

УДК 519.873  
DOI 10.17513/snt.40819



## ПРИМЕНЕНИЕ СКРЫТЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АНАЛИЗА СОСТОЯНИЙ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ СИСТЕМЫ

Даева С. Г. ORCID ID 0000-0001-9660-7365

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет», Москва, Российская Федерация, e-mail: daeva.sg@yandex.ru*

Статья посвящена разработке модели технической системы с элементами, состояния которых являются скрытыми. Для примера бралась система из трех элементов: два элемента системы работают параллельно, а третий соединен с ними последовательно. Работа системы определяется последовательностью выходных сигналов. Целью исследования является построение математической модели технической системы из трех элементов, обучение модели с целью максимально увеличить вероятность получения последовательности выходных сигналов. В работе такая система описывается как скрытая марковская модель. Для системы определен набор состояний, в которой она может находиться, и всевозможные переходы между состояниями с вероятностями переходов. Для полученного набора состояний задается матрица вероятностей появления сигналов и распределение вероятностей первоначального состояния. Для разных выходных последовательностей сигналов был проведен расчет вероятности появления и определен набор состояний, который мог привести к такой последовательности. Также было проведено обучение модели для выходных последовательностей до достижения вероятности появления равной единице с небольшой погрешностью. Исследование показало, что в среднем требуется менее 25 итераций обучения, что позволяет достаточно быстро обучать модель. Обученная модель может быть использована для предварительного анализа при последующей инженерной валидации.

**Ключевые слова:** скрытая марковская модель, матрица переходных вероятностей, обучение модели

## APPLICATION OF HIDDEN MARKOV MODELS TO STATE ANALYSIS OF A THREE-ELEMENT SYSTEM

Daeva S. G. ORCID ID 0000-0001-9660-7365

*Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “MIREA – Russian Technological University”, Moscow, Russian Federation, e-mail: daeva.sg@yandex.ru*

The article is devoted to the development of a model of a technical system with elements whose states are hidden. For example, a system of three elements was taken: two elements of the system work in parallel, and the third is connected to them in series. The system's operation is determined by the sequence of output signals. The aim of the study is to construct a mathematical model of a technical system consisting of three elements, and to train the model in order to maximize the probability of obtaining a sequence of output signals. In this paper, such a system is described as a hidden Markov model. A set of states is defined for the system, in which it can be located, and all possible transitions between states with transition probabilities. For the resulting set of states, a matrix of signal probabilities and a probability distribution of the initial state is set. For different output sequences of signals, the probability of occurrence was calculated and a set of states was determined that could lead to such a sequence. The model was also trained for the output sequences until the probability of occurrence was one with a small error. The study showed that, on average, less than 25 training iterations are required, which allows you to train the model quickly enough. The trained model can be used for preliminary analysis during subsequent engineering validation.

**Keywords:** hidden Markov model, transition probability matrix, model training

### Введение

Работа современных систем обеспечивается достаточно большим множеством внутренних элементов [1–3]. Зачастую эти элементы скрыты, и можно увидеть только результат их работы, представленный выходными сигналами системы. Отсюда возникает задача определения состояний, в которых находятся внутренние элементы системы, и определение влияния наборов этих состояний на выходные сигналы системы [4–6]. Такие задачи хорошо описываются скрытыми марковскими моделями (СММ).

СММ позволяют получать информацию о скрытых процессах, протекающих в системе, по имеющимся данным о выходных сигналах системы и о распределении возможности нахождения элементов системы в определенном наборе состояний [7; 8]. Такие задачи зачастую возникают при моделировании работы технических систем, например систем электроэнергетики [9], радиоэлектронной аппаратуры, датчиков расхода теплоносителя реактора АЭС [10] и т. п. СММ позволяют находить для системы вероятность получения последовательности выходных сигналов, наиболее вероятный

набор состояний элементов, который привел к такой выходной последовательности.

**Цель исследования** – построить математическую модель технической системы из трех элементов, обучить модель с целью максимально увеличить вероятность получения последовательности выходных сигналов.

#### Материал и методы исследования

Рассмотрим следующую систему из трех элементов: два элемента системы работают параллельно, а третий соединен с ними последовательно (рис. 1). Система находится в рабочем состоянии, если работает элемент 3 и если работает хотя бы один из элементов 1 или 2. После поломки элементы переходят в состояние восстановления. Если элемент 3 находится в режиме восстановления, то элементы 1 и 2 отключаются. Если элементы 1 и 2 оба находятся в режиме восстановления, то элемент 3 отключается.

