

УДК 517.958:531.332:534-14
DOI 10.17513/snt.40824



CC BY 4.0

ГРАНИЧНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ СТЕНКИ РЕАКТОРА ПИРОЛИЗА МЕТАНА

Колотилкина К. В. ORCID ID 0009-0003-0896-9510

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский государственный технический университет», Самара, Российская Федерация,
e-mail: xeniakolotilkina@yandex.ru*

Важной научной проблемой является разработка новых методов получения высокоточных аналитических решений сложных краевых задач математической физики, отличающихся универсальностью, простотой реализации и удобством для использования в инженерных приложениях. Целью работы является разработка метода получения аналитического решения высокой точности применительно к решению нестационарной задачи теплопроводности для керамической стенки жидкометаллического реактора пиролиза метана при несимметричных граничных условиях третьего рода. Искомое решение представляется в виде суммы двух функций, представляющих частное решение стационарной задачи с неоднородными граничными условиями и общее решение нестационарной задачи с однородными граничными условиями. С целью упрощения процесса получения решения нестационарной задачи используются дополнительные граничные условия, выполняемые в одной из граничных точек рассматриваемой области, что приводит к выполнению уравнения Штурма – Лиувилля и во всей области без необходимости его интегрирования по пространственной переменной. Собственные числа, определяемые из решения краевой задачи Штурма – Лиувилля, практически совпадают с точными их значениями. Приводится доказательство теоремы, подтверждающей выполнение уравнения во всей рассматриваемой области при его граничном выполнении. Найденное решение применено для расчета температуры керамической стенки жидкометаллического реактора пиролиза метана. Анализ результатов позволяет заключить, что на начальном участке времени прогрева реактора перепад температуры в стенке достигает величин, вызывающих термические напряжения, превышающие предел прочности для данного материала.

Ключевые слова: пиролиз, теплопроводность, неоднородные условия третьего рода, дополнительные граничные условия, задача Штурма – Лиувилля

BOUNDARY METHOD FOR ANALYSIS OF THE THERMAL STATE OF A METHANE PYROLYSIS REACTOR WALL

Kolotilkina K. V. ORCID ID 0009-0003-0896-9510

*Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
“Samara State Technical University”, Samara, Russian Federation,
e-mail: xeniakolotilkina@yandex.ru*

An important scientific problem is the development of new methods for obtaining high-accuracy analytical solutions to complex boundary value problems in mathematical physics, characterized by their universality, implementation simplicity, and convenience for engineering applications. The objective of this study is to develop a method for obtaining a high-accuracy analytical solution for a non-stationary heat conduction problem pertaining to the ceramic wall of a liquid-metal methane pyrolysis reactor under asymmetric third-kind boundary conditions. The sought solution is expressed as the sum of two functions: a particular solution to the steady-state problem with non-homogeneous boundary conditions and a general solution to the non-stationary problem with homogeneous boundary conditions. To simplify the solution process for the non-stationary problem, additional boundary conditions satisfied at one of the boundary points of the domain are employed, leading to the satisfaction of the Sturm – Liouville equation throughout the entire domain without the need for integration over the spatial variable. The eigenvalues derived from the solution of the Sturm – Liouville boundary value problem are in close agreement with their exact values. A theorem is proved confirming that satisfaction of the equation at the boundary implies its satisfaction throughout the entire domain under consideration. The obtained solution was applied to calculate the temperature of the ceramic wall in a liquid-metal methane pyrolysis reactor. Analysis of the results reveals that during the initial heating phase of the reactor, the temperature differential across the wall reaches magnitudes that induce thermal stresses exceeding the ultimate strength limit of the material.

