

## МЕТОД БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В КОНТЕКСТЕ КЛАССИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ПАРАДИГМЕ НЕЛОКАЛЬНОСТИ

Дубровин А. С. ORCID ID 0000-0002-6338-5572, Сумин В. И., Кравченко А. С.

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова», Воронеж,  
Российская Федерация, e-mail: asd\_kiziltash@mail.ru*

Известные способы использования с применением современных компьютерных технологий эффективного вычислительного метода быстрых разложений в контексте классической математической физики относятся к парадигме локальности. В парадигме нелокальности возможности данного метода рассматривались в контексте классического гармонического системного анализа. Цель исследования – разработка способа использования эффективного вычислительного метода быстрых разложений в контексте классической математической физики в парадигме нелокальности с применением современных компьютерных технологий (посредством применения систем компьютерной алгебры и систем компьютерной математики для численных расчетов) путем подходящей адаптации этого метода к указанной парадигме. Искомый способ разработан на примере задачи Коши для системы двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. Методы исследования: вычислительный метод быстрых разложений, а также метод вычислительного эксперимента с применением системы Maple 2025. Вычислены параметры двух быстрых разложений, построены кривые. Их отклонение наглядно показывает тормозящее действие радиационного трения. Научная новизна: способ использования эффективного вычислительного метода быстрых разложений в контексте классической математической физики с применением современных компьютерных технологий (посредством применения систем компьютерной алгебры и систем компьютерной математики для численных расчетов), отличающийся от известных аналогов адаптацией этого метода к парадигме нелокальности на примере задачи Коши для системы двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка, описывающей прямолинейное взаимное удаление в вакууме двух одноименных точечных электрических зарядов с возможностью учета радиационного трения. Практическая значимость: полученные результаты могут быть использованы при математическом моделировании физических процессов в контексте классической математической физики в парадигме нелокальности с применением современных компьютерных технологий (посредством применения систем компьютерной алгебры и систем компьютерной математики для численных расчетов) для использования эффективного вычислительного метода быстрых разложений за счет подходящей адаптации этого метода к парадигме нелокальности.

**Ключевые слова:** метод быстрых разложений, классическая математическая физика, задача Коши, парадигма нелокальности, ряды Фурье

## FAST EXPANSIONS METHOD IN THE CONTEXT OF CLASSICAL MATHEMATICAL PHYSICS IN THE PARADIGM OF NONLOCALITY

Dubrovin A. S. ORCID ID 0000-0002-6338-5572, Sumin V. I., Kravchenko A. S.

*Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education  
“Voronezh State University of Forestry and Technologies Named after G. F. Morozov”,  
Voronezh, Russian Federation, e-mail: asd\_kiziltash@mail.ru*

Known applications of the efficient computational method of fast expansions in the context of classical mathematical physics, using modern computer technologies, relate to the locality paradigm. In the nonlocality paradigm, the capabilities of this method were considered in the context of classical harmonic systems analysis. The aim of this study is to develop a method for using the efficient computational method of fast expansions in the context of classical mathematical physics within the nonlocality paradigm using modern computer technologies (through the use of computer algebra systems and computer mathematics systems for numerical calculations) by appropriately adapting this method to this paradigm. The desired method was developed using the Cauchy problem for a system of two third-order ordinary nonlinear differential equations as an example. Research methods: the computational method of fast expansions, as well as a computational experiment using Maple 2025. The parameters of the two fast expansions were calculated, and curves were plotted. Their deviation clearly demonstrates the inhibitory effect of radiation friction. Scientific novelty: a method for using the efficient computational method of fast expansions in the context of classical mathematical physics using modern computer technologies (through the use of computer algebra systems and computer mathematics systems for numerical calculations). This method differs from known analogs by adapting this method to the nonlocality paradigm using the example of the Cauchy problem for a system of two ordinary nonlinear third-order differential equations describing the rectilinear mutual separation of two like-named point electric charges in a vacuum, with the ability to take into account radiation friction. Practical significance: The obtained results can be used in the mathematical modeling of physical processes in the context of classical mathematical physics within the nonlocality paradigm using modern computer technologies (through the use of computer algebra systems and computer mathematics systems for numerical calculations). This method is suitable for the application of the efficient computational method of fast expansions due to its appropriate adaptation to the nonlocality paradigm.

**Keywords:** fast expansion method, classical mathematical physics, Cauchy problem, nonlocality paradigm, Fourier series

**Введение**

В контексте классической математической физики применительно к решению краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений и их систем используется ряд эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий. Так, в [1] используется метод конечных интегральных преобразований, в [2] обсуждаются методы теории возмущений, вариационные методы, метод гомотопического возмущения, принцип максимума Понтрягина, используются метод энергетического баланса, метод Рунге – Кутты, в [3] исследуются метод Эйлера, метод Кранка – Николсон, метод Ньютона, метод линий.

Предложенный профессором А. Д. Чернышовым в [4] метод быстрых разложений занимает особое место в этом ряду в том смысле, что позволяет получить приближенное аналитическое решение краевой задачи в виде его разложения (так называемого быстрого разложения) в быстро сходящийся ряд по «удобным» для исследования функциям с возможностью многократного почленного дифференцирования. Быстрое разложение формируется на основе обычного ряда Фурье добавлением специальных членов (обычно полиномиальных), образующих так называемую граничную функцию, введение которой, как показано в [5], кардинально улучшает свойства ряда Фурье, в том числе скорость его сходимости. Данный метод успешно применялся в [6] для исследования некоторых математических моделей. Несмотря на достаточную универсальность метода, его применение к различным классам задач классической математической физики имеет свою специфику, обуславливающую необходимость разработки подходящего способа использования (надлежащей адаптации метода) с применением современных компьютерных технологий (посредством применения систем компьютерной алгебры и систем компьютерной математики для численных расчетов). Так, особенности применения при решении уравнений Навье – Стокса рассмотрены в [7], уравнения Пуассона – в [8]. В [9, 10] метод применялся к задачам деформируемого твердого тела. Особенности применения при решении задачи о диффузии рассмотрены в [11], задач теплопроводности – в [12, 13]. В [14, 15] метод применялся к моделированию полета космического корабля.

