

УДК 378.147:330.4
DOI 10.17513/snt.40788



CC BY 4.0

РАБОТА С ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ КАК СРЕДСТВОМ ПОБУЖДЕНИЯ К САМООБУЧЕНИЮ И МОТИВАЦИИ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

¹Бредихина О. А., ¹Кулишова С. В.,
²Головин А. А. ORCID ID 0000-0001-6688-3561

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет», Курск, Российская Федерация;

²Государственное образовательное автономное учреждение высшего образования
Курской области «Курская академия государственной и муниципальной службы»,
Курск, Российская Федерация, e-mail: i@aagolovin.ru

Ограниченный объем аудиторных занятий по математическим дисциплинам приводит к необходимости выносить значительную часть материала на самостоятельное освоение. В связи с этим особую актуальность приобретает вопрос мотивации студентов к изучению дополнительных тем. Эффективным инструментом стимулирования выступает использование прикладных задач, демонстрирующих связь математического аппарата с будущей профессиональной деятельностью. Целью исследования является выявление потенциала профессионально ориентированных задач как средства побуждения студентов к самообучению. Методологической основой послужили многолетние наблюдения за студентами Юго-Западного государственного университета, а также практический опыт внедрения дополнительных учебных материалов. В качестве примера рассмотрена профессионально ориентированная задача на составление экономико-математической модели и показано, в рамках каких математических разделов ее можно использовать как дополнительный учебный материал. Решение такой задачи – от построения модели до нахождения оптимального распределения ресурсов – позволяет продемонстрировать связь не только между математикой и экономикой, но и между несколькими разделами самой математики (например, линейной алгеброй и математическим анализом). В случае возникновения у студента интереса к прикладным исследованиям предложенный подход открывает перед ним широкие возможности для дальнейшего самообразования. Таким образом, рассмотренный пример использования профессионально ориентированных задач служит действенным средством повышения учебной мотивации и, как следствие, способствует формированию более высокой квалификации будущих выпускников.

Ключевые слова: математика, профессионально ориентированная задача, экономико-математическая модель, экономика, линейное программирование, самообучение

WORKING WITH AN ECONOMIC-MATHEMATICAL MODEL AS A MEANS OF STIMULATING SELF-LEARNING AND MOTIVATION FOR MASTERING THE ACADEMIC DISCIPLINE

¹Bredikhina O. A., ¹Kulishova S. V.,
²Golovin A. A. ORCID ID 0000-0001-6688-3561

¹Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
“Southwest State University”, Kursk, Russian Federation;

²State Educational Autonomous Institution of Higher Education of the Kursk region
«Kursk Academy of State and Municipal Service», Kursk, Russian Federation,
e-mail: i@aagolovin.ru

The limited volume of classroom hours in mathematical disciplines necessitates assigning a significant portion of the material for independent study. Consequently, the issue of motivating students to explore additional topics becomes particularly relevant. An effective tool for stimulation here is the use of applied tasks that demonstrate the connection between mathematical apparatus and future professional activities. The aim of this study is to identify the potential of professionally-oriented tasks as a means of encouraging students towards self-education. The methodological basis comprised long-term observations of students at Southwest State University, as well as practical experience in implementing supplementary educational materials. As an example, we consider a professionally-oriented task involving the construction of an economic-mathematical model, and we demonstrate within which mathematical sections it can be used as additional educational material. Solving such a task – from building the model to finding the optimal resource distribution – allows us to show the connection not only between mathematics and economics, but also between several branches of mathematics itself (for example, linear algebra and calculus). Should a student develop an interest in applied research, the proposed approach opens up broad opportunities for further self-education. Thus, the examined example of using professionally-oriented tasks serves as an effective means of increasing educational motivation and, as a result, contributes to the formation of higher qualifications in future graduates.

Keywords: mathematics, economics, professionally-oriented task, economic-mathematical model, linear programming, self-study

Введение

Использование математических моделей при исследовании экономических процессов позволяет не только рассчитать оптимальное количество производимых товаров в условиях дефицита сырья из расчета получения наибольшей прибыли (или наименьших затрат), но и спрогнозировать изменения в поведении точки оптимума при изменении одного или нескольких факторов, влияющих на рассматриваемый экономический процесс [1]. Математические модели также открыли широкие возможности для экономического анализа и исследований, способствовали постепенному преобразованию качественных исследований в экономике в количественные, помогли сделать различные экономические решения более рациональными и предоставили больше возможностей для нестандартного мышления [2].

Вопреки распространенному мнению, подавляющее большинство студентов не считают экономику гуманитарной наукой, а половина студентов считает знания по математике исключительно важными для изучения экономики [3]. Еще на этапе обучения будущие экономисты должны познакомиться с базовыми математическими методами, способами исследования и анализа данных с учетом специфики выбранного направления подготовки. Навыками, необходимыми для решения экономических задач, являются умения переводить поставленные условия в математические операции, отрабатывать алгоритмы математических методов и способов решения [4]. Одним из вариантов повышения качества обучения является внедрение дополнительного прикладного материала [5].