Keywords: pyrolysis, heat conduction, non-homogeneous third-kind boundary conditions, Sturm – Liouville problem, additional boundary conditions

Введение

Перспективным методом экологичного и экономичного получения водорода является пиролиз (термическое разложение без доступа кислорода) метана в жидкометаллических средах (олово, висмут и др.). При его практическом применении важной проблемой является появление в керамическом реакторе, содержащем жидкий металл, дефектов в виде трещин, нарушающих его герметичность. Трещинообразование связано с температурными напряжениями, возникающими вследствие больших градиентов температур в процессе пусков и остановов реактора. Для выяснения причин их появления необходимо выполнить исследование температурного состояния реактора в указанных процессах. Решению в данном случае подлежит задача теплопроводности при несимметричных граничных условиях третьего рода. Ее точное аналитическое решение имеет вид бесконечного ряда, собственные числа которого находятся из трансцендентных уравнений, решаемых лишь численно. Получаемое в этом случае решение исходной задачи затруднительно применять для инженерных приложений. В настоящей работе для решения таких задач используется приближенный аналитический метод, практически эквивалентный точному, основанный на использовании дополнительных граничных условий. Основной проблемой, ограничивающей использование приближенных методов (Л. В. Канторовича, Галеркина, интегрального метода и др.), является недостаточная точность решений из-за ограничения числа приближений по причине плохой обусловленности матриц систем алгебраических уравнений [1, с. 101–117; 2, с. 114–125; 3]. Подобные системы возникают при определении неизвестных коэффициентов аналитических решений, принимаемых в форме алгебраических или тригонометрических полиномов с целью выполнения уравнения и краевых условий задачи. Универсальность приближенных методов состоит в выполнении не исходного дифференциального уравнения, а его осредненного аналога – интеграла теплового баланса, в связи с чем эти методы могут быть применены к задачам, решения которых классическими точными аналитическими методами (Фурье, интегральных преобразований и др.) не могут быть получены [4, с. 125–132; 5; 6].

В ряде работ [3; 4, с. 125–132; 5] для повышения точности приближенных методов используются дополнительные граничные условия (ДГУ), оказывающие определяющее влияние на обусловленность матриц, что связано со следующими обстоятельствами. До-

полнительные граничные условия приводят к выполнению уравнения в граничных точках [7–9]. В работах [4, с. 125–132; 5] (в результате доказательства теорем) утверждается, что выполнение уравнения на границах при большом числе ДГУ приводит к его выполнению и внутри области.

Используемые в указанных работах ДГУ выполняются при любом другом методе получения решения [10; 11], в том числе и в точных аналитических методах (в чем можно убедиться подстановкой соответствующих решений в ДГУ), однако в этих методах они не выделяются в качестве отдельного рассмотрения [12; 13]. Эффективность их использования, как будет показано ниже, связана с тем, что ДГУ представляются в виде производных высокого порядка от уравнения задачи Штурма – Лиувилля. Удовлетворение таких ДГУ в граничной точке $\xi = 0$ приводит к цепочным системам алгебраических линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов решений, в которых каждое уравнение содержит лишь одно неизвестное. Такие системы имеют сильно разреженные матрицы коэффициентов ленточного типа с минимальной шириной ленты, проблемы плохой обусловленности которых вообще не возникают. В отличие от [4, с. 125–132; 5], в настоящей работе доказательство теоремы связано с решением не исходного уравнения в частных производных, а уравнения краевой задачи Штурма – Лиувилля, дополнительные граничные условия для которого выполняются лишь в одной граничной точке $\xi = 0$.

Цель исследования – разработка метода получения высокоточного решения задачи теплопроводности для пластины с неоднородными условиями третьего рода путем использования ДГУ, приводящих к граничному выполнению уравнения, что обеспечивает его выполнение и внутри области, исключая интегрирование по пространственной координате.

