спектральной плотности. Результат, полученный в работе, позволяет детализированно восстанавливать пропущенные данные стохастических процессов с квазирациональным спектром и может быть использован в различных радиотехнических приложениях.

Ключевые слова: случайный процесс, спектральный анализ, интерполирование, разностные уравнения, квазирациональная спектральная плотность, L-марковский процесс, спектральная характеристика

DEVELOPMENT OF A STOCHASTIC MODEL OF THE OPTIMAL INTERPOLATION OPERATOR FOR THE L-MARKOV PROCESS

¹Fadeeva L. Yu. ORCID ID 0009-0005-5344-5227, ²Titov A. N.

¹Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev – KAI”, Kazan, Russian Federation, e-mail: milafadeeva@yandex.ru;

²Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Kazan National Research Technological University”, Kazan, Russian Federation

The interpolation of random processes is one of the key mathematical tools that allow us to solve a wide range of applied problems, in which more accurate and complete mathematical models are created and measurement data are restored. Many scientists have studied the problem of interpolation, but explicit interpolation formulas are currently known only for processes with a rational spectrum. The goal of this work is to use the methods of spectral analysis of random processes and the theory of analytic and entire functions of a complex variable to construct a stochastic model of the optimal interpolation operator for an L-Markov process with a quasi-rational spectral density. Using the method of mathematical induction and the theory of difference equations, a formula for the spectral characteristic of the L-Markov process interpolation is derived, on the basis of which the form of its optimal interpolator is revealed. It is shown that the optimal linear interpolation operator is a sum of two improper stochastic integrals and a linear combination of the values of the process under study and its derivatives at certain points in time, depending on the parameters of the spectral density. The result obtained in this work allows for detailed reconstruction of missing data from stochastic processes with a quasi-rational spectrum and can be used in various radio engineering applications.

Keywords: random process, spectral analysis, interpolation, quasi-rational spectral density, L-Markov process, difference equations, spectral characteristics

Введение

Интерполяция случайных процессов является одним из ключевых математических инструментов, посредством которого ре-

шается широкий спектр прикладных задач, в которых создаются более точные, полные математические модели и восстанавливаются данные измерений [1–3].

Применение интерполяции значительно ускоряет анализ и прогнозирование случайных процессов, улучшает результаты экспериментов в областях, где определяющим фактором является точность и достоверность данных. Использование интерполяции в технических расчетах позволяет исключить проведение повторных экспериментов, которые иногда провести просто невозможно.

Изначально интерполяция стала использоваться для видео- и фотосъемок с размытыми областями с целью достижения более четкого и детализированного изображения [4, 5].

В радиофизике интерполяция чаще всего используется для восстановления поля излучения антенн, повышения разрешающей способности радиолокационных станций, что позволяет различать объекты, расположенные ближе, чем исходное разрешенные системы [6].

В навигации интерполяция данных о начальном, промежуточном и конечном положении движущегося объекта дает более точную оценку перемещения объекта в промежуточное положение на основе GPS-данных [7, 8].

Интерполяция также широко применяется при разработке, диагностике и контроле современных материалов, помогает анализировать их свойства и обнаруживать в них дефекты [9].

Задачу интерполирования случайных последовательностей и процессов, то есть задачу оценки неизвестных значений случайного процесса в некоторые моменты времени, находящиеся внутри диапазона наблюдений, на основе известных значений этого процесса в другие моменты, поставил в середине прошлого века академик А. Н. Колмогоров.

Одновременно с ним задачами интерполяции и экстраполяции занимались аме-

риканские математики Дж. Дууб, создатель аксиоматики теории случайных процессов, и основоположник искусственного интеллекта Н. Винер, первый из которых указал класс случайных процессов с рациональным спектром, для которого возможно построение явных интерполяционных формул, а второй построил эти формулы, «не дав, однако, им строгого математического доказательства» [10]. Впоследствии последователю идей А. Н. Колмогорова математику А. Яглому удалось получить строгое математическое доказательство формул Н. Винера, более того, им были получены явные формулы экстраполяции для одного частного класса случайных процессов с квазирациональной спектральной плотностью, обобщающей рациональную. Однако явные интерполяционные формулы в настоящее время известны только для процессов с рациональным спектром. Получение интерполяционных формул для процессов с квазирациональным спектром, расширяющим класс процессов с рациональным спектром, позволяет эффективнее моделировать сложные реальные процессы, которые не описываются простыми дробно-рациональными функциями, что значительно увеличивает сферу применения интерполирования в качестве математического инструмента для прикладных задач.

Цель исследования – построение на основе методов спектрального анализа случайных процессов стохастической модели оптимального оператора интерполяции для L-марковского процесса с квазирациональной спектральной плотностью.

Материалы и методы исследования

В работе найдено явное решение задачи интерполяции для случайного процесса со спектральной плотностью:

$$S(\omega) = \frac{|Q(\omega)|^2}{|Q_0(\omega) + Q_1(\omega)e^{-i\omega g}|^2} = \frac{|Q(\omega)|^2}{|G(\omega)|^2} = \frac{\left| \prod_{j=1}^{m_0} (\omega - a_j) \right|^2}{|G(\omega)|^2}, \quad (1)$$

где $Q(\omega)$, $Q_0(\omega)$, $Q_1(\omega)$ – многочлены степеней m_0 , q_0 и q_1 соответственно, $g > 0$ – действительное число, $a_j, j = 1, 2, \dots, m_0$ – корни многочлена $Q(\omega)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Следует отметить, что спектральные характеристики интерполирования для процессов со спектральными плотностями

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{|Q(\omega)|^2}{\left| \sum_{k=0}^n Q_k(\omega) e^{-i\omega g_k} \right|^2} = \frac{|Q(\omega)|^2}{|\tilde{G}(\omega)|^2} = \frac{\left| \prod_{j=1}^{m_0} (\omega - a_j) \right|^2}{|\tilde{G}(\omega)|^2} \quad (2)$$

при произвольном n могут быть построены методами, аналогичными рассмотренным ниже, причем доказательства и полученные формулы будут сходны с теми, что применяются при построении спектральной характеристики интерполирования для процесса со спектральной плотностью (1).