В учебных планах четко прописано количество часов контактной и самостоятельной работы. Выбор дополнительного материала и порядок его рассмотрения возложены на педагога, так как почти никто из студентов на педагога двух курсах (а математические дисциплины читаются именно на них) не обладает навыками поиска и анализа материала [6]. В условиях уменьшения часов на математику существует необходимость в сохранении качества базовых математических знаний, поэтому на каждом занятии приходится ограничивать количество выданного учебного материала. Часть материала в таком случае переходит в дополнительный, а с ним сложно работать как с позиции варианта его подачи, так и с позиции заинтересованности обучающегося. Принуждение к самообучению не приносит должных результатов, поэтому от педагога требуется изобретательность в способах подачи дополнительного материала [7].

Таким образом, актуальность исследования определяется необходимостью заинтересовать обучающегося в изучении предмета, а профессионально ориентированные задания имеют потенциал стать тем самым инструментом достижения данной цели.

Цель исследования – выявление возможностей расширения знаний в применении математических методов и моделей в экономике, а также побуждение к самообучению студентов с помощью профессионально ориентированных задач.

Материалы и методы исследования

Исследование проводилось в установленной авторами последовательности. Основанием для исследования стало многолетнее наблюдение за студентами федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Юго-Западный государственный университет» (далее – ЮЗГУ), обучающимися по направлению 38.03.02 Менеджмент и специальности 38.05.01 Экономическая безопасность, а также экспериментальный опыт выдачи дополнительного учебного материала по математике. В течение нескольких лет при формировании предлагаемой методики обучения проводились опросы обучающихся, где отмечались их основные трудности и пожелания. Также преподаватели связывались с выпускающими кафедрами, выявляя точки соприкосновения своего предмета с профилем обучения. Полученные результаты исследования представлены в виде схемы влияния внедрения рассмотренной профессионально ориентированной задачи в дополнительный математический материал.

Результаты исследования и их обсуждение

В качестве примера рассмотрим профессионально ориентированную задачу на составление экономико-математической модели (далее – ЭММ) и определим, в какие математические темы можно ее внедрить в качестве дополнительного учебного материала, исходя из последовательности тем, выдаваемых студентам. По каждой отмеченной математической теме перечислим этапы работы с ЭММ, которые можно выполнить, зная изучаемый в тот момент математический аппарат.

О наличии дополнительного учебного материала педагог должен сообщить обучающимся сразу. К дополнительному материалу, выдаваемому на первом занятии, относится: условие задачи; перевод текстовой формы подачи материала в математические структуры, то есть составление ЭММ; первичный анализ полученной модели и возможности для ее упрощения; знакомство

с математическим программированием, его частным случаем – линейным программированием и методами линейного программирования [8].

1. *Условие задачи.* Фирма «Сияние» выпускает женские сумки и клатчи. Требуется определить, сколько единиц товаров каждого вида необходимо произвести для получения максимальной выручки от их реализации, если стоимость продажи одной сумки равна 3800 руб., а одного клатча – 3200 руб. Данные о материалах, используемых для производства сумок, а также о запасах сырья представлены в табл. 1.

2. *Перевод текстовой формы подачи материала в математические структуры, то есть составление ЭММ.* Принимая за переменные x_1 и x_2 соответственно число сумок и клатчей, предлагаемых к производству, можем составить функцию выручки как произведение цены товара на его количество при учете производства двух видов продукции, то есть $F = 3800 \cdot x_1 + 3200 \cdot x_2$ (руб.). По условию выручка от реализации должна быть максимальной, значит $F \rightarrow \max$. Теперь перейдем к исследованию данных о материалах, необходимых для производства единицы продукции, и запасах сырья, учитывая условие неотрицательности обеих переменных. Результатом станет система неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} 100 \cdot x_1 + 80 \cdot x_2 \leq 4 \cdot 300, \\ 400 \cdot x_1 + 500 \cdot x_2 \leq 12 \cdot 500, \\ 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 30, \\ x_1 + x_2 \leq 13, \\ x_2 \leq 10, \\ 0,5 \cdot x_1 \leq 5, \\ 0,4 \cdot x_1 + 0,1 \cdot x_2 \leq 200, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{array} \right.$$

После упрощения неравенств системы получим ЭММ, состоящую из целевой

функции $F = 3800 \cdot x_1 + 3200 \cdot x_2 \rightarrow \max$ и системы ограничений

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 60, \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 60, \\ x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 + x_2 \leq 13, \\ x_2 \leq 10, \\ x_1 \leq 10, \\ 4 \cdot x_1 + x_2 \leq 2000, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{array} \right.$$