Материалы и методы исследования

Найдем решение задачи теплопроводности для керамической стенки реактора пиролиза метана с несимметричными условиями третьего рода. Снаружи реактор омывается горячими газами печи – греющая среда, а внутри через слой расплавленного металла, находящего в начальном диапазоне времени в гранулированном состоянии, движется нагреваемый метан. Математическая постановка задачи:

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (\tau > 0; 0 < x < \delta); \quad (1)$$

$$t(x, 0) = t_0; \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} - \alpha_1 [t(0, \tau) - t_1] = 0; \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial t(\delta, \tau)}{\partial x} + \alpha_2 [t(\delta, \tau) - t_2] = 0, \quad (4)$$

где t, x, τ – температура, координата, время; t_0 – начальная температура; t_1 – температура горячих газов; t_2 – температура метана; α_1, α_2 – коэффициенты теплоотдачи; λ – коэффициент теплопроводности; a – коэффициент температуропроводности; δ – толщина стенки реактора.

Обозначим:

$$T(\xi, Fo) = \frac{t(x, \tau) - t_0}{t_2 - t_0}; \quad \xi = \frac{x}{\delta};$$

$$Fo = \frac{a\tau}{\delta^2}; \quad Bi_1 = \frac{\alpha_1 \delta}{\lambda}; \quad Bi_2 = \frac{\alpha_2 \delta}{\lambda},$$

где T, ξ, Fo – безразмерные температура, координата, время; Bi_1, Bi_2 – числа Био.

В безразмерном виде задача будет

$$\frac{\partial T(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T(\xi, Fo)}{\partial \xi^2}; \quad (Fo > 0; 0 < \xi < 1); \quad (5)$$

$$T(\xi, 0) = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial T(0, Fo)}{\partial \xi} - Bi_1 [T(0, Fo) + D] = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial T(1, Fo)}{\partial \xi} + Bi_2 [T(1, Fo) - 1] = 0, \quad (8)$$

где $D = (t_0 - t_1) / (t_2 - t_0)$.

Будем искать решение задачи (5)–(8) в виде

$$T(\xi, Fo) = T_c(\xi) + \Theta(\xi, Fo), \quad (9)$$

где $T_c(\xi)$ – решение стационарной задачи с неоднородными условиями (7), (8), $\Theta(\xi, Fo)$ – решение нестационарной задачи с соответствующими однородными условиями.

Математическая постановка стационарной задачи

$$\frac{\partial^2 T_c(\xi)}{\partial \xi^2} = 0; \quad (0 < \xi < 1); \quad (10)$$

$$\frac{\partial T_c(0)}{\partial \xi} - Bi_1 [T_c(0) + D] = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial T_c(1)}{\partial \xi} - Bi_2 [T_c(1) - 1] = 0. \quad (12)$$

Решение задачи (10)–(12) представим в виде

$$T_c(\xi) = F_1 + F_2 \xi, \quad (13)$$

где F_1, F_2 – постоянные, определяемые из условий (11), (12) и имеющие вид (при $T_1 = T_0$)

$$F_1 = Bi_2 / (Bi_1 + Bi_2 + Bi_1 Bi_2),$$

$$F_2 = F_1 Bi_1. \quad (14)$$

Аналитическое решение стационарной задачи (10)–(12), удовлетворяющее уравнению (10) и условиям (11), (12), принимает вид

$$T_c(\xi) = \frac{Bi_2}{Bi_1 + Bi_2 + Bi_1 Bi_2} (1 + Bi_1 \xi). \quad (15)$$

Математическая постановка нестационарной задачи

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2}; \quad (Fo > 0; 0 < \xi < 1); \quad (16)$$

$$\Theta(\xi, Fo) = T(\xi, 0) - T_c(\xi) = -T_c(\xi); \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} - Bi_1 \Theta(0, Fo) = 0; \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \xi} - Bi_2 \Theta(1, Fo) = 0. \quad (19)$$

Решение задачи (16)–(19) примем в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \phi(Fo) \psi(\xi), \quad (20)$$

где функции $\phi(Fo)$ и $\psi(\xi)$ находятся из решения следующих обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемых после подстановки (20) в (16)

$$\frac{d\phi(Fo)}{dFo} + \mu \phi(Fo) = 0; \quad (21)$$

$$\frac{d^2 \psi(\xi)}{d\xi^2} + \mu \psi(\xi) = 0, \quad (22)$$

где μ – постоянная.