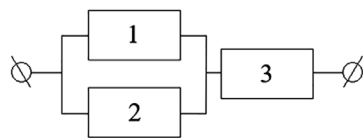


Рис. 1. Система из трех элементов  
Примечание: составлен автором по результатам исследования

Будем считать, что время работы каждого элемента задается показательным распределением:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Для каждого элемента зададим ожидаемое время работы без сбоев  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , оно будет являться математическим ожиданием [11]:

$$M\alpha_i = 1 / \lambda_i.$$

После того, как элемент выработает свое время  $\alpha_i$ , он переходит в режим вос-

становления. Режим восстановления также описывается показательным распределением. Для режима восстановления обозначим показательную функцию как  $g(x)$ :

$$g(x) = \mu e^{-\mu x}.$$

Для каждого элемента зададим ожидаемое время восстановления  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , оно будет являться математическим ожиданием:

$$M\beta_i = 1 / \mu_i.$$

Положим, что система в начальный момент времени всегда находится в состоянии, когда работают все три элемента. Обозначим через  $S_1$  первоначальное состояние системы. Также будем считать, что в первоначальное состояние невозможно попасть из других состояний системы. По мере работы системы она начинает переходить из первоначального состояния в другие состояния. Обозначим состояния, в которых может находиться система  $S_{klmn}$ , где  $k$  – номер элемента, в котором произошло изменение для перехода в это состояние,  $l, m, n$  – состояния, в котором находятся элементы 1, 2, 3 соответственно после изменения (в текущий момент). Элементы могут находиться в одном из трех состояний: 1 – элемент работает, 0 – элемент находится на восстановлении, 2 – элемент отключен.

Рассмотрим переходы системы из одного состояния в другое. Из состояния  $S_1$  система может перейти в состояния  $S_{1011}$ ,  $S_{2101}$  и  $S_{3220}$ . Состояние  $S_{1011}$  означает, что изменение произошло в элементе 1, и после изменения элемент 1 находится на восстановлении, а элементы 2 и 3 работают (рис. 2, а). Состояние  $S_{2101}$  – изменение в элементе 2, и после изменения элемент 2 находится на восстановлении, а элементы 1 и 3 работают (рис. 2, б). Состояние  $S_{3220}$  – изменение произошло в элементе 3, и после изменения элемент 3 находится на восстановлении, а элементы 1 и 2 отключены (рис. 2, в).

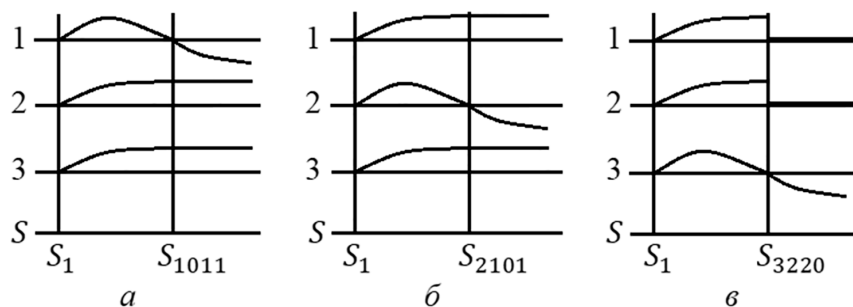


Рис. 2. Переходы из состояния  $S_1$   
Примечание: составлен автором по результатам исследования