Эти и некоторые другие ранее разработанные способы использования эффективного вычислительного метода быстрых раз-

ложений в контексте классической математической физики с применением современных компьютерных технологий относятся к парадигме локальности, в которой физические взаимодействия, механические напряжения, потоки вещества и тепла распространяются локально. В парадигме же нелокальности взаимодействия имеют характер дальнего действия в смысле нелокальности, которое рассматривалось, например, в [16]. В этой парадигме возможности данного метода рассматривались в контексте классического гармонического системного анализа (одно из перспективных направлений системного анализа) в [17–19], но не в контексте классической математической физики.

**Цель исследования** – разработка способа использования эффективного вычислительного метода быстрых разложений в контексте классической математической физики в парадигме нелокальности с применением современных компьютерных технологий (посредством применения систем компьютерной алгебры и систем компьютерной математики для численных расчетов) путем подходящей адаптации этого метода к указанной парадигме.

**Материалы и методы исследования**

Методы исследования: вычислительный метод быстрых разложений, эффективный применительно к задачам классической математической физики, а также метод вычислительного эксперимента с применением Maple 2025 в качестве системы компьютерной алгебры и одновременно в качестве системы компьютерной математики для численных расчетов.

Показательный пример задачи классической математической физики в парадигме нелокальности – задача Коши:

$$(\theta_\alpha \ddot{s}_{\alpha\chi} - \chi \ddot{s}_{\alpha\chi})(s_{1\chi} + s_{2\chi})^2 = C_\alpha, \quad (1)$$

$$s_{\alpha\chi}(-\tau) = R_{0\alpha} > 0, \quad \dot{s}_{\alpha\chi}(-\tau) = R_{1\alpha} \geq 0, \quad (2)$$

$$\ddot{s}_{\alpha 1}(-\tau) = \xi_\alpha \ddot{s}_{\alpha 0}(-\tau) = R_{2\alpha} \geq 0, \quad (3)$$

где  $\alpha = \overline{1, 2}$ ,  $\chi = \overline{0, 1}$ ,  $s_{\alpha\chi} = s_{\alpha\chi}(t) > 0$ ,  
 $-\tau \leq t \leq \tau$ ,  $\tau > 0$ ,  $\theta_\alpha > 0$ ,  $C_\alpha > 0$ ,  $0 < \xi_\alpha < 1$ .

Естественная физическая интерпретация задачи (1)–(3) – прямолинейное с течением времени  $t \in [-\tau, \tau]$  в инерциальной системе отсчета (ИСО) взаимное удаление в вакууме двух одноименных точечных электрических зарядов с номерами  $\alpha$  (начало координат ИСО удобно выбрать так, что-

бы в начальный момент времени  $t = -\tau$  центр масс был в нем и имел нулевую скорость), где  $\theta_\alpha = 6\pi c^3 \varepsilon_0 m_\alpha / Q_\alpha^2$ ;  $C_\alpha = (3/2)\eta_\alpha$ ;  $\eta_\alpha = Q_{3-\alpha} / Q_\alpha$ ;  $\chi$  – индикатор радиационного трения ( $\chi = 1$ , если учитывается,  $\chi = 0$ , иначе);  $Q_\alpha > 0$ ,  $m_\alpha > 0$ ,  $s_{\alpha\chi}$  – абсолютная величина, масса точечного заряда  $\alpha$  и расстояние от него до начала координат с учетом  $\chi$ ;  $c$  – постоянная скорости света;  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная. Эта интерпретация соединяет закон Кулона, формулу Лоренца и второй закон Ньютона [17–19]. Она не содержит в явном виде ни физических полей, ни сплошных материальных сред, ни прочих материальных посредников взаимодействия, а потому взаимодействие не локально. Кроме того, (1) не содержит в явном виде запаздывания, а потому оно мгновенно. Выбор области определения  $[-\tau; \tau]$  функций  $s_{\alpha\chi}(t)$  не ограничивает общности рассмотрения и обусловлен удобством применения метода быстрых разложений для (1)–(3). Выбор ИСО накладывает ограничения на  $R_{\beta\alpha}$ ,  $\beta = \overline{0,1}$  в (2):

$$R_{\beta 1} m_1 = R_{\beta 2} m_2, \quad \beta = \overline{0,1}. \quad (4)$$

После введения инвариантных относительно выбора ИСО величины  $R_0 = R_{01} + R_{02}$  и скорости (подходящим выбором  $\tau$  удобно выбрать ее нулевой при  $t = -\tau$ )  $R_1 = R_{11} + R_{12}$  взаимного удаления зарядов условие (2) уточняется в силу (4) формулой

$$R_{\beta\alpha} = (m_{3-\alpha} / (m_1 + m_2)) R_\beta, \\ \alpha = \overline{1,2}, \quad \beta = \overline{0,1}, \quad R_1 = 0. \quad (5)$$

$$s_{\alpha\chi}(t) \approx \hat{s}_{\alpha\chi p N}(t) = \sum_{q=0}^p A_{\alpha\chi q} P_q(t) + a_{\alpha\chi 0} + \sum_{m=1}^N (a_{\alpha\chi m} \cos(m\pi t/\tau) + b_{\alpha\chi m} \sin(m\pi t/\tau)), \quad (7)$$

$$P_0(t) = t/(2\tau), \quad P_{2q-1}(t) = \int_0^t P_{2q-2}(x) dx, \quad P_{2q}(t) = \int_0^t P_{2q-1}(x) dx - (t/\tau) \int_0^a P_{2q-1}(x) dx, \quad (8)$$