Интегрируя уравнение (21), находим

$$\phi(Fo) = A \exp(-\mu Fo), \quad (23)$$

где A – постоянная интегрирования.

Граничные условия для функции $\psi(\xi)$ находим путем подстановки (20) в (18), (19)

$$\frac{d\psi(0)}{d\xi} - Bi_1 \psi(0) = 0; \quad (24)$$

$$\frac{d\psi(1)}{d\xi} - Bi_2 \psi(1) = 0. \quad (25)$$

Соотношения (22), (24), (25) представляют краевую задачу Штурма – Лиувилля. Ее решение принимается в виде

$$\psi(\xi) = \sum_{k=0}^n b_k(\mu) \xi^k, \quad (26)$$

где $b_k(\mu)$ – неизвестные коэффициенты.

Для определения постоянных $b_k(\mu)$, ($k = 0, n$) используются основные (24), (25) и ДГУ, определяемые путем выполнения искомого решением (26) уравнения (22) и соотношений, полученных после определения производных от него различного порядка, в точке $\xi = 0$. Любое число таких условий можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi(0)}{d\xi^2} + \mu\psi(0) &= 0; \\ \frac{d^3\psi(0)}{d\xi^3} + \mu \frac{d\psi(0)}{d\xi} &= 0; \\ \frac{d^4\psi(0)}{d\xi^4} + \mu \frac{d^2\psi(0)}{d\xi^2} &= 0; \\ \dots\dots\dots & \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя (26) (например, при $n = 48$), в граничное условие (24) и в 48 дополнительных граничных условий вида (27), для нахождения $b_k(\mu)$, ($k = 0, 1, 2, \dots, 48$) получаем систему 49 алгебраических линейных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} b_1 - Vi_1 b_0 &= 0; \\ 2b_2 + \mu b_0 &= 0; \\ 6b_3 - \mu b_1 &= 0; \\ 12b_4 + \mu b_2 &= 0; \\ 20b_5 + \mu b_3 &= 0; \\ 30b_6 + \mu b_4 &= 0; \\ 42b_7 + \mu b_5 &= 0; \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Анализ системы уравнений (28) позволяет заключить, что она имеет цепочный вид с сильно разреженной матрицей коэффициентов ленточного типа. Цепочность системы состоит в том, что неизвестные $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_{48}$ находятся из последовательного решения одного алгебраического уравнения с одним неизвестным. Положив в (28) $b_0 = 1$, получаем следующие формулы для определения $b_k(\mu)$, ($k = 0, 1, 2, \dots, 48$):

$$b_0 = 1; b_1 = Vi_1; b_2 = -\mu / 2; b_3 = -\mu Vi_1 / 6;$$

$$b_4 = \mu^2 / 24; b_5 = \mu^2 Vi_1 / 120;$$

$$b_6 = -\mu^3 / 720; b_7 = -\mu^3 Vi_1 / 5040;$$

$$b_8 = \mu^4 / 40320; \dots\dots\dots \quad (29)$$

При известных $b_k(\mu)$, ($k = 0, 1, 2, \dots, 48$) собственные функции находятся из соотношения (26), принимающего вид

$$\psi(\mu, \xi) = 1 + \sum_{k=1}^{48} b_k(\mu) \xi^k. \quad (30)$$

Соотношение (30) удовлетворяет граничному условию (24), уравнению (22) и 46 соотношениям, полученным после нахождения производных от него, в точке $\xi = 0$. Однако оно не удовлетворяет граничному условию (25). Подставляя (30) в (25) (положив $Vi_1 = 3; Vi_2 = 2$), относительно μ получаем алгебраический полином 24-й степени. Из 24 корней полинома 6 корней выражаются действительными числами и 16 корней являются самосопряженными комплексными. Действительные корни полинома следующие:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 3,4043; \mu_2 = 17,684; \mu_3 = 48,569; \\ \mu_4 &= 98,357; \mu_5 = 167,63; \\ \mu_6 &= 256,24; \mu_7 = 493,85. \end{aligned} \quad (31)$$