Таблица 1

Таблица состояний системы  $S_i$  и вероятностей  $P_i^j$  возможных переходов

Состояние системы $S_i$	Состояния системы $S_j$ , в которые можно перейти из $S_i$	Вероятности перехода $P_i^j$
$S_1$	$S_{1011}$	$\lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
	$S_{2101}$	$\lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
	$S_{3220}$	$\lambda_3 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
$S_{1111}$	$S_{1011}$	$\lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
	$S_{2101}$	$\lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
	$S_{3220}$	$\lambda_3 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
$S_{1011}$	$S_{1111}$	$\mu_1 / (\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
	$S_{2002}$	$\lambda_2 / (\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
	$S_{3020}$	$\lambda_3 / (\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
$S_{1101}$	$S_{1002}$	$\lambda_1 / (\lambda_1 + \mu_2 + \lambda_3)$
	$S_{2111}$	$\mu_2 / (\lambda_1 + \mu_2 + \lambda_3)$
	$S_{3200}$	$\lambda_3 / (\lambda_1 + \mu_2 + \lambda_3)$
$S_{1002}$	$S_{1101}$	$\mu_1 / (\mu_1 + \mu_2)$
	$S_{2011}$	$\mu_2 / (\mu_1 + \mu_2)$
$S_{1220}$	$S_{3111}$	1
$S_{2111}$	$S_{1011}$	$\lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
	$S_{2101}$	$\lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
	$S_{3220}$	$\lambda_3 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
$S_{2011}$	$S_{1111}$	$\mu_1 / (\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
	$S_{2002}$	$\lambda_2 / (\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
	$S_{3020}$	$\lambda_3 / (\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
$S_{2101}$	$S_{1002}$	$\lambda_1 / (\lambda_1 + \mu_2 + \lambda_3)$
	$S_{2111}$	$\mu_2 / (\lambda_1 + \mu_2 + \lambda_3)$
	$S_{3200}$	$\lambda_3 / (\lambda_1 + \mu_2 + \lambda_3)$
$S_{2002}$	$S_{1101}$	$\mu_1 / (\mu_1 + \mu_2)$
	$S_{2011}$	$\mu_2 / (\mu_1 + \mu_2)$
$S_{2220}$	$S_{3111}$	1
$S_{3111}$	$S_{1011}$	$\lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
	$S_{2101}$	$\lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
	$S_{3220}$	$\lambda_3 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
$S_{3011}$	$S_{1111}$	$\mu_1 / (\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
	$S_{2002}$	$\lambda_2 / (\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
	$S_{3020}$	$\lambda_3 / (\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$
$S_{3101}$	$S_{1002}$	$\lambda_1 / (\lambda_1 + \mu_2 + \lambda_3)$
	$S_{2111}$	$\mu_2 / (\lambda_1 + \mu_2 + \lambda_3)$
	$S_{3200}$	$\lambda_3 / (\lambda_1 + \mu_2 + \lambda_3)$
$S_{3200}$	$S_{2220}$	$\mu_2 / (\mu_2 + \mu_3)$
	$S_{3101}$	$\mu_3 / (\mu_2 + \mu_3)$
$S_{3020}$	$S_{1220}$	$\mu_1 / (\mu_1 + \mu_3)$
	$S_{3011}$	$\mu_3 / (\mu_1 + \mu_3)$
$S_{3220}$	$S_{3111}$	1

Примечание: составлена автором на основе полученных данных в ходе исследования.

Аналогично можно рассмотреть переходы из всех возможных состояний системы. Обозначим  $P_i^j$  – вероятность перехода из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$ . Тогда можно посчитать вероятности перехода из состояния  $S_1$  по формулам [12]:

$$P_1^{1011} = \min_{X=\min(\alpha_2, \alpha_3)} P(\alpha_1 < X) = \int_0^{\infty} f_1(x) \bar{F}_2(x) \bar{F}_3(x) dx = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3},$$

$$P_1^{2101} = \min_{X=\min(\alpha_1, \alpha_3)} P(\alpha_2 < X) = \int_0^{\infty} f_2(x) \bar{F}_1(x) \bar{F}_3(x) dx = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3},$$

$$P_1^{3220} = \min_{X=\min(\alpha_1, \alpha_2)} P(\alpha_3 < X) = \int_0^{\infty} f_3(x) \bar{F}_1(x) \bar{F}_2(x) dx = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3},$$

$$\bar{F}_k(x) = 1 - F_k(x), F_k(x) = 1 - e^{-\lambda_k x}, k = 1, 2, 3.$$

Аналогично считаются все остальные вероятности перехода  $P_i^j$ . В табл. 1 приведены все возможные состояния системы и состояния, в которые из них можно перейти с вероятностями  $P_i^j$ . Если из состояния  $S_i$  нельзя перейти в состояние  $S_j$ , то  $P_i^j = 0$ . Заметим, что сумма вероятностей перехода из одного состояния  $S_i$  равна 1.

На основе полученных вероятностей строится матрица вероятностей переходов из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$ :

$$A = \{a_{ij}\} = \{P_{ij}\},$$

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = 1, i = 1, \dots, N.$$

Далее рассмотрим решение трех основных задач СММ для описанной системы [13–15].

**Задача 1.** Пусть  $S = S_1, S_2, \dots, S_i, i = 1, \dots, N$  – возможные состояния системы,  $O = O_1, O_2, \dots, O_t, t = 1, \dots, T$  – последовательность, которую можно наблюдать при работе системы,  $O_i$  – выходные символы из известного алфавита  $V_k$ . Также считается известным матрица вероятностей переходов  $A = \{P_{ij}\}$ , матрица вероятностей появления символов  $B = \{b_j(k)\}$ ,  $b_j(k)$  – вероятность того, что в момент времени  $t$  система, которая находится в состоянии  $S_j$ , будет выдавать  $k$ -й символ из алфавита  $V_k$ , и распределение вероятностей первоначального

состояния  $\pi_i, i = 1, \dots, N, \sum_{i=1}^N \pi_i = 1$ .