где  $P_q(t)$  – быстрые полиномы А. Д. Чернышова, введенные в [20].  $r$ -кратное ( $r = \overline{0,p}$ ) дифференцирование (7) с использованием символа Кронекера  $\delta_{r0}$  и с подстановкой  $t = -\tau$  дает

$$s_{\alpha\chi}^{(r)}(t) \approx \hat{s}_{\alpha\chi p N}^{(r)}(t) = \sum_{q=0}^p A_{\alpha\chi q} P_q^{(r)}(t) + a_{\alpha\chi 0} \delta_{r0} + \\ + \sum_{m=1}^N (m\pi/\tau)^r (a_{\alpha\chi m} \cos(m\pi t/\tau + s\pi/\tau) + b_{\alpha\chi m} \sin(m\pi t/\tau + s\pi/\tau)) \quad (9)$$

$$s_{\alpha\chi}^{(r)}(-\tau) \approx \hat{s}_{\alpha\chi p N}^{(r)}(-\tau) = \sum_{q=0}^p A_{\alpha\chi q} P_q^{(r)}(-\tau) + a_{\alpha\chi 0} \delta_{r0} + \\ + \sum_{m=1}^N (m\pi/\tau)^r (a_{\alpha\chi m} \cos((r-2m)\pi/2) + b_{\alpha\chi m} \sin((r-2m)\pi/2)) \quad (10)$$

При  $\chi = 0$  система двух зарядов замкнута, поэтому на всем промежутке времени  $[-\tau; \tau]$  ее центр масс покоится в начале координат. Тогда

$$s_{20}(t) = (m_1/m_2) s_{10}(t)$$

и система уравнений (1) сводится к единственному уравнению

$$\ddot{s}_{10} s_{10}^2 = C_0,$$

$$C_0 = m_2^2 Q_1 Q_2 / (4\pi c^3 \varepsilon_0 m_1 (m_1 + m_2)^2). \quad (6)$$

При  $\chi = 1$  система зарядов диссипативна (теряет энергию на излучение за счет работы сил радиационного трения), поэтому ее центр масс движется с ненулевыми скоростью и ускорением на всем промежутке времени  $(-\tau; \tau]$ , и (1) не сводится к единственному уравнению.

Производные в (1) имеют как четный (второй), так и нечетный (третий) порядок, а такая ситуация подпадает под регламентацию метода быстрых разложений предпочтительного использования универсальных быстрых разложений, предложенных в [20]. Аппроксимация неизвестных функций  $s_{\alpha\chi}(t)$  при заданном  $\chi$  универсальными быстрыми разложениями  $\hat{s}_{\alpha\chi p N}(t)$  с полиномиальными граничными функциями одинакового заданного четного порядка  $p$  с неизвестными коэффициентами  $A_{\alpha\chi q}$  и с частичными суммами ряда Фурье заданного порядка  $N$  с неизвестными коэффициентами  $a_{\alpha\chi 0}$ ,  $a_{\alpha\chi m}$ ,  $b_{\alpha\chi m}$ ,  $m = \overline{1,N}$  имеет вид

В (10)  $s_{\alpha\chi}^{(r)}(-\tau)$ ,  $\alpha = \overline{1,2}$ ,  $\chi = \overline{0,1}$ ,  $r = \overline{0,1}$  и  $s_{\alpha 1}^{(2)}(-\tau)$ ,  $\alpha = \overline{1,2}$  задаются начальными условиями (2), (3), (5), а  $s_{\alpha\chi}^{(r)}(-\tau)$ ,  $\alpha = \overline{1,2}$ ,  $\chi = \overline{0,1}$ ,  $r = \overline{2,p}$  и  $s_{\alpha 1}^{(r)}(-\tau)$ ,  $\alpha = \overline{1,2}$ ,  $r = \overline{3,p}$  находятся подстановкой  $t = -\tau$  в результат многократного дифференцирования систем (1), (6).

Точность быстрых разложений (7)–(8) обусловлена величиной  $p$  и  $N$ . Искомые функции  $\hat{s}_{10pN}(t)$ ,  $\hat{s}_{11pN}(t)$ ,  $\hat{s}_{21pN}(t)$  имеют  $3p + 6N + 6$  параметров  $A_{10q}$ ,  $A_{11q}$ ,  $A_{21q}$ ,  $a_{100}$ ,  $a_{110}$ ,  $a_{210}$ ,  $a_{10m}$ ,  $a_{11m}$ ,  $a_{21m}$ ,  $b_{10m}$ ,  $b_{11m}$ ,  $b_{21m}$ ,  $q = \overline{0,p}$ ,  $m = \overline{1,N}$  – решение системы  $3p + 6N + 6$  нелинейных алгебраических уравнений. Первые  $3p + 3$  из них есть (11) с заменой  $\approx$  на  $=$ :

$$\hat{s}_{10pN}^{(r)}(-\tau) = s_{10}^{(r)}(-\tau), \tag{11}$$

$$\hat{s}_{11pN}^{(r)}(-\tau) = s_{11}^{(r)}(-\tau), \hat{s}_{21pN}^{(r)}(-\tau) = s_{21}^{(r)}(-\tau), r = \overline{0,p}. \tag{12}$$