Точные значения первых шести собственных чисел имеют вид [14, с. 40–70]:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 3,4040; \mu_2 = 17,682; \\ \mu_3 &= 48,567; \mu_4 = 98,346; \\ \mu_5 &= 167,65; \mu_6 = 256,544. \end{aligned}$$

Учитывая, что уравнение Штурма – Лиувилля выполняется лишь при дискретных значениях μ_k (собственных значениях), комплексные корни, как не имеющие физического смысла, не используются. Отмечается высокая точность определения собственных чисел, отличающихся от точных их значений лишь в первом – четвертом знаке после запятой.

Для сравнения рассмотрим еще один метод определения собственных чисел, известный как метод неопределенных коэффициентов. Подставляя (26) в (22), (24) и группируя слагаемые при одинаковых степенях ξ , получаем алгебраические уравнения относительно $b_k(\mu)$, ($k = 0, 1, 2, \dots, 48$). Определяемые из их решения коэффициенты b_k полностью совпадают с соотношениями (29). Собственные числа, как и выше, находятся из условия (25), и они полностью совпадают с их значениями вида (31). Следовательно, два рассмотренных метода определения собственных чисел эквивалентны.

Следует, однако, отметить, что первый метод является более простым и универсальным ввиду того, что уравнение краевой задачи Штурма – Лиувилля и соотношения для производных от него различного порядка выполняются лишь в одной граничной точке $\xi = 0$. В связи с этим он может быть применен к решению задач с переменными физическими свойствами, с источниками теплоты и др., для которых применение второго метода затруднительно.

Докажем следующую **теорему**: *если неизвестные функции b_k соотношения (26) найдутся из выполнения уравнения (22) и соотношений, полученных после взятия производных от него, в граничной точке $\xi = 0$, то при большом числе приближений это уравнение будет выполняться во всей области изменения переменной $0 \leq \xi \leq 1$.*

Для **доказательства** теоремы потребуем, чтобы решение (26) удовлетворяло

$$2b_2 + 6b_3\xi + 12b_4\xi^2 + 20b_5\xi^3 + \dots + \mu(b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3 + \dots) = 0. \quad (34)$$

Подставляя (26) в (22) (без привязки к конкретному значению ξ), получаем соотношение, полностью совпадающее с (34) и, следовательно, сформулированная выше теорема доказана. Отметим, что, в отличие от работы [3], здесь не требуется выполнения интеграла теплового баланса – осредненного по координате ξ уравнения (22).

Подставляя (23), (30) в (20), получаем

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{n=1}^8 \left[A_n \exp(-\mu_n Fo) \left(1 + \sum_{k=1}^{48} b_k(\mu) \xi^k \right) \right]. \quad (35)$$

Для определения постоянных A_n составим невязку начального условия (17) и потребуем выполнения ее ортогональности к каждой собственной функции $\psi_i(\xi)$, ($i = n = 1, 2, 3, \dots, 8$)

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^8 \left[A_n \left(1 + \sum_{k=1}^{48} b_k(\mu) \xi^k \right) + T_c(\xi) \right] \psi_i(\xi) d\xi = 0. \quad (36)$$

Соотношение (36) представляет систему восьми алгебраических линейных уравнений, относительно такого же количества неизвестных постоянных A_n .

Подставляя (15), (35) в (9), получаем решение задачи (5)–(8)

$$T(\xi, Fo) = \frac{Bi_2(1 + Bi_1\xi)}{Bi_1 + Bi_2 + Bi_1Bi_2} + \sum_{n=1}^8 \left[A_n e^{-\mu_n Fo} \left(1 + \sum_{k=1}^{48} b_k(\mu) \xi^k \right) \right]. \quad (37)$$

Значения безразмерных температур, найденных по формуле (37), в сравнении с точным решением [14, с. 40–70] даны на рисунке. Видно, что для $Fo \geq 0,0001$ они практически одинаковы.