В работах авторов [11, 12] доказано, что поскольку знаменатели $|G(\omega)|^2$ и $|\tilde{G}(\omega)|^2$ спектральных плотностей (1) и (2) являются целыми функциями экспоненциального типа, то процессы со спектральными плотностями (1) и (2) при $Q(\omega) = 1$ являются L-марковскими процессами.

Задача линейной интерполяции заключается в поиске наилучшего (в смысле метода наименьших квадратов) линейного приближения $\tilde{\xi}(t; \tau)$ к случайной величине $\xi(t + \tau)$, $0 < \tau < T$ с помощью значений процесса $\xi(s)$ на двух полупрямых $s \leq t$; $s \geq t + T$.

Из работы А. Яглома известно, что линейные задачи экстраполяции, фильтрации и интерполирования можно представить на языке аналитических функций комплексного переменного [10].

$$\text{Пусть } \xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega), \quad M|dZ(\omega)|^2 = dF(\omega) = f(\omega)d\omega \quad (3)$$

спектральное представление стационарного процесса $\xi(t)$, где $Z(\omega)$ – случайная функция с некоррелированными приращениями, $f(\omega)$ – спектральная плотность процесса. В работах авторов А. Яглома и Ю. Розанова было доказано, что линейный интерполятор может быть представлен в виде [10, 11]:

$$\tilde{\xi}(t; \tau) = L\{\xi(u), u \leq t; u \geq t + T\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \Phi_{\tau, T}(\omega) Z(\omega) d\omega. \quad (4)$$

где $\Phi_{\tau, T}(\omega)$ – спектральная характеристика интерполирования.

А. М. Ягломом было доказано, что если функции $\Phi_{\tau, T}(\omega)$ и $\Psi_{\tau, T}(\omega) = [e^{i\omega\tau} - \Phi_{\tau, T}(\omega)]f(\omega)$ можно продолжить в область комплексных значений ω так, что 1а) функция $\Phi_{\tau, T}(\omega)$ представляется в виде $\Phi_{\tau, T}(\omega) = \Phi_{\tau, T}^{(1)}(\omega) + e^{i\omega\tau} \Phi_{\tau, T}^{(2)}(\omega)$, 1б) функция $\Phi_{\tau, T}^{(1)}(\omega)$ – аналитическая в нижней полуплоскости; 1в) функция $\Phi_{\tau, T}^{(2)}(\omega)$ – аналитическая в верхней полуплоскости; 1г) функции $\Phi_{\tau, T}^{(1)}(\omega)$ и $\Phi_{\tau, T}^{(2)}(\omega)$ – возрастают при $|\omega| \rightarrow \infty$ в нижней и, соответственно, верхней полуплоскости не быстрее, чем некоторая степень $|\omega|$; 2а) функция $\Psi_{\tau, T}(\omega)$ является целой функцией; 2б) функции $\Psi_{\tau, T}(\omega)$ и $e^{-i\omega T} \Psi_{\tau, T}(\omega)$ убывают при $|\omega| \rightarrow \infty$ в верхней и соответственно, нижней полуплоскости не медленнее, чем $|\omega|^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$; 3) $\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{\tau, T}^{(1)}(\omega)|^2 f(\omega) d\omega < \infty$; $\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{\tau, T}^{(2)}(\omega)|^2 f(\omega) d\omega < \infty$, то функция комплексного переменного $\Phi_{\tau, T}(\omega)$ является спектральной характеристикой интерполяции [10].

Таким образом, если существует функция $\Phi_{\tau, T}(\omega)$, удовлетворяющая условиям 1–3, то наилучшее линейное приближение $\tilde{\xi}(t; \tau)$ к $\xi(t + \tau)$ по известным значениям процесса на полупрямых $s \leq t$ и $s \geq t + T$ выражается через спектральную характеристику интерполяции в соответствии с формулой (4), а среднеквадратическая ошибка интерполирования задается формулой:

$$\sigma_{\tau, T}^2 = E|\xi(t + \tau) - \tilde{\xi}(t; \tau)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{\tau, T}(\omega)|^2 f(\omega) d\omega.$$

В работе А. Яглома показывается, как эти достаточные условия позволяют найти спектральную характеристику интерполирования в случае, когда спектральная плотность рациональна [10]; в настоящей работе будет показано, как можно удовлетворить всем требованиям 1–3 в случае, когда спектральная плотность процесса $\xi(t)f(\omega) = S(\omega)$ квазирациональная и задается формулой (1).

Формулы и доказательства, получаемые при решении задачи интерполяции для процесса с плотностью (2), в случае произвольного n довольно сложны, поэтому для простоты ограничимся рассмотрением случая при $n = 1$.

Результаты исследования и их обсуждение

Сравнение решенных авторами задач экстраполяции и фильтрации для L-марковских процессов с квазирациональными спектральными плотностями [12–14] с поставленной задачей интерполяции дало основание определить спектральную характеристику интерполяции в виде

$$\Phi_{\tau, T}(\omega) = \frac{e^{i\omega\tau} \Lambda(\omega)}{M(\omega)} + \frac{|G(\omega)|^2 [W(\omega) + e^{i\omega T} Z(\omega)]}{|Q(\omega)|^2 M(\omega) M_0(\omega)}, \quad (5)$$

где $M(\omega)$, $M_0(\omega)$ – неизвестные пока полиномы, а $W(\omega)$, $\Lambda(\omega)$ и $Z(\omega)$ – целые функции, которые будут подбираться так, чтобы для функции $\Phi_{\tau, T}(\omega)$ и

$$\Psi_{\tau, T}(\omega) = S(\omega) \left\{ \frac{e^{i\omega\tau} [M(\omega) - \Lambda(\omega)]}{M(\omega)} - \frac{|G(\omega)|^2 [W(\omega) + e^{i\omega T} Z(\omega)]}{|Q(\omega)|^2 M(\omega) M_0(\omega)} \right\} \quad (6)$$

соблюдались требования 1–3.

Метод, по которому будет определяться спектральная характеристика интерполирования для процесса (1), представляет собой в сущности развитие методов построения спектральных характеристик экстраполирования и фильтрации для процессов со спектральными плотностями вида (2), рассмотренных авторами в работах [12–14].