Следующие  $3N + 3$  и последние  $3N$  даются подстановкой  $\hat{s}_{\alpha\chi} = \hat{s}_{\alpha\chi pN}$  в (1), (6), умножением на  $\cos(m\pi t/\tau)$ ,  $m = \overline{0,N}$  и на  $\sin(m\pi t/\tau)$ ,  $m = \overline{1,N}$ , интегрированием по  $t \in [-\tau, \tau]$ :

$$\int_{-\tau}^{\tau} (\theta_{\alpha} \ddot{\hat{s}}_{\alpha 1 pN} - \ddot{\hat{s}}_{\alpha 1 pN}) (\hat{s}_{11 pN} + \hat{s}_{21 pN})^2 \cos(m\pi t/\tau) dt = \int_{-\tau}^{\tau} C_{\alpha} \cos(m\pi t/\tau) dt, \tag{13}$$

$$\int_{-\tau}^{\tau} (\theta_{\alpha} \ddot{\hat{s}}_{\alpha 1 pN} - \ddot{\hat{s}}_{\alpha 1 pN}) (\hat{s}_{11 pN} + \hat{s}_{21 pN})^2 \sin(m\pi t/\tau) dt = \int_{-\tau}^{\tau} C_{\alpha} \sin(m\pi t/\tau) dt, \tag{14}$$

$$\int_{-\tau}^{\tau} \ddot{\hat{s}}_{10 pN} \cdot \hat{s}_{10 pN}^2 \cos \frac{m\pi t}{\tau} dt = \int_{-\tau}^{\tau} C_0 \cos \frac{m\pi t}{\tau} dt, \int_{-\tau}^{\tau} \ddot{\hat{s}}_{10 pN} \cdot \hat{s}_{10 pN}^2 \sin \frac{m\pi t}{\tau} dt = \int_{-\tau}^{\tau} C_0 \sin \frac{m\pi t}{\tau} dt. \tag{15}$$

Система (12)–(14) относительно  $A_{\alpha 1q}$ ,  $a_{\alpha 10}$ ,  $a_{\alpha 1m}$ ,  $b_{\alpha 1m}$ ,  $\alpha = \overline{1,2}$ ,  $q = \overline{0,p}$ ,  $m = \overline{1,N}$  для аппроксимации  $s_{\alpha 1}(t)$  по (7)–(8) и система (11), (15) относительно  $A_{10q}$ ,  $a_{100}$ ,  $a_{10m}$ ,  $b_{10m}$ ,  $q = \overline{0,p}$ ,  $m = \overline{1,N}$  для аппроксимации  $s_{10}(t)$  по (7)–(8) независимы. Метод предусматривает трехкратное (по порядку системы) дифференцирование полиномиальных граничных функций со снижением их порядка на 3, после которого он должен остаться не ниже порядка системы (1):  $p-3 \geq 3$ . В итоге примем минимально допустимые  $p = 6$ ,  $N = 1$ . Для  $q = \overline{0,3}$  из (8) имеем

$$P_0(t) = t/(2\tau), \quad P_1(t) = t^2/(4\tau), \quad P_2(t) = t^3/(12\tau) - \tau t/12, \quad P_3(t) = t^4/(48\tau) - \tau t^2/24, \\ P_4(t) = t^5/(240\tau) - \tau t^3/72 + 7\tau^3 t/720, \quad P_5(t) = t^6/(1440\tau) - \tau t^4/288 + 7\tau^3 t^2/1440, \tag{16} \\ P_6(t) = t^7/(10080\tau) - \tau t^5/1440 + 7\tau^3 t^3/4320 - 31\tau^5 t/30240.$$

Дифференцирование (1) при  $\chi = 1$  и (6) с подстановкой  $t = -\tau$  с учетом (2), (3), (5) дает

$$\ddot{s}_{\alpha 1}^{(4)}(-\tau)/\theta_{\alpha} = R_{2\alpha} - C/(m_{\alpha} c^3 R_0^2); \quad s_{\alpha 1}^{(4)}(-\tau)/\theta_{\alpha} = \ddot{s}_{\alpha 1}^{(4)}(-\tau); \tag{17}$$

$$s_{\alpha 1}^{(5)}(-\tau)/\theta_{\alpha} = s_{\alpha 1}^{(4)}(-\tau) + (2C/(m_{\alpha} c^3 R_0^3))(R_{21} + R_{22}); \tag{18}$$

$$s_{\alpha 1}^{(6)}(-\tau)/\theta_{\alpha} = s_{\alpha 1}^{(5)}(-\tau) + (2C/(m_{\alpha} c^3 R_0^3))(\ddot{s}_{11}^{(4)}(-\tau) + \ddot{s}_{21}^{(4)}(-\tau)); \tag{19}$$

$$\ddot{s}_{10}^{(4)}(-\tau) = C_0/s_{10}^2(-\tau); \quad \ddot{s}_{10}^{(5)}(-\tau) = s_{10}^{(5)}(-\tau) = 0; \tag{20}$$

$$s_{10}^{(4)}(-\tau) = -2C_0 \ddot{s}_{10}^{(4)}(-\tau)/s_{10}^3(-\tau); \quad s_{10}^{(6)}(-\tau) = -11C_0 s_{10}^{(4)}(-\tau)/s_{10}^3(-\tau). \tag{21}$$

Из (9), (10), (16) получаем для функций  $\hat{s}_{1061}^{(r)}(t)$ ,  $\hat{s}_{1161}^{(r)}(t)$ ,  $\hat{s}_{2161}^{(r)}(t)$ ,  $r = \overline{0,6}$  тридцати неизвестных параметров  $A_{10q}$ ,  $a_{100}$ ,  $a_{101}$ ,  $b_{101}$ ,  $A_{\alpha 1q}$ ,  $a_{\alpha 10}$ ,  $a_{\alpha 11}$ ,  $b_{\alpha 11}$ ,  $\alpha = \overline{1,2}$ ,  $q = \overline{0,6}$ :