Таким образом, в статье применен метод разделения переменных (метод Фурье). Получаемая при этом краевая задача Штурма – Лиувилля решается методом, предложенным авторами статьи. В ходе его реализации возникает необходимость решения систем алгебраических линейных уравнений и степенного алгебраического полинома. Их решение выполняется с использованием стандартных программных пакетов

уравнению (22) и соотношениям, полученным после взятия k -х производных от него, в точке $\xi = 0$, то есть

$$\frac{d^k}{d\xi^k} \left(\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \mu\Psi \right)_{\xi=0} = 0, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (32)$$

При $k = 0$ соотношение (33) приводится к уравнению (22). При $k = 1, 2, 3, \dots$ оно представляет соотношения для производных различного порядка от уравнения (22). Подставляя (26) в (32), положив $\xi = 0$, для каждого k имеем следующие алгебраические уравнения для коэффициентов b_k , ($k = 0, n$).

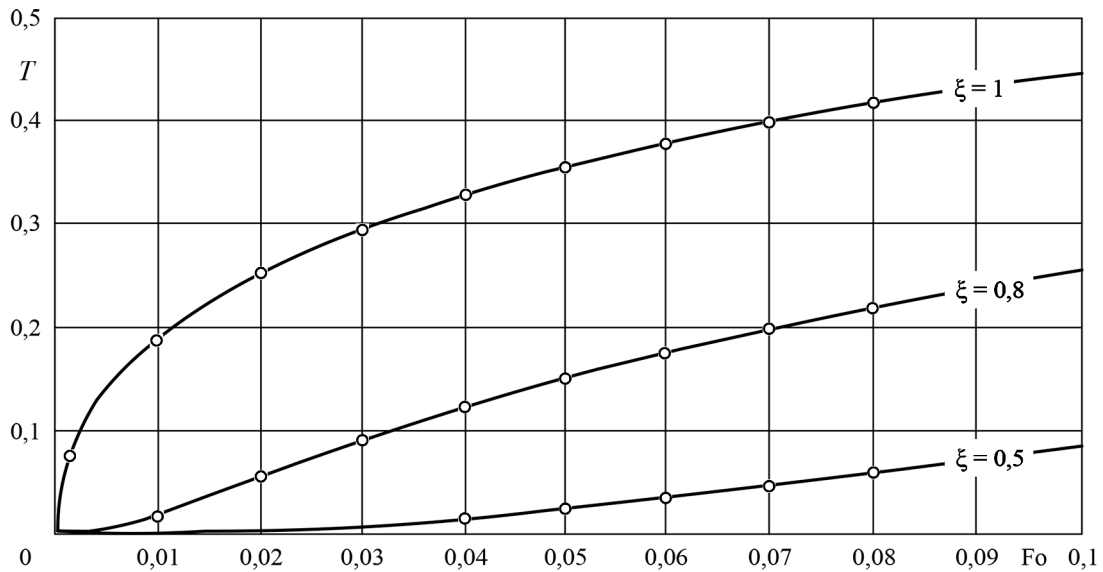
$$\begin{aligned} \mu + 2b_2 = 0; \quad \mu b_1 + 6b_3 = 0; \\ \mu b_2 + 12b_4 = 0; \quad \mu b_3 + 20b_5 = 0; \quad \dots \end{aligned} \quad (33)$$

Умножая (33) последовательно на ξ^k , ($k = 0, n$) и суммируя полученные соотношения, находим

системы компьютерной алгебры MathCAD 15.0. Отсутствие в работе экспериментальных данных объясняется тем, что достоверность полученных в статье результатов подтверждена сравнением с известным точным аналитическим решением [14, с. 40–70].