Согласно требованию 2а) функция $\Psi_{\tau, T}(\omega)$ должна быть целой, поэтому из (6) видно, что полюса функции $S(\omega)$ должны сокращаться с нулями функции $M(\omega) - \Lambda(\omega)$, причем кратность каждого полюса должна совпадать с кратностью соответствующего нуля. Понятно, что последнего можно добиться, потребовав выполнения равенства:

$$M(\omega) - \Lambda(\omega) = |G(\omega)|^2 \sum_k L_k(\omega) e^{i\omega\alpha_k}.$$

С учетом требования 2б) заключаем, что при всех целых k числа α_k должны подчиняться неравенствам

$$0 \leq \tau + \alpha_k \leq T. \quad (7)$$

Для выполнения условий 1а) и 1г) достаточно задать следующие требования на целые функции $W(\omega)$, $Z(\omega)$ и $\Lambda(\omega)$, участвующие в представлении (7) искомой спектральной характеристики: А) функция $\Lambda(\omega) = M(\omega) - |G(\omega)|^2 \sum_k L_k(\omega) e^{i\omega\alpha_k}$ содержит только слагаемые с множителями $\exp(i\omega\alpha)$ при $\alpha \leq -\tau$ или $\alpha \geq T - \tau$; Б) для целых функций $W(\omega)$ и $Z(\omega)$ имеют место представления: $W(\omega) = \sum_{j=0}^l W_j(\omega) e^{i\omega jg}$; $Z(\omega) = \sum_{j=0}^l Z_j(\omega) e^{-i\omega jg}$, где $l = [T/g]$, а полиномы $W_j(\omega)$ и $Z_j(\omega)$, $j = 0, 1, 2, \dots, l$ удовлетворяют системам линейных разностных уравнений

$$W_{j-1}L + W_jV + W_{j+1}U = 0; \quad W_{l+1} \equiv 0; \quad (8)$$

$$Z_{j-1}U + Z_jV + Z_{j+1}L = 0; \quad Z_{l+1} \equiv 0; \quad 1 \leq j \leq l. \quad (9)$$

Здесь $\bar{Q}_0 Q_1 = U$, $Q_0 \bar{Q}_1 = L$, $|Q_0|^2 + |Q_1|^2 = V$.

Решения систем (8) и (9) в классе полиномов имеют вид

$$W_j = L^j R_j^{(l)} C_1; \quad (10)$$

$$Z_j = U^j R_j^{(l)} C_2; \quad \leq j \leq l, \quad (11)$$

$$\text{где } R_j^{(l)} = \frac{(-1)^{j-l-1}}{b} \left(|Q_0|^{2(l+1-j)} - |Q_1|^{2(l+1-j)} \right), \quad 0 \leq j \leq l, \quad (12)$$

а $C_1 = C_1(\omega)$ и $C_2 = C_2(\omega)$ – произвольные полиномы.

Нетрудно убедиться, что для одновременного выполнения требования А) и неравенств (7) достаточно принять $\alpha_k = kg$, $k = -m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, s-1, s$; где при $m_1 = [\tau/g]$, $s_1 = [(T-\tau)/g]$, $m = m_1$, если $m_1 g > \tau$; $m = m_1 - 1$, если $m_1 g \leq \tau$; $s = s_1$, если $s_1 \cdot g > T - \tau$; $s = s_1 - 1$, если $s_1 \cdot g \leq T - \tau$ и вместе с этим требовать выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned} UL_{k+1} + VL_k + LL_{k-1} &= 0, \quad UL_1 + VL_0 + LL_{-1} = M, \\ L_{-m-1} &= 0, \quad L_{s+1} = 0, \quad k = -m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим одну особенность системы (13) в сравнении с такими системами разностных уравнений, как, например, рассмотренными выше (8) и (9). В равенстве $UL_1 + VL_0 + LL_{-1} = M$ содержится неизвестный полином $M(\omega)$, фигурирующий в знаменателе спектральной характеристики интерполирования. Поэтому к решению системы (13) нужно подходить, принимая во внимание то обстоятельство, что наряду с полиномами $L_k(\omega)$, $k = -m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, s$ из этой системы должен определиться и полином $M(\omega)$.

Полагая в (13) $k = -m, -m+1 \dots -1$ и $k = 1, 2 \dots s$ и решая две полученные системы m и s разностных уравнений относительно полиномов $L_j(\omega)$, $-m \leq j \leq 0$ и соответственно $L_k(\omega)$, $0 \leq k \leq s$ как самостоятельные, приходим к следующим выражениям этих полиномов:

$$L_j = L^j R_j^{(s)} A, \quad 0 \leq j \leq s, \quad (14)$$

$$L_{-k} = U^k R_k^{(m)} B, \quad 0 \leq k \leq m, \quad (15)$$

где A и B – произвольные полиномы, а функции $R_j^{(s)}$ и $R_j^{(m)}$ задаются формулами, получаемыми из (12) заменой l на s и, соответственно, на m .

Формулы (14), (15) показывают, что для полинома L_0 имеют место два представления:

$$L_0 = R_0^{(s)} A \quad \text{и} \quad L_0 = R_0^{(m)} B,$$

сравнение которых приводит к единой формуле для этого полинома $L_0 = R_0^{(s)} \tilde{R}_0^{(m)} N$.

$$\text{Здесь } \tilde{R}_j^{(s)} = R_j^{(s)} b, \quad \tilde{R}_j^{(m)} = R_j^{(m)} b, \quad (16)$$

а $N = N(\omega)$ – некоторый полином, связанный с полиномами A и B соотношениями:

$$A(\omega) = \tilde{R}_0^{(m)} N(\omega), \quad B(\omega) = \tilde{R}_0^{(s)} N(\omega).$$

Используя эти соотношения, а также выражения (14)–(16), из формулы $UL_1 + VL_0 + LL_{-1} = M$ в результате несложных вычислений получаем следующий вид полинома $M(\omega)$:

$$M(\omega) = (-1)^{m+s} \left(|Q_1|^{2(m+s+2)} - |Q_0|^{2(m+s+2)} \right) N(\omega). \quad (17)$$

Ниже будет показано, что если положить в формуле (17) $N(\omega) \equiv 1$, то это не повлияет на соблюдение всех требований 1–3. В таком случае функция $M(\omega)$ будет представлять собой полином $2(m+s+2)q_0$ -й степени.