$$\hat{s}_{\alpha\chi 61}(t) = A_{\alpha\chi 0} t/(2\tau) + A_{\alpha\chi 1} t^2/(4\tau) + A_{\alpha\chi 2} (t^3/(12\tau) - \tau t/12) + A_{\alpha\chi 3} (t^4/(48\tau) - \tau t^2/24) + \\ + A_{\alpha\chi 4} (t^5/(240\tau) - \tau t^3/72 + 7\tau^3 t/720) + A_{\alpha\chi 5} (t^6/(1440\tau) - \tau t^4/288 + 7\tau^3 t^2/1440) + \\ + (A_{\alpha\chi 6}/1440)(t^7/(7\tau) - \tau t^5 + 7\tau^3 t^3/3 - 31\tau^5 t/21) + a_{\alpha\chi 0} + a_{\alpha\chi 1} \cos(\pi t/\tau) + b_{\alpha\chi 1} \sin(\pi t/\tau); \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{s}}_{\alpha\chi 61}(t) &= (A_{\alpha\chi 0} + A_{\alpha\chi 1}t)/(2\tau) + A_{\alpha\chi 2}(t^2/(4\tau) - \tau/12) + A_{\alpha\chi 3}(t^3/(12\tau) - \tau t/12) + \\ &+ A_{\alpha\chi 4}(t^4/(48\tau) - \tau t^2/24 + 7\tau^3/720) + A_{\alpha\chi 5}(t^5/(240\tau) - \tau t^3/72 + 7\tau^3 t/720) + \\ &+ A_{\alpha\chi 6}(t^6/(1440\tau) - \tau t^4/288 + 7\tau^3 t^2/1440 - 31\tau^5/30240) + \frac{\pi}{\tau}(b_{\alpha\chi 1} \cos(\pi t/\tau) - a_{\alpha\chi 1} \sin(\pi t/\tau)); \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{s}}_{\alpha\chi 61}(t) &= (A_{\alpha\chi 1} + A_{\alpha\chi 2}t)/(2\tau) + A_{\alpha\chi 3}(t^2/(4\tau) - \tau/12) + A_{\alpha\chi 4}(t^3/(12\tau) - \tau t/12) + \\ &+ A_{\alpha\chi 5}\left(\frac{t^4}{48\tau} - \frac{\tau t^2}{24} + \frac{7\tau^3}{720}\right) + A_{\alpha\chi 6}\left(\frac{t^5}{240\tau} - \frac{\tau t^3}{72} + \frac{7\tau^3 t}{720}\right) - \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \left(a_{\alpha\chi 1} \cos \frac{\pi t}{\tau} + b_{\alpha\chi 1} \sin \frac{\pi t}{\tau}\right); \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{s}}_{\alpha\chi 61}(t) &= (A_{\alpha\chi 2} + A_{\alpha\chi 3}t)/(2\tau) + A_{\alpha\chi 4}(t^2/(4\tau) - \tau/12) + A_{\alpha\chi 5}(t^3/(12\tau) - \tau t/12) + \\ &+ A_{\alpha\chi 6}(t^4/(48\tau) - \tau t^2/24 + 7\tau^3/720) + (\pi/\tau)^3 (a_{\alpha\chi 1} \sin(\pi t/\tau) - b_{\alpha\chi 1} \cos(\pi t/\tau)); \end{aligned} \quad (25)$$

$$\hat{s}_{\alpha\chi 61}^{(4)}(t) = \frac{A_{\alpha\chi 3}}{2\tau} + \frac{A_{\alpha\chi 4}t}{2\tau} + A_{\alpha\chi 5}\left(\frac{t^2}{4\tau} - \frac{\tau}{12}\right) + A_{\alpha\chi 6}\left(\frac{t^3}{12\tau} - \frac{\tau t}{12}\right) + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^4 \left(a_{\alpha\chi 1} \cos \frac{\pi t}{\tau} + b_{\alpha\chi 1} \sin \frac{\pi t}{\tau}\right); \quad (26)$$

$$\hat{s}_{\alpha\chi 61}^{(5)}(t) = (A_{\alpha\chi 4} + A_{\alpha\chi 5}t)/(2\tau) + A_{\alpha\chi 6}(t^2/(4\tau) - \tau/12) + (\pi/\tau)^5 (b_{\alpha\chi 1} \cos(\pi t/\tau) - a_{\alpha\chi 1} \sin(\pi t/\tau)); \quad (27)$$

$$\hat{s}_{\alpha\chi 61}^{(6)}(t) = (A_{\alpha\chi 5} + A_{\alpha\chi 6}t)/(2\tau) - (\pi/\tau)^6 (a_{\alpha\chi 1} \cos(\pi t/\tau) + b_{\alpha\chi 1} \sin(\pi t/\tau)); \quad (28)$$

$$\hat{s}_{\alpha\chi 61}(-\tau) = -A_{\alpha\chi 0}/2 + \tau A_{\alpha\chi 1}/4 - \tau^3 A_{\alpha\chi 3}/48 + \tau^5 A_{\alpha\chi 5}/480 + a_{\alpha\chi 0} - a_{\alpha\chi 1}; \quad (29)$$

$$\dot{\hat{s}}_{\alpha\chi 61}(-\tau) = A_{\alpha\chi 0}/(2\tau) - A_{\alpha\chi 1}/2 + \tau A_{\alpha\chi 2}/6 - \tau^3 A_{\alpha\chi 4}/90 + \tau^5 A_{\alpha\chi 6}/945 - \pi b_{\alpha\chi 1}/\tau; \quad (30)$$

$$\ddot{\hat{s}}_{\alpha\chi 61}(-\tau) = A_{\alpha\chi 1}/(2\tau) - A_{\alpha\chi 2}/2 + \tau A_{\alpha\chi 3}/6 - \tau^3 A_{\alpha\chi 5}/90 + (\pi/\tau)^2 a_{\alpha\chi 1}; \quad (31)$$

$$\ddot{\hat{s}}_{\alpha\chi 61}(-\tau) = A_{\alpha\chi 2}/(2\tau) - A_{\alpha\chi 3}/2 + \tau A_{\alpha\chi 4}/6 - \tau^3 A_{\alpha\chi 6}/90 + (\pi/\tau)^3 b_{\alpha\chi 1}; \quad (32)$$

$$\hat{s}_{\alpha\chi 61}^{(4)}(-\tau) = A_{\alpha\chi 3}/(2\tau) - A_{\alpha\chi 4}/2 + \tau A_{\alpha\chi 5}/6 - (\pi/\tau)^4 a_{\alpha\chi 1}; \quad (33)$$

$$\hat{s}_{\alpha\chi 61}^{(5)}(-\tau) = \frac{A_{\alpha\chi 4}}{2\tau} - \frac{A_{\alpha\chi 5}}{2} + \frac{\tau A_{\alpha\chi 6}}{6} - \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^5 b_{\alpha\chi 1}; \quad \hat{s}_{\alpha\chi 61}^{(6)}(-\tau) = \frac{A_{\alpha\chi 5}}{2\tau} - \frac{A_{\alpha\chi 6}}{2} + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^6 a_{\alpha\chi m}; \quad (34)$$