Выполним исследование полученного решения для реальной конструкции керамической стенки реактора пиролиза метана при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} t_0 = 20^\circ\text{C}; \quad t_1 = 20^\circ\text{C}; \quad t_2 = 1000^\circ\text{C}; \\ \delta = 0,05 \text{ м}; \quad \lambda = 1 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}; \quad a = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \\ \alpha_1 = 60 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}; \quad \alpha_2 = 40 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}. \end{aligned}$$



Распределение температуры: — — точное решение [14]; ○ — по формуле (37); $Bi_1 = 3$; $Bi_2 = 2$
Примечание: составлен авторами по результатам данного исследования

Будем рассматривать процесс теплообмена до момента времени, когда метан остается при начальной температуре, то есть прогревается только стенка.

Из анализа графиков рисунка следует, что максимальный перепад температуры на прогретой части стенки в диапазоне $0,5 \leq \xi \leq 1$ при $Fo = 0,03$ ($\tau = 50$ сек) составляет $\Delta\Theta = 0,28$ ($\Delta t = 294^\circ\text{C}$).

Оценка температурных напряжений растяжения, найденных по приближенной формуле для тонкой стенки [15, с. 23–54]

$$\sigma = \frac{\beta E \Delta t}{1 - \nu}, \quad (38)$$

приводит к величине $\sigma = 78,4$ кг/мм², что значительно превышает предел прочности для данного материала. В формуле (38) обозначено: $\beta = 0,00001/\text{K}$ – коэффициент линейного расширения; $E = 20000$ кг/мм² – модуль упругости; $\nu = 0,25$ – коэффициент Пуассона.

Кроме того, на участке времени $0 \leq Fo \leq 0,01$ отмечается высокий темп прогрева, когда температура стенки при $\xi = 1$ возрастает от 20°C до $176,4^\circ\text{C}$ за время $\Delta t = 37,5$ сек. Столь быстрый прогрев приводит к большим значениям динамических температурных напряжений, которые также могут быть причиной появления дефектов в керамической стенке реактора пиролиза метана.

Результаты исследования и их обсуждение

Анализ результатов приводит к заключению, что ДГУ являются эффективным

средством получения аналитического решения задачи теплопроводности для пластины с несимметричными условиями третьего рода. С целью теоретического обоснования полученных расчетным путем результатов приведено доказательство теоремы, по которой граничное выполнение уравнения эквивалентно его выполнению внутри рассматриваемой области. Анализируя полученные результаты, можно заключить, что научной новизной статьи является разработка методики получения высокоточного аналитического решения третьей краевой задачи, отличающееся от известных тем, что благодаря применению дополнительных граничных условий, выполняемых лишь в одной граничной точке (центре симметрии пластины), дифференциальное уравнение краевой задачи Штурма – Лиувилля выполняется во всей области определения пространственной переменной ($0 \leq \xi \leq 1$), исключая необходимость его непосредственного интегрирования.

Выводы

1. Исследования полученного решения применительно к определению температурного состояния керамической стенки реактора пиролиза метана показали, что в диапазоне начального времени температурный перепад на стенке приводит к термическим напряжениям растяжения, превышающим предел прочности для данного материала. В этом же диапазоне времени отмечается высокий темп прогрева стенки (176°C за время $\Delta t = 37,5$ сек), что может приводить к динамическим напряжениям, также пре-

вышающим предел прочности для данного материала. Для предотвращения трещинообразования в стенке реактора пиролиза метана необходимо уменьшать интенсивность подвода теплоты от греющего агента за счет постепенного повышения температуры горячих газов.

2. Данный метод может быть применен к задачам теплопроводности для цилиндра и шара, задачам с переменными физическими свойствами среды и др. Получаемые таким путем решения для цилиндрических и сферических координат не содержат функции Бесселя.