Необходимо найти вероятность  $P(O)$  того, что последовательность  $O$  была получена при работе заданной системы.

**Задача 2.** Для заданной системы найти последовательность состояний

$$Q = \{q_1, q_2, \dots, q_t\}, q_i \in S, t = 1, \dots, T,$$

которая наиболее соответствует наблюдаемой выходной последовательности  $O$ .

**Задача 3.** Обучить построенную модель таким образом, чтобы максимизировать вероятность  $P(O)$  для выходной последовательности  $O$ , подобрав параметры системы  $A, B$  и  $\pi$ .

Алгоритмы для решения этих задач подробно описаны в источнике [13] и реализованы автором в программе, написанной на языке Python.

### Результаты исследования и их обсуждение

Для расчетов положим алфавит

$$V_k = \{\text{"не работает"}, \text{"работает"}\}.$$

Для упрощения представления положим

$$V_0 = \text{"не работает"} = 0, V_1 = \text{"работает"} = 1.$$

Тогда для каждого состояния  $S_i$  можно задать вероятности появления символов  $b_j(V_k)$ . Зададим их следующим образом:

$$b_i(0) = 0,98; b_i(1) = 0,02,$$

если хотя бы один из индексов  $l, m, n$  в номере состояния равен 2 (то есть система находится в состоянии  $V_0$ ), иначе

$$b_i(0) = 0,02; b_i(1) = 0,98, i = 1, \dots, N.$$

Поскольку предполагаем, что изначально система находится в состоянии  $S_1$ , то распределение вероятностей первоначального состояния  $\pi_1 = 1$  и  $\pi_i = 0, i = 2, \dots, N$ .

Положим время работы  $\alpha_1 = \alpha_2 = 100$  ч,  $\alpha_3 = 120$  ч, время восстановления  $\beta$  зададим так, чтобы  $\beta_3$  было меньше  $\beta_1$  и  $\beta_2$ .

Выходная последовательность  $O$ , которую можно наблюдать при работе системы, тогда будет представлять собой набор символов из алфавита  $V_k$ . Будем считать, что последовательность  $O$  всегда начина-

ется с символа "работает". Значения выходной последовательности фиксируются в момент смены состояния, следовательно, не может быть подряд более двух символов "не работает" (по табл. 1 возможны всего два таких случая: когда происходит переход из состояния  $S_{3200}$  в  $S_{2220}$ , и из состояния  $S_{3020}$  в  $S_{1220}$ ).

Пусть  $O = \{1,0,1,1,1,0,1,0,1,1\}$ .

В табл. 2 представлены вероятности  $P(O)$  того, что последовательность  $O$  получена при работе заданной системы при различных значениях  $\beta_i$ .

**Таблица 2**

Вероятность  $P(O)$  в зависимости от времени восстановления  $\beta_i$

$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$P(O)$
15 ч	12 ч	5 ч	0,0095
12 ч	15 ч	5 ч	0,0095
10 ч	8 ч	1 ч	0,0103
5 ч	4 ч	1 ч	0,0111

Примечание: составлена автором на основе полученных данных в ходе исследования.

**Таблица 3**

Последовательность состояний  $Q$  в зависимости от времени восстановления  $\beta$

$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	Q
15 ч	12 ч	5 ч	1, 3220, 3111, 1011, 2111, 3220, 3111, 3220, 3111, 1011
12 ч	15 ч	5 ч	1, 3220, 3111, 1011, 1111, 3220, 3111, 3220, 3111, 1011
10 ч	8 ч	1 ч	1, 3220, 3111, 1011, 2111, 3220, 3111, 3220, 3111, 1011
5 ч	4 ч	1 ч	1, 3220, 3111, 1011, 2111, 3220, 3111, 3220, 3111, 1011

Примечание: составлена автором на основе полученных данных в ходе исследования.

**Таблица 4**

Значения матрицы  $B$  после обучения

$B$	0,02	0,02	0,02	0,98	0,02	0,98	0,02	0,98	0,02	0,02	0,98	0,98	0,98	0,02	0,02	0,02	
$B_1$	0,00	0,05	0,00	0,00	0,34	0,99	0,06	0,00	0,00	0,34	0,99	0,99	0,00	0,00	0,00	0,34	0,34
$B_5$	0,00	0,01	0,00	0,00	1,00	1,00	0,01	0,00	0,00	1,00	1,00	0,99	0,00	0,00	0,00	1,00	1,00
$B_{10}$	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	1,00	0,99	0,00	0,00	0,00	1,00	1,00

Примечание: составлена автором на основе полученных данных в ходе исследования.