Система (11)–(15), где  $s_{\alpha\chi}^{(r)}(-\tau)$ ,  $\hat{s}_{\alpha\chi 61}^{(r)}(t)$ ,  $\hat{s}_{\alpha\chi 61}^{(r)}(-\tau)$  определены (2), (3), (5), (17)–(34), есть

$$\hat{s}_{\alpha 161}^{(r)}(-\tau) = s_{\alpha 1}^{(r)}(-\tau), \quad \hat{s}_{1061}^{(r)}(-\tau) = s_{10}^{(r)}(-\tau), \quad r = \overline{0, 6}; \quad (35)$$

$$\int_{-\tau}^{\tau} (\theta_{\alpha} \ddot{\hat{s}}_{\alpha 161}(t) - \ddot{\hat{s}}_{\alpha 161}(t)) (\hat{s}_{1161}(t) + \hat{s}_{2161}(t))^2 dt = 2\tau C_{\alpha}; \quad (36)$$

$$\int_{-\tau}^{\tau} (\theta_{\alpha} \ddot{\hat{s}}_{\alpha 161}(t) - \ddot{\hat{s}}_{\alpha 161}(t)) (\hat{s}_{1161}(t) + \hat{s}_{2161}(t))^2 \cos(\pi t/\tau) dt = 0; \quad (37)$$

$$\int_{-\tau}^{\tau} (\theta_{\alpha} \ddot{\hat{s}}_{\alpha 161}(t) - \ddot{\hat{s}}_{\alpha 161}(t)) (\hat{s}_{1161}(t) + \hat{s}_{2161}(t))^2 \sin(\pi t/\tau) dt = 0; \quad (38)$$

$$\int_{-\tau}^{\tau} \ddot{\hat{s}}_{1061}(t) \cdot \hat{s}_{1061}^2(t) dt = 2\tau C_0; \quad \int_{-\tau}^{\tau} \ddot{\hat{s}}_{1061}(t) \cdot \hat{s}_{1061}^2(t) \cos \frac{\pi t}{\tau} dt = 0; \quad \int_{-\tau}^{\tau} \ddot{\hat{s}}_{1061}(t) \cdot \hat{s}_{1061}^2(t) \sin \frac{\pi t}{\tau} dt = 0. \quad (39)$$

Интегралы в (36)–(39) – берущиеся. Для их символического вычисления удобно использовать системы компьютерной алгебры, после чего (35)–(39) задают разрешимую систему нелинейных алгебраических уравнений. Для ее численного решения удобно использовать системы компьютерной математики для численных расчетов.

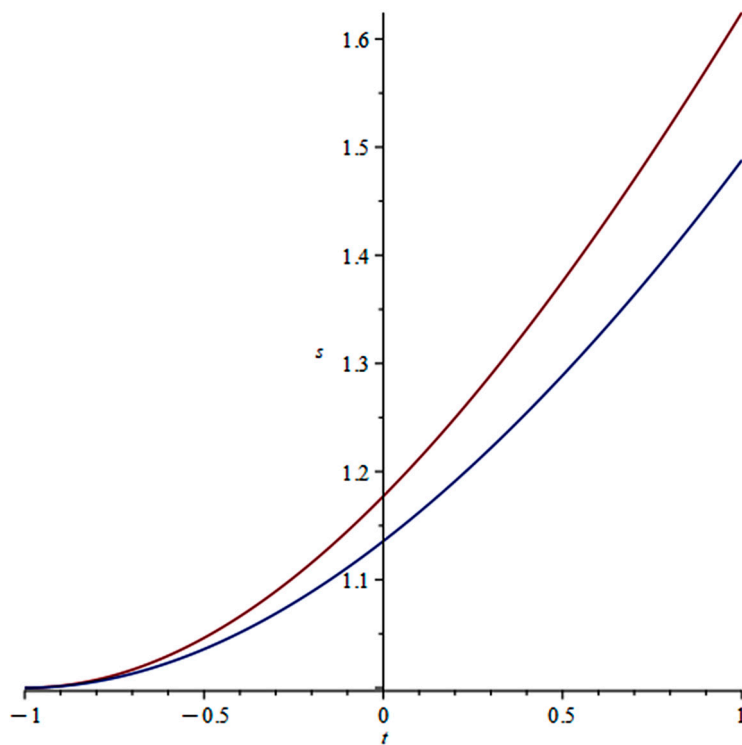
**Результаты исследования и их обсуждение**

Для верификации предложенного способа использования метода быстрых разложений в контексте классической математической физики в парадигме нелокальности на примере задачи (1)–(3), (5), (6) проведен с применением Maple 2025 вычислительный эксперимент с данными в таблице.

Исходные и выходные данные расчетов

Исходные данные									
$\eta_a$	$\tau$	$R_0$	$\theta_a$	$\zeta_a$					
1	1	2	1	0,8					
Выходные данные									
$A_{100}$	$A_{101}$	$A_{102}$	$A_{103}$	$A_{104}$	$A_{105}$	$A_{106}$	$a_{100}$	$a_{101}$	$b_{101}$
$6,243 \times 10^{-1}$	$5,369 \times 10^{-1}$	$-2,320 \times 10^{-1}$	$-8,162 \times 10^{-2}$	$4,412 \times 10^{-1}$	$3,687 \times 10^{-1}$	$-3,465 \times 10^{-1}$	$1,176 \times 10^0$	$8,348 \times 10^{-4}$	$-7,036 \times 10^{-5}$
$A_{a10}$	$A_{a11}$	$A_{a12}$	$A_{a13}$	$A_{a14}$	$A_{a15}$	$A_{a16}$	$a_{a10}$	$a_{a11}$	$b_{a11}$
$4,878 \times 10^{-1}$	$4,407 \times 10^{-1}$	$-1,304 \times 10^{-1}$	$7,457 \times 10^{-2}$	$1,672 \times 10^{-1}$	$-1,614 \times 10^{-1}$	$-3,136 \times 10^{-1}$	$1,136 \times 10^0$	$1,833 \times 10^{-5}$	$1,241 \times 10^{-4}$

Примечание: составлена авторами на основе полученных данных в ходе исследования.