Следствием приведенных выше рассуждений является окончательный вид функций $\Phi_{\tau,T}(\omega)$ и $\Psi_{\tau,T}(\omega)$:

$$\Phi_{\tau,T}(\omega) = \frac{\chi_1(\omega) + e^{i\omega T} \chi_2(\omega)}{M(\omega) M_0(\omega) |Q(\omega)|^2} + \frac{\chi_3(\omega) + e^{i\omega T} \chi_4(\omega)}{M(\omega)}; \quad (18)$$

$$\Psi_{\tau,T}(\omega) = \frac{e^{i\omega T} \Theta(\omega) |Q(\omega)|^2}{M(\omega)} - \frac{\Gamma(\omega)}{M(\omega) M_0(\omega)}, \quad (19)$$

где $\chi_1(\omega) = W_0 U e^{-i\omega g} + W_0 V + W_1 U + Z_l U e^{i\omega[T-(l+1)g]}$; $\chi_2(\omega) = W_l L e^{i\omega[(l+1)g-T]} + Z_0 L e^{i\omega g} + Z_0 V + Z_1 L$;

$$\chi_3(\omega) = L_{-m} U e^{i\omega[\tau-(m+1)g]}; \quad \chi_4(\omega) = L_s L e^{i\omega[(s+1)g-T+\tau]}; \quad \Theta(\omega) = \sum_{k=-m}^s L_k(\omega) e^{i\omega k g};$$

$$\Gamma(\omega) = \sum_{k=0}^l W_k(\omega) e^{i\omega k g} + e^{i\omega T} \sum_{k=0}^l Z_k(\omega) e^{-i\omega k g},$$

а полиномы $W_k(\omega)$ и $Z_k(\omega)$, $0 \leq k \leq l$, $-m \leq j \leq s$ задаются формулами (10)–(12), (14), (15).

Рассмотрим теперь вопрос о том, к каким условиям приводят требования 2а), 1б) и 1в), то есть выведем условия того, что функция $\Psi_{\tau,T}(\omega)$ является целой, а функции $\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\omega)$ и $\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\omega)$ – аналитическими в нижней и соответственно верхней полуплоскостях.

Примем во внимание следующее: формулы (18) и (19) показывают, что если выписать все условия, обеспечивающие выполнение требований 2а), 1б) и 1в), то получится система линейных алгебраических уравнений $4(m+s+2)q_0 + 2\alpha + 2m_0$ -го порядка (α – степень полинома $M_0(\omega)$) относительно неизвестных коэффициентов полиномов $C_1(\omega)$ и $C_2(\omega)$. Для того, чтобы коэффициенты полиномов $C_1(\omega)$ и $C_2(\omega)$ определялись из полученной системы однозначно, степени этих полиномов следует положить равными $2(m+s+2)q_0 + \alpha + m_0 - 1$, что, во-первых, превысит границу, устанавливаемую 3-м условием, и, во-вторых, воспрепятствует соблюдению требований, наложенных на порядок убывания функций $\Psi_{\tau,T}(\omega)$ и $e^{-i\omega T} \Psi_{\tau,T}(\omega)$ при $|\omega| \rightarrow \infty$ в соответствующих полуплоскостях

(требование 2б). Из этих рассуждений следует, что полином $M_0(\omega)$ следует подбирать таким образом, чтобы в определяемых этим полиномом условиях аналитичности функций $\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\omega)$ и $\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\omega)$ в соответствующих полуплоскостях обеспечивали бы одновременно и выполнение требования 2а) в α корнях этого полинома, либо, наоборот, из условий, обеспечивающих соблюдение требования 2а) в α корнях $M_0(\omega)$, следовало бы и выполнение требований 1б) и 1в). Последнего можно добиться, принимая в качестве $M_0(\omega)$ произведение функций:

$$M_0(\omega) = R_0^{(l)} \cdot [LUR_1^{(l)} + VR_0^{(l)}], \quad (20)$$

где полиномы $R_j^{(l)} = R_j^{(l)}(\omega)$, $j = 1, 2$ определяются формулой (12). Интересно отметить, что к тому же виду для $M_0(\omega)$ можно прийти, используя решение задачи экстраполяции по конечному прошлому [12].

Покажем, что такой выбор полинома $M_0(\omega)$ действительно настолько удачен, что обращение в нуль функций $\chi_1(\omega)$ и $\chi_2(\omega)$, фигурирующих в (18), в корнях этого полинома из нижней и, соответственно, верхней полуплоскости, повлечет за собой обращение в нуль $\Gamma(\omega)$ в тех же корнях.

Пусть α_j^+ , α_j^- , β_k^+ , β_k^- , ρ_r^+ , ρ_r^- – корни полиномов $R_0^{(l)}(\omega)$ $\tilde{R}^{(l)}(\omega) \equiv LUR_1^{(l)} + VR_0^{(l)}$ и, соответственно, $M(\omega)$, расположенные в верхней и нижней полуплоскостях. Тогда из формулы (18) с учетом формул (10)–(12), (17) нетрудно видеть, что условиями аналитичности функций $\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\omega)$ и $\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\omega)$ в нижней и, соответственно, верхней полуплоскостях являются следующие равенства:

$$\left[W_0 + Z_l e^{i\omega(T-lg)} \right]_{\omega=\beta_k^-} = 0. \quad (21)$$

$$\left[W_1 + Z_l e^{i\omega[T-(l+1)g]} \right]_{\omega=\alpha_j^-} = 0. \quad (22)$$

$$\chi_1(\rho_r^-) + \chi_3(\rho_r^-) M_0(\rho_r^-) \left| Q(\rho_r^-) \right|^2 = 0. \quad (23)$$

$$\chi_1(\bar{a}_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_0. \quad (24)$$

$$\left[W_l e^{i\omega(lg-T)} + Z_0 \right]_{\omega=\beta_k^+} = 0. \quad (25)$$

$$\left[W_l e^{i\omega[(l+1)g-T]} + Z_1 \right]_{\omega=\alpha_k^+} = 0. \quad (26)$$

$$\chi_2(\rho_r^+) + \chi_4(\rho_r^+) M_0(\rho_r^+) \left| Q(\rho_r^+) \right|^2 = 0. \quad (27)$$

$$\chi_4(a_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_0. \quad (28)$$

Формула (19) показывает, что равенства

$$\Gamma(\beta_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, (2l+2)q_0; \quad \Gamma(\alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2 \cdot l \cdot q_0;$$

$$\left[e^{i\omega\tau} \left| Q(\omega) \right|^2 \Theta(\omega) M_0(\omega) - \Gamma(\omega) \right]_{\omega=\rho_r} = 0; \quad r = 1, 2, \dots, 2q_0(m+s+2) \quad (29)$$

достаточны для того, чтобы функция $\Psi_{\tau,T}(\omega)$ была целой.