В табл. 3 представлены последовательности состояний  $Q$ , которые наиболее соответствуют наблюдаемой последовательности  $O$ , для различных значений  $\beta$ .

Далее проведем обучение модели.

Положим  $\beta_1 = 15$  ч,  $\beta_2 = 12$  ч,  $\beta_3 = 5$  ч,  $O = \{1,0,1,1,1,0,1,0,1,1\}$ . После обучения получим новые матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $\pi$  и вероятность  $P(O)$ . В табл. 4 приведены исходная матрица  $B$  и матрица  $B$  после одного цикла обучения ( $B_1$ ), после пяти циклов обучения ( $B_5$ ) и после десяти циклов обучения ( $B_{10}$ ).

Из табл. 5 видно, что модель стремится исключить ошибки, которые изначально были допущены в вероятностях выборов

символов. Аналогично изменяется матрица вероятностей переходов  $A$ .

**Таблица 5**

Значения вероятностей  $P(O)$  после обучения

$P(O)$	0,0095
$P_1(O)$	0,1167
$P_5(O)$	0,1525
$P_{10}(O)$	0,8551
$P_{14}(O)$	1,0

Примечание: составлена автором на основе полученных данных в ходе исследования.



4. Викторова В. С., Степанянц А. С. Модели и методы расчета надежности технических систем. 2-е изд., испр. М.: Издательская группа URSS, ООО «ЛЕНАНД», 2016. 256 с. ISBN 978-5-9710-3368-4.
5. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности: Основные характеристики надежности и их статистический анализ. М.: Эдиториал УРСС. 2024. 584 с. ISBN 978-5-9519-4305-7.
6. Сидоров С. М. Скрытая марковская модель дублированной системы с горячим резервом и одним восстанавливающим устройством // Современные наукоемкие технологии. 2025. № 12. С. 195–204. URL: <https://top-technologies.ru/ru/article/view?id=40621> (дата обращения: 11.05.2026). DOI: 10.17513/snt.40621.
7. Ushakov I. A. Probabilistic Reliability Models. John Wiley & Sons Limited. 2012. 248 p. ISBN 9781118370742.
8. Mor B., Garhwal S., Kumar A. A Systematic Review of Hidden Markov Models and Their Applications // Archives of Computational Methods in Engineering. 2021. Vol. 28 P. 1429–1448 URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11831-020-09422-4> (дата обращения: 11.05.2026). DOI: 10.1007/s11831-020-09422-4. EDN: AHDTFV.
9. Сидоров С. М., Обжерин Ю. Е. Скрытая марковская модель системы массового обслуживания GI/G/2/0 с потерями // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2022. Т. 10 (4). URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=50049086> (дата обращения: 11.05.2026). DOI: 10.26102/2310-6018/2022.39.4.012.
10. Перегуда А. И., Белозеров В. И. Прогнозирование надежности датчиков расхода теплоносителя ШАДР-32М // Известия вузов. Ядерная энергетика. 2017. № 1. С. 51–62. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29008986> (дата обращения: 11.05.2026). DOI: 10.26583/npe.2017.1.05.
11. Пакулин Н. В., Лаврищева Е. М., Рьжов А. Г., Зеленов С. В. Анализ методов оценки надежности оборудования и систем. Практика применения методов // Труды Института системного программирования РАН. 2018. № 30 (3). С. 99–120 URL: <https://ispranproceedings.elpub.ru/jour/article/view/524> (дата обращения: 11.05.2026). DOI: 10.15514/ISPRAS-2018-30(3)-8.
12. Майструк А. В. Прогнозирование надежности и безопасности сложных технических систем при композиции законов распределения параметров структурных элементов // Научные труды КУБГТУ. 2019. № 3. С. 643–656. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=38099036> (дата обращения: 11.05.2026). EDN: XLSWHA.
13. Jurafskiy D., Martin J. H. Speech and Language Processing. Prentice Hall. 2008. 1024p. ISBN 0131873210.
14. Rabiner L. R. A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition // Proceedings of the IEEE. 1989. Vol. 77. Is. 2. P. 257–286. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/18626>. (дата обращения: 11.05.2026). DOI: 10.1109/5.18626.
15. Christopher M. Bishop. Pattern Recognition and Machine Learning. Springer. 2006. 778p. ISBN: 978-0387-31073-2.

**Конфликт интересов:** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Conflict of interest:** The author declares that there is no conflict of interest.

**Финансирование:** Автор заявляет об отсутствии внешнего финансирования.

**Financing:** The research was performed without external funding.