Графики быстрых разложений (зависимости расстояния  $s$  от времени  $t$ ).  
Примечание: составлен авторами по результатам данного исследования

Искомые быстрые разложения  $\hat{s}_{1061}(t)$ ,  $\hat{s}_{\alpha 161}(t)$ , аппроксимирующие решения  $s_{10}(t)$ ,  $s_{\alpha 1}(t)$ , определяются (22), где параметры  $A_{10q}$ ,  $a_{100}$ ,  $a_{101}$ ,  $b_{101}$ ,  $A_{\alpha 1q}$ ,  $a_{\alpha 10}$ ,  $a_{\alpha 11}$ ,  $b_{\alpha 11}$ ,  $q = \overline{0,6}$ , вычисленные решением (35)–(39), заданы в таблице. Графики  $\hat{s}_{1061}(t)$  и  $\hat{s}_{\alpha 161}(t)$  приведены на рисунке (верхняя и нижняя кривые соответственно), причем отклонение нижней кривой от верхней наглядно показывает тормозящее действие силы радиационного трения.

### Заключение

В настоящей работе проведена с применением современных компьютерных технологий (посредством применения систем компьютерной алгебры и систем компьютерной математики для численных расчетов на примере Maple 2025) адаптация эффективного вычислительного метода быстрых разложений к парадигме нелокальности в контексте классической математической физики на примере задачи Коши для системы двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка, описывающей прямолинейное взаимное удаление в вакууме двух одноименных точечных электрических зарядов с возможностью учета радиационного трения. Тем самым цель работы достигнута.

Научная новизна: способ использования эффективного вычислительного метода быстрых разложений в контексте классической математической физики с применением современных компьютерных технологий (посредством применения систем компьютерной алгебры и систем компьютерной математики для численных расчетов), отличающийся от известных аналогов адаптацией этого метода к парадигме нелокальности на примере задачи Коши для системы двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка, описывающей прямолинейное взаимное удаление в вакууме двух одноименных точечных электрических зарядов с возможностью учета радиационного трения. Формулы (7), (8), (22) непосредственно регламентируются методом быстрых разложений для данной задачи, а (35)–(39) – разработанным способом использования данного метода.

Практическая значимость: полученные результаты могут быть использованы при математическом моделировании физических процессов в контексте классической математической физики в парадигме нелокальности с применением современных компьютерных технологий (посредством применения систем компьютерной алге-

бры и систем компьютерной математики для численных расчетов) для использования эффективного вычислительного метода быстрых разложений за счет подходящей адаптации этого метода к парадигме нелокальности.

### Список литературы

1. Тугов В. В. Моделирование и решение нелинейных задач нестационарной теплопроводности в многослойных конструкциях // Современные наукоемкие технологии. 2024. № 5–1. С. 76–81. URL: <https://top-technologies.ru/ru/article/view?id=40008> (дата обращения: 10.04.2026). DOI: 10.17513/snt.40008.
2. Бадекин М. Ю., Ивахненко Н. Н. Применение метода энергетического баланса к нелинейным уравнениям вибрации // Современные наукоемкие технологии. 2024. № 8. С. 28–34. URL: <https://top-technologies.ru/ru/article/view?id=40108> (дата обращения: 10.04.2026). DOI: 10.17513/snt.40108.
3. Катаева Л. Ю. Анализ численных методов решения обобщенного уравнения Бюргерса для нелинейных волн // Современные наукоемкие технологии. 2025. № 9. С. 78–86. URL: <https://top-technologies.ru/ru/article/view?id=40489> (дата обращения: 09.04.2026). DOI: 10.17513/snt.40489.
4. Chernyshov A. D. Method of Fast Expansions for Solving Nonlinear Differential Equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. Vol. 54. Is. 1. P. 11–21. URL: <https://link.springer.com/article/10.1134/S0965542514010060> (дата обращения: 07.04.2026). DOI: 10.1134/S0965542514010060.
5. Чернышов А. Д., Горайнов В. В., Лешонков О. В., Соболева Е. А., Никифорова О. Ю. Сравнение скорости сходимости быстрых разложений с разложениями в классический ряд Фурье // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2019. № 1. С. 27–34. URL: <http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/analiz/2019/01/2019-01-04.pdf> (дата обращения: 06.04.2026). EDN: YXATJG.
6. Лешонков О. В. Исследование некоторых математических моделей методом быстрых разложений: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 2018. 213 с. [Электронный ресурс]. URL: [http://www.science.vsu.ru/dissertations/6530/Диссертация\\_Лешонков\\_О.В.pdf](http://www.science.vsu.ru/dissertations/6530/Диссертация_Лешонков_О.В.pdf) (дата обращения: 07.04.2026).
7. Чернышов А. Д., Кузнецов С. Ф., Половинкина М. В., Соболева Е. А., Никифорова О. Ю. Об особенностях применения метода быстрых разложений при решении уравнений Навье – Стокса // Вестник ВГУИТ. 2017. Т. 79. № 1. С. 81–89. URL: <https://www.vestnik-vsuet.ru/vguit/article/view/1211> (дата обращения: 13.04.2026). DOI: 10.20914/2310-1202-2017-1-81-89.
8. Chernyshov A. D., Goryainov V. V., Popov M. I., Nikiforova Yu. O. Using of Fast Expansions in the Construction of Two-Dimensional Exact Solutions of the Poisson Equation // Journal of Physics: Conference Series. 2020. P. 012146. [Электронный ресурс]. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1479/1/012146> (дата обращения: 14.04.2026). DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012146.
9. Goryainov V. V., Popov M. I., Chernyshov A. D. Solving the Stress Problem in a Sharp Wedge-Whaped Cutting Tool Using the Quick Decomposition Method and the Problem of Matching Boundary Conditions // Mechanics of Solids. 2019. Vol. 54. Is. 7. P. 1083–1097. URL: <https://link.springer.com/article/10.3103/S0025654419070094> (дата обращения: 14.04.2026). DOI: 10.3103/S0025654419070094.
10. Чернышов А. Д., Горайнов В. В., Кузнецов С. Ф., Никифорова О. Ю. Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 70. С. 127–142. URL: [https://journals.tsu.ru/mathematics/&journal\\_page=archive&id=2092&article\\_](https://journals.tsu.ru/mathematics/&journal_page=archive&id=2092&article_)