Докажем, наконец, основное положение настоящей работы, заключающееся в том, что из условий (21), (22), (25), (26) следуют соответственно равенства:

$$\Gamma(\beta_k^-) = 0, \quad \Gamma(\alpha_k^-) = 0, \quad \Gamma(\beta_k^+) = 0, \quad \Gamma(\alpha_k^+) = 0.$$

Доказательства этих равенств очень похожи. Покажем, как методом математической индукции получается одно из них. Установим, например, справедливость равенств $\Gamma(\beta_k^-) = 0$ при условии, что имеют место равенства (21). С этой целью докажем сначала следующее утверждение: равенства

$$\left[W_j + Z_{l-j} e^{i\omega(T-lg)} \right]_{\omega=\beta_k^-} = 0 \quad (30)$$

следуют из условий (21) при любом $0 \leq j \leq l$.

При $j = 0$ утверждение справедливо в силу (21).

Далее, поскольку $W_0V + W_1U = \tilde{R}^{(l)}C_1$, то $(W_0V + W_1U)_{\omega=\beta_k^-} = 0$.

Складывая это равенство с последним уравнением системы (9), умноженным на $e^{i\omega(T-lg)}$, и полагая в полученном выражении $\omega = \beta_k^-$, с учетом (21) получим (30) для $j = 1$.

Выдвинем индуктивное предположение: равенства (30) справедливы при всех $j = 0, 1, 2, \dots, s - 1$. Докажем, что тогда (30) имеет место и при $j = s$. Для этого умножаем $l - s + 1$ -е уравнение системы (9) на $e^{i\omega(T-lg)}$ и складываем с $s - 1$ -м уравнением системы (8).

Полагая в полученном выражении $\omega = \beta_k^-$ и принимая во внимание введенное предположение индукции, установим справедливость равенств (30) и при $j = s$. Итак, было найдено, что из условий (21) следует равенство (30) при всех $0 \leq j \leq l$. Для завершения доказательства равенств $\Gamma(\beta_k^-) = 0$ теперь достаточно сгруппировать попарно слагаемые функции $\Gamma(\omega)$ следующим образом: $\Gamma(\omega) = \sum_{j=0}^l [W_j + Z_{l-j} e^{i\omega(T-lg)}] \cdot e^{i\omega jg}$ и воспользоваться равенствами (30).

Подводя итог исследованиям, приходим к выводу: общее число условий, обеспечивающих выполнение требований 2а), 1б) и 1в), равно $2m_0 + 2q_0(2l + 1) + 4q_0(m + s + 2)$ и, следовательно, степени полиномов $C_1(\omega)$ и $C_2(\omega)$ нужно положить равными $m_0 + 2q_0(m + s + 2) + q_0(2l + 1) - 1$. Нетрудно проверить, что такой выбор степеней полиномов $C_1(\omega)$ и $C_2(\omega)$ обеспечит соблюдение всех оставшихся требований 1–3 (именно 2б и 3).

Формулы (10)–(12), (14)–(20) дают возможность понять форму оператора интерполирования. Если

$$r_1 = \max \{0; q_1 - m_0 - 1\}, r_2 = \max \{0; 2q_1 - q_0 - m_0 - 1\}, r_3 = \max \{0; l(q_1 - q_0) + q_1 - 1\},$$

тогда в силу условия $q_0 \geq q_k, k = 1, 2, \dots, n$ из формул (10), (14)–(20) следует, что наилучший линейный интерполятор будет представляться в виде суммы двух интегралов, распространенных по полупрямым $s \geq t + T, s \leq t$, сложенной с линейной комбинацией значений процесса $\xi(s)$ и всех его производных до r_1 -го порядка включительно в моменты $t - g, t + T - g$, до r_2 -го порядка в моменты $t, t + T$ и до r_3 -го порядка включительно в моменты $t + T - (l + 1)g, t + (l + 1)g$. В случае $q_0 = q_1$ в интерполяционную формулу войдет также линейная комбинация значений процесса времени в моменты $t + \tau - (m + 1)g, t + (s + 1)g + \tau$. Подобный вывод аналогичного заключения также приводится в работах авторов [14, 15].

На основе вышевыведенных формул авторами разработан алгоритм расчета числовых значений оптимального интерполятора в зависимости от значений его ключевых параметров T и τ . Алгоритм реализован на языке программирования Python в среде Jupyter Notebook с привлечением библиотек NumPy, SciPy, Matplotlib.