Список литературы

1. Формалев В. Ф. Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М.: Физматлит, 2014. 309 с. [Электронный ресурс]. URL: <https://search.rsl.ru/record/01007869209> (дата обращения: 24.04.2026). ISBN 978-5-9221-1579-7.
2. Формалев В. Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. М.: Физматлит, 2015. 280 с. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.rubr.ru/library/books/2171/> (дата обращения: 24.04.2026). ISBN 978-5-9221-1624-4.
3. Кудинов В. А., Стефанюк Е. В., Назаренко С. А. Метод координатных функций в несимметричных задачах теплопроводности для многослойных конструкций // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2003. Вып. 19. С. 12–15. URL: <https://www.mathnet.ru/links/40aacc00a0c0709394988fd985edc306/vsgtu132.pdf> (дата обращения: 02.03.2026). DOI: 10.14498/vsgtu132.
4. Федоров Ф. М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000. 220 с. [Электронный ресурс]. URL: <https://search.rsl.ru/record/01000670276> (дата обращения: 25.02.2026). ISBN 5-02-031622-9.
5. Кудинов И. В., Котова Е. В., Кудинов В. А. Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомым функций // Сибирский журнал вычислительной математики. Новосибирск. 2019. Т. 22. № 2. С. 153–165. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/sjvm/v22/i2/p153> (дата обращения: 25.02.2026). DOI: 10.15372/SJNM20190203.
6. Pashchenko D., Eremin A. Heat flow inside a catalyst particle for steam methane reforming: CFD-modeling and analytical solution // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2021. Т. 165. С. 120617. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931020335535> (дата обращения: 28.02.2026). DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.120617.
7. Карташов Э. М. Оригиналы операционных изображений для обобщенных задач нестационарной теплопроводности // Тонкие химические технологии. 2019. Т. 14. № 4. С. 77–86. URL: <https://www.finechem-mirea.ru/jour/article/viewFile/1287/1329.pdf> (дата обращения: 24.04.2026).
8. Трубицын К. В. Метод дополнительных граничных условий в краевых задачах теплопроводности. Математическое моделирование и численные методы. 2025. № 2. С. 68–81. URL: <https://mmcm.bmstu.ru/articles/375/> (дата обращения: 03.03.2026). DOI: 10.18698/2309-3684-2025-2-6881.
9. Eremin A. V., Krasnova N. P. One Method of Heat Transfer Process Mathematical Modeling in Solids // 2019 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon). IEEE, 2019. P. 1–5. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/8933826> (дата обращения: 03.03.2026). DOI: 10.1109/FarEastCon.2019.8933826.
10. Sobolev S. L. Discrete space-time model for heat conduction: Application to size-dependent thermal conductivity in nano-films // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2017. Т. 108. С. 933–939. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931016334573> (дата обращения: 28.02.2026). DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.12.051.
11. Sobolev S. L. On hyperbolic heat-mass transfer equation // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2018. Т. 122. С. 629–630. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931017353759> (дата обращения: 28.02.2026). DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.02.022.
12. Карелин В. А., Саломатов В. В. Построение приближенных аналитических решений для модели переноса тепла в слое льда при СВЧ-облучении // Теплофизика и аэромеханика. 2023. Т. 30. № 6. С. 1189–1196. URL: <https://www.sibran.ru/upload/iblock/a7f/a7fb33b6c59497a68ac8155fd2878d04.pdf> (дата обращения: 25.02.2026).
13. Полянин А. Д., Сорокин В. Г., Вязьмин А. В. Точные решения и качественные особенности нелинейных гиперболических реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // Теоретические основы химической технологии. 2015. Т. 49. № 5. С. 527–541. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24045239> (дата обращения: 26.04.2026).
14. Григорьев Л. Я., Маньковский О. Н. Инженерные задачи нестационарного теплообмена. Л.: Энергия, 1968. 84 с. URL: <https://search.rsl.ru/record/01006095176> (дата обращения: 25.02.2026).
15. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с. [Электронный ресурс]. URL: https://books.totalarch.com/theory_of_elasticity_tymoshenko (дата обращения: 25.02.2026).

Конфликт интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest: The authors declare that there is no conflict of interest.

Финансирование: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSSE-2026-0003) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета.

Financing: The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. FSSE-2026-0003) as part of the state task of the Samara State Technical University.