id=47050 (дата обращения: 07.04.2026). DOI: 10.17223/19988621/70/11.

11. Чернышов А. Д., Сайко Д. С., Горайнов В. В., Кузнецов С. Ф., Никифорова О. Ю. Точные решения задачи о диффузии в прямоугольной емкости с внутренним источником, полученные методом быстрых разложений // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 3. С. 42–55. URL: <https://physmath.spbstu.ru/en/article/2020.49.04> (дата обращения: 13.04.2026). DOI: 10.18721/JPM.13304.

12. Goryainov V. V., Kuznetsov S. F., Nikiforova O. Yu., Voronkova I. S. Some Exact Solutions of the Heat Conduction Equation in Parallelepiped Obtained by the Fast Expansions Method // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1902. P. 012006. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1902/1/012006> (дата обращения: 07.04.2026). DOI: 10.1088/1742-6596/1902/1/012006.

13. Chernyshov A. D. Solution of the Stefan Two-Phase Problem with an Internal Source and of Heat Conduction Problems by the Method of Rapid Expansions // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2021. Vol. 94. Is. 1. P. 95–112. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10891-021-02277-x> (дата обращения: 14.04.2026). DOI: 10.1007/s10891-021-02277-x.

14. Popov M. I., Skrypnikov A. V., Chernyshov A. D., Sablin S. Y., Nikitin V. V., Kozlov V. G., Chernyshov A. V., Druzhinin R. A. Application of the Fast Expansion Method in Space-Related Problems // Mathematics and Statistics. 2022. Vol. 10. Is. 2. P. 320–328. URL: [https://www.hrpub.org/journals/article\\_info.php?aid=11840](https://www.hrpub.org/journals/article_info.php?aid=11840) (дата обращения: 14.04.2026). DOI: 10.13189/ms.2022.100206.

15. Chernyshov A. D., Popov M. I., Goryainov V. V., Nikiforova O. Yu. Application of the Method of Fast Expansions to Construction of a Trajectory of Movement of a Body with Variable Mass from Its Initial Position in an Achieved Final Position in a Gravitational Field // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58. Is. 8. P. 2908–2919. URL: <https://link.springer.com/article/10.3103/S0025654423080083> (дата обращения: 14.04.2026). DOI: 10.3103/s0025654423080083.

16. Дубровин А. С. От дальнего действия Фоккера-Фейнмана к гиперконтинуальному дальнему действию // LV Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники: материалы конференции (г. Москва, 13–17 мая 2019 г.). М.: Издательство Российского университета дружбы народов (РУДН), 2019. С. 37–40. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=46242797> (дата обращения: 10.04.2026). EDN: EAUZEC.

17. Дубровин А. С. Гармонический системный анализ и обработка информации в модели дальнего действия взаимно отталкивающихся точечных зарядов // Вестник Воронежского института ФСИН России. 2023. № 2. С. 42–49. URL: [https://vi.fsin.gov.ru/upload/territory/Vi/nauchnaja\\_deyatelnost/Vestnik/v\\_fsin\\_2023\\_2.pdf](https://vi.fsin.gov.ru/upload/territory/Vi/nauchnaja_deyatelnost/Vestnik/v_fsin_2023_2.pdf) (дата обращения: 06.04.2026). EDN: OCEDEK.

18. Дубровин А. С., Сумин В. И., Кравченко А. С. Системное моделирование отталкивания с радиационным трением точечных зарядов на основе классического гармонического анализа // Экономика. Информатика. 2025. Т. 52. № 3. С. 623–641. URL: <https://econom-inform-journal.ru/index.php/journal/article/view/463?ysclid=mnn7ldqnrw447298612> (дата обращения: 06.04.2026). DOI: 10.52575/2687-0932-2025-52-3-623-641.

19. Дубровин А. С., Сумин В. И. Классический гармонический системный анализ и обработка информации в модели отталкивания с радиационным трением точечных зарядов // Проблемы и перспективы моделирования систем и процессов: материалы Всероссийской научно-практической конференции (г. Воронеж, 14 октября 2025 г.). Воронеж: Издательство Воронежского государственного лесотехнического университета им. Г. Ф. Морозова, 2025. С. 50–58. URL: [https://bibl.vgltu.ru/ru/nauka/conference\\_article/18946/view](https://bibl.vgltu.ru/ru/nauka/conference_article/18946/view) (дата обращения: 08.04.2026). DOI: 10.58168/PPSPM2025\_50-58.

20. Chernyshov A. D., Saiko D. S., Kovaleva E. N. Universal Fast Expansion for Solving Nonlinear Problems // Journal of Physics: Conference Series. 2020. P. 012147. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1479/1/012147> (дата обращения: 07.04.2026). DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012147.

**Конфликт интересов:** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Conflict of interest:** The authors declare that there is no conflict of interest.

**Финансирование:** Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования.

**Financing:** The research was performed without external funding.