Численный эксперимент проводился на L-марковском процессе с квазирациональной спектральной плотностью вида

$$S(\omega) = 1/|Q_0(\omega) + Q_1(\omega)e^{-i\omega g}|^2 = 1/|\omega + i\sqrt{3}/2 + (\omega + i\sqrt{5}/2)e^{-i\omega g}|^2. \quad (31)$$

На основе формулы (18) для спектральной характеристики интерполирования $\Phi_{\tau, \omega}(\omega)$ была выписана формула для $\Phi_{\tau, T}(\omega)$ для L-марковского процесса со спектральной плотностью:

$$\begin{aligned} \Phi_{\tau, \omega}(\omega) &= \frac{U^2 e^{i\omega(\tau-2g)}}{V^2 - LU} + \frac{C_1(\omega)}{V} + \frac{UC_1(\omega)e^{-i\omega g}}{V^2 - LU} - \frac{U^2 C_2(\omega)e^{i\omega(T-2g)}}{V(V^2 - LU)} + \\ &+ e^{i\omega T} \left[-\frac{LVe^{i\omega(g+\tau-T)}}{V^2 - LU} + \frac{C_2(\omega)}{V} - \frac{L^2 C_1(\omega)e^{i\omega(2g-T)}}{V(V^2 - LU)} + \frac{LC_2(\omega)e^{i\omega g}}{V^2 - LU} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^4 FF_k e^{i\omega\phi_k} + e^{i\omega T} \sum_{k=5}^8 FF_k e^{i\omega\phi_k} = \Phi_{\tau, T}^{(1)}(\omega) + e^{i\omega T} \cdot \Phi_{\tau, T}^{(2)}(\omega), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\text{где } U = \bar{Q}_0(\omega) \cdot Q_1(\omega) = \omega^2 + \left[i\omega(\sqrt{5} - \sqrt{3})/2 \right] + \sqrt{15}/4,$$

$$L = Q_0(\omega) \cdot \bar{Q}_1(\omega) = \omega^2 - \left[i\omega(\sqrt{5} - \sqrt{3})/2 \right] + \sqrt{15}/4,$$

$$V = |Q_0|^2 + |Q_1|^2 = 2\omega^2 + 2, \quad V^2 - LU = 3(\omega^4 + 2\omega^2 + 49/48),$$

$$\varphi_1 = \tau - 2g, \varphi_2 = 0, \varphi_3 = -g, \varphi_4 = T - 2g, \varphi_5 = g + \tau - T, \varphi_6 = 0, \varphi_7 = 2g - T, \varphi_8 = g.$$

Формула (32) выведена при 1) $T = 1; g = 1; 0 < \tau < 1$; 2) $T = 2; g = 1; 0 < \tau < 2$.

Аналитичность $\Phi_{\tau, T}^{(1)}(\omega)$ в H и $\Phi_{\tau, T}^{(2)}(\omega)$ в H^+ , а также целостность функции $\Psi_{\tau, T}(\omega)$ обеспечивается выполнением следующей системы шести линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} -L_1 e^{ig\omega_1} \cdot \sum_{k=0}^2 b_k \omega_1^k + V_1 e^{iT\omega_1} \cdot \sum_{k=0}^2 d_k \omega_1^k = V_1^2 e^{i\tau\omega_1} \\ -L_4 e^{ig\omega_4} \cdot \sum_{k=0}^2 b_k \omega_4^k + V_4 e^{iT\omega_4} \cdot \sum_{k=0}^2 d_k \omega_4^k = V_4^2 e^{i\tau\omega_4} \\ L_5 e^{i(2g-T)\omega_5} \cdot \sum_{k=0}^2 b_k \omega_5^k + U_5 \cdot \sum_{k=0}^2 d_k \omega_5^k = 0 \\ V_2 e^{ig\omega_2} \cdot \sum_{k=0}^2 b_k \omega_2^k - U_2 e^{iT\omega_2} \cdot \sum_{k=0}^2 d_k \omega_2^k = -U_2 \cdot V_2 e^{i\tau\omega_2} \\ V_3 e^{ig\omega_3} \cdot \sum_{k=0}^2 b_k \omega_3^k - U_3 e^{iT\omega_3} \cdot \sum_{k=0}^2 d_k \omega_3^k = -U_3 V_3 e^{i\tau\omega_3} \\ L_6 \cdot \sum_{k=0}^2 b_k \omega_6^k + U_6 e^{i(T-2g)\omega_6} \cdot \sum_{k=0}^2 d_k \omega_6^k = 0 \end{array} \right. \quad (33)$$

где $L_k = L(\omega = \omega_k)$, $U_k = U(\omega = \omega_k)$, $V_k = V(\omega = \omega_k)$, $k = 1, 2, \dots, 6$;

$$\omega_1 = \sqrt{-1 + i\sqrt{3}/12} \in H^+, \quad \omega_2 = -\sqrt{-1 + i\sqrt{3}/12} \in H^-, \quad \omega_3 = \sqrt{-1 - i\sqrt{3}/12} \in H^-,$$

$\omega_4 = -\sqrt{-1 - i\sqrt{3}/12} \in H^+$ – корни многочлена $V^2 - LU$, $\omega_5 = i \in H^+$, $\omega_6 = -i \in H^-$ – корни полинома V , а b_k и d_k , $k = 0, 1, 2$ – неизвестные коэффициенты многочленов 2-й степени

$$C_1(\omega) = b_2 \omega^2 + b_1 \omega + b_0 \quad \text{и} \quad C_2(\omega) = d_2 \omega^2 + d_1 \omega + d_0.$$

Оптимальный интерполятор получим, подставив в его спектральное представление (4) найденную спектральную характеристику:

$$\tilde{\xi}(t; T; \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \Phi_{\tau, T}(\omega) dZ(\omega) = \sum_{k=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} FF_k e^{i\omega(t+\varphi_k)} dZ(\omega) + \sum_{k=5}^8 \int_{-\infty}^{\infty} FF_k e^{i\omega(T+\varphi_k)} dZ(\omega). \quad (34)$$

Во всех восьми интегралах подынтегральные дробно-рациональные функции, представляющие собой неправильные рациональные дроби, превратим в правильные и разложим последние на простейшие дроби, подобно тому, как это делалось в работах авторов [13–15]. Применяя затем метод неопределенных коэффициентов, авторы обратили каждую из простейших дробей в каждом из восьми интегралов в несобственный интеграл вида $1/(\omega - \omega_k) = \int_0^{\infty} i e^{i\omega_k s} e^{-i\omega s} ds$. Результатом этих вычислений явилось представление каждого из восьми интегралов в формуле (34) через значения процесса в некоторые моменты времени:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(t; T; \tau) = & \sum_{j=1}^8 a_j \xi(z_j) + \sum_{j=1}^4 \sum_{r=1}^4 i \cdot \alpha_{jr} \int_0^{\infty} e^{-i\omega_r s} \xi(z_j - s) ds + \\ & + \sum_{j=5}^6 \sum_{r=1}^6 i \cdot \varepsilon_{jr} \int_0^{\infty} e^{-i\omega_r s} \xi(z_j - s) ds + \sum_{j=7}^8 \sum_{r=5}^6 i \cdot \Theta_{jr} \int_0^{\infty} e^{-i\omega_r s} \xi(z_j - s) ds, \end{aligned} \quad (35)$$

где $a_1 = 1/3$; $a_2 = b_2/3$; $a_3 = -2/3$; $a_4 = d_2/3$; $a_5 = -d_2/6$; $a_6 = -b_2/6$; $a_7 = b_2/2$;

$$a_8 = d_2/2; \alpha_{1j} = x_{1j}/3; \alpha_{2j} = (b_2 x_{2j})/3; \alpha_{3j} = -(2x_{3j})/3; \alpha_{4j} = x_{4j}/3; j = 1, 2, 3, 4;$$

$$\varepsilon_{5j} = -(d_2 x_{5j})/6; \varepsilon_{6j} = -(b_2 x_{6j})/6; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6; \Theta_{7j} = x_{7j}/2; \Theta_{8j} = x_{8j}/2; j = 5, 6;$$

$$z_1 = t + \tau - 2g; z_2 = t - g; z_3 = t + \tau + g; z_4 = t + g + T; z_5 = t + T - 2g; z_6 = t + 2g;$$

$$z_7 = t; z_8 = t + T.$$

В формуле (35) $x_{ij}, i = 1, 2, \dots, 8; j = 1, 2, \dots, 6$ – значения неопределенных коэффициентов при разложении вышеуказанных подынтегральных функций на простейшие дроби. Аналогичный подробный расчет x_{ij} проведен авторами в работах [13–15].

Ввиду того, что математическая формула для случайного процесса $\xi(u)$ неизвестна, вычисление интегралов вида $\int_0^\infty e^{-i\omega_j s} \xi(z_j - s) ds$ аналитическим путем невозможно. Однако по виду известной спектральной плотности (31) можно задать процесс $\xi(u)$ графически или таблично. Синусоидальный характер графика процесса $\xi(u)$ свидетельствует о целесообразности аппроксимации недостающей части графика тригонометрическим трендом с N гармониками вида

$$\xi_{теоретич}(u) = \hat{\xi}(u) = A_0 + \sum_{k=1}^N (A_k \cos ku + B_k \sin ku), \tag{36}$$

где коэффициенты A_0, A_k и $B_k, k = 1, 2, 3, \dots, N$ задаются по формулам:

$$A_0 = \sum_{j=0}^{r-1} \xi(u_j) / r, \quad A_k = \frac{2}{r} \sum_{j=0}^{r-1} \xi(u_j) \cos(ku_j), \quad B_k = \frac{2}{r} \sum_{j=0}^{r-1} \xi(u_j) \sin(ku_j),$$

$$COA(N) = \sqrt{\sum_{j=0}^{r-1} [\xi_{\phi АКТ}(u_j) - \hat{\xi}_{ТЕОР}(u_j)]^2} / r. \tag{37}$$

Варьируя число гармоник N , найдем то значение, при котором стандартизованная ошибка аппроксимации (COA) будет минимальной. Этим числом оказалось $N = 15$. Подставив в интегралы в формуле (35) вместо $\xi(z_j - s)$ формулы (36), (37) и вычислив интегралы от произведения тригонометрических и экспоненциальных функций, получим окончательную формулу для расчета числовых значений оптимального интерполятора:

$$\tilde{\xi}(t; T; \tau) = \sum_{j=1}^8 a_j \xi(z_j) + \sum_{j=1}^4 \sum_{r=1}^4 i \cdot \alpha_{jr} \Omega_{rjN} + \sum_{j=5}^6 \sum_{r=1}^6 i \cdot \varepsilon_{jr} \Omega_{rjN} + \sum_{j=7}^8 \sum_{r=5}^6 i \cdot \Theta_{jr} \Omega_{rjN} \tag{38}$$

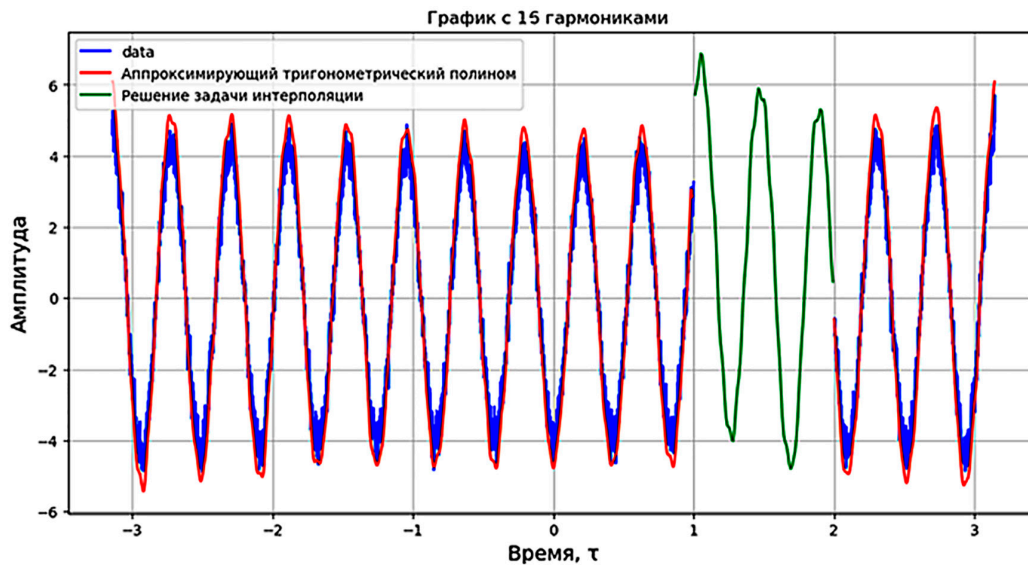
где $\Omega_{rjN} = \Omega_{rj15} = -\frac{A_0}{i\omega_j} + \sum_{k=1}^{15} A_k \frac{k \sin kz_r - i\omega_j \cos kz_r}{k^2 - \omega_j^2} + \sum_{k=1}^{15} B_k \frac{(-i\omega_j \sin kz_r - k \cos kz_r)}{k^2 - \omega_j^2}$.

Задав значения ключевых параметров τ и T , пользователь программы, составленной авторами, получит числовые значения оптимального интерполятора.

Например,

$$\tilde{\xi}(t; \tau; T) = \tilde{\xi}(0, 01; 0, 15; 1) = 2, 56 + 0, 00063i; \quad \tilde{\xi}(t; \tau; T) = \tilde{\xi}(0, 01; 1, 5; 2) = 5, 592 - 0, 0031i.$$

На рисунке изображен график процесса, аппроксимирующая его тригонометрическая функция и восстановленные данные на интервале $\tau \in (1; 2)$ при $T = 2, t = 0, 01$.



Фактические данные, аппроксимирующий тригонометрический тренд и интерполяционные данные исследуемого L-марковского процесса
Примечание: составлен авторами по результатам данного исследования

Из рисунка видим, что график построенного оптимального интерполятора при $1 < \tau < 2$ достаточно эффективно согласуется с графиком фактических данных исследуемого L-марковского процесса.

Заключение

Таким образом, в работе получена стохастическая модель оптимального оператора интерполяции для L-марковского процесса с квазирациональной спектральной плотностью. С привлечением метода математической индукции и теории разностных уравнений был определен вид многочленов, входящих в числитель и знаменатель спектральной характеристики интерполирования. Требования аналитичности функций, составляющих спектральную характеристику интерполяции, $\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\omega)$ и $\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\omega)$ в соответствующих полуплоскостях и целостности функции $\Psi_{\tau,T}(\omega)$ однозначно удовлетворяются решением системы линейных алгебраических уравнений.

Отличие от оптимального оператора интерполирования марковского процесса, который представляется в виде суммы значений процесса только в двух крайних точках интервала интерполирования, подобный оператор для исследуемого L-марковского процесса будет представляться линейной комбинацией значений исследуемого процесса и его производных в шести или более точках, что играет большую роль в точном восстановлении данных случайного процесса.

Подход, описанный в представленной работе, позволит детализированно восстанавливать пропущенные данные стохастических процессов с квазирациональным спектром, наблюдаемых в различных радиотехнических приложениях.

Список литературы

1. Батырев И. А., Воронцова О. Н. Интерполяция сигнала с помощью СИС-фильтра // Техника радиосвязи. 2018. Вып. 4 (39). С. 41–53.
2. Кокошкин А. В., Коротков В. А., Коротков К. В., Новичихин Е. П. Особенности интерполяции спектрально-ограниченных сигналов // Журнал Радиоэлектроники. 2017. № 6. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/jun17/6/text.pdf> (дата обращения: 1.04.2026).
3. Жирков В. Ф., Сушкова Л. Т., Королев А. И., Большаков К. Н., Обеднин А. А., Прокофьев Г. В. Полиномиальная интерполяция в цифровой обработке сигналов при высоких требованиях к точности // Журнал радиоэлектроники. 2017. № 4. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/apr17/5/text.pdf> (дата обращения: 01.04.2026).
4. Jiang H., Sun D., Jampani V., Yang M.-H., Learned-Miller E., Kautz J. Super SloMo: High Quality Estimation of Multiple Intermediate Frames for Video Interpolation, 2018. URL: https://openaccess.thecvf.com/content_cvpr_2018/papers_backup/Jiang_Super_SloMo_High_CVPR_2018_paper.pdf (дата обращения: 01.04.2026). DOI: 10.1109/CVPR.2018.00938.
5. Немцев Н. С., Гильмутдинов М. Р., Веселов А. И. Применение метода пространственной интерполяции в задаче синтеза промежуточных кадров видеопоследовательности // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2018. Т. 18. № 4. С. 623–629. DOI: 10.17586/2226-1494-2018-18-4-623-629.
6. Вайс С. Н., Липатов А. А., Репина М. В. Использование методов интерполяции при разработке тестовых данных для проверки устройства цифровой обработки радиолокационных сигналов // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2014. № 3. С. 49–52.
7. Ююкин И. В. Интерполяция навигационной функции сплайном лагранжева типа // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. 2020. Т. 12. № 1. С. 57–70. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-1-57-70.
8. Ромм Я. Е., Джанунц Г. А. Моделирование движения навигационных спутников системы ГЛОНАСС на основе кусочно-интерполяционного решения задачи Коши для дифференциальной системы // Современные наукоемкие технологии. 2023. № 2. С. 88–101. URL: <https://top-technologies.ru/ru/article/view?id=39529> (дата обращения: 01.04.2026). DOI: 10.17513/snt.39529.
9. Твердохлебов В. А. Методы интерполяции в техническом диагностировании // Проблемы управления. 2007. № 2. С. 28–34.
10. Yaglom A. M. An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions / Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Mineola, New York, 2004. 235 p.
11. Розанов Ю. А. Марковские случайные поля. М.: Наука, 1981. 256 с.
12. Фадеева Л. Ю. Построение стохастической модели линейного экстраполятора для L-марковского фрактального процесса // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Серия: Радиотехнические и инфокоммуникационные системы. 2025. № 1 (65). С. 46–54. DOI: 10.25686/2306-2819.2025.1.46.
13. Титов А. Н., Фадеева Л. Ю. Расчет числовых значений функционала – экстраполятора фрактального L-марковского процесса с квазирациональной спектральной плотностью // Инженерный вестник Дона. 2026. № 3. URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2026/10794> (дата обращения: 01.04.2026).
14. Фадеева Л. Ю., Титов А. Н. Построение математической модели и расчет численных значений оператора фильтрации с запаздыванием для L-марковского процесса // Инженерный вестник Дона. 2025. № 10. URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n10y2025/10462> (дата обращения: 01.04.2026).
15. Титов А. Н., Фадеева Л. Ю. Алгоритм реализации оптимального оператора фильтрации с прогнозом по его синтезированной математической модели для L-марковского процесса с квазирациональным спектром // Инженерный вестник Дона. 2025. № 10. URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n10y2025/10463> (дата обращения: 01.04.2026).

Конфликт интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest: The authors declare that there is no conflict of interest.

Финансирование: Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования.

Financing: The research was performed without external funding.