3. *Первичный анализ полученной модели и возможности для ее упрощения.* Чем меньше неравенств в системе, тем проще будет найти ее решение, поэтому оценим каждое из условий. Из неравенств $x_1 + x_2 \leq 15$ и $x_1 + x_2 \leq 13$ можно оставить только второе, а условие $4 \cdot x_1 + x_2 \leq 2000$ сильно отличается от других тем, что в правой части находится число, в разы превышающее соответствующие числа в остальных неравенствах системы. Поскольку решением каждого неравенства предложенной системы станет полуплоскость, находящаяся ниже прямой, полученной заменой знаков неравенств на знаки равенств, то условием $4 \cdot x_1 + x_2 \leq 2000$ можно пренебречь, так как любая точка, принадлежащая области решения оставшихся неравенств, обязательно попадет в область решения этого неравенства. В результате этих упрощений система ограничений примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 60, \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 60, \\ x_1 + x_2 \leq 13, \\ x_2 \leq 10, \\ x_1 \leq 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{array} \right.$$

Таблица 1

Исходные данные

Сырье	Сумка	Клатч	Запасы сырья
Леска, м	100	80	4 мотка по 300 м
Бусины, г	400	500	12 пачек по 500 г
Карабин круглый, шт.	2	2	30
Застежка магнитная, шт.	1	1	13
Цепь, шт.	–	1	10
Атлас, м	0,5	–	5 м
Нитки, м	0,4	0,1	1 катушка по 200 м

Примечание: составлена авторами на основе полученных данных в ходе исследования.

4. *Знакомство с математическим программированием, его частным случаем – линейным программированием и методами линейного программирования.* Математическое программирование занимается изучением проблем принятия решений, которые могут быть математически сформулированы как задачи нахождения максимума (минимума) некоторой функции многих переменных (целевой функции) при заданной системе ограничений на основные переменные задачи. Если целевая функция линейная, а на ее переменные наложены линейные ограничения, то задача будет относиться к линейному программированию [9]. Поскольку полученная ЭММ содержит все переменные только в первой степени, то нахождение оптимального решения будет осуществляться посредством методов линейного программирования. Данная задача относится к типу задач об использовании ресурсов (задача планирования производства). Можно воспользоваться двумя методами нахождения оптимального решения – симплексным (с помощью симплексных таблиц) и графическим. Главным условием для использования графического метода является наличие только двух независимых переменных, для симплексного метода переменных может быть больше.

После выдачи первых четырех этапов работы с дополнительным материалом, обратимся к темам, выдаваемым обучающимся. В первый раздел математики для экономистов в ЮЗГУ «Элементы линейной алгебры» входят следующие три основные темы: определители, действия с матрицами и системы линейных уравнений. Работа с дополнительным материалом по приведенной задаче начинается при знакомстве

с темой «Действия с матрицами». Здесь выдается следующий дополнительный материал: транспонирование матрицы для составления двойственной задачи линейного программирования; перевод системы ограничений в канонический вид; использование обратной матрицы для проверки правильности оптимального симплексного решения.

5. *Транспонирование матрицы для составления двойственной задачи линейного программирования.* Предположим, что организация хочет приобрести не продукцию, а сырье. Обозначим через $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7$ цены единицы сырья в следующем порядке: леска, бусины, карабин, застежка, цепь, атлас, нитки. Двойственная задача соответствует следующей экономической проблеме: по каким минимальным ценам следует продавать ресурсы, чтобы прибыль от их реализации была не меньше прибыли, полученной от реализации продукции, изготавливаемой с использованием этих ресурсов?

Условие двойственной задачи формируется через операцию транспонирования матрицы, составленной из коэффициентов и свободных членов системы

$$\left\{ \begin{array}{l} 100 \cdot x_1 + 80 \cdot x_2 \leq 1200, \\ 400 \cdot x_1 + 500 \cdot x_2 \leq 6000, \\ 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 30, \\ x_1 + x_2 \leq 13, \\ x_2 \leq 10, \\ 0,5 \cdot x_1 \leq 5, \\ 0,4 \cdot x_1 + 0,1 \cdot x_2 \leq 200 \end{array} \right.$$

и целевой функции $F = 3800 \cdot x_1 + 3200 \cdot x_2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3800 & 3200 & \underline{F} & & & & & & \\ 100 & 80 & 1200 & & & & & & \\ 400 & 500 & 6000 & & & & & & \\ 2 & 2 & 30 & & & & & & \\ 1 & 1 & 13 & & & & & & \\ 0 & 1 & 10 & & & & & & \\ 0,5 & 0 & 5 & & & & & & \\ 0,4 & 0,1 & 200 & & & & & & \end{array} \right)^T = \left(\begin{array}{cccccccc} 3800 & 100 & 400 & 2 & 1 & 0 & 0,5 & 0,4 \\ \underline{3200} & 80 & 500 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0,1 \\ G & 1200 & 6000 & 30 & 13 & 10 & 5 & 200 \end{array} \right),$$

следовательно, двойственная задача заключается в нахождении минимального значения целевой функции

$$G = 1200 \cdot y_1 + 6000 \cdot y_2 + 30 \cdot y_3 + 13 \cdot y_4 + 10 \cdot y_5 + 5 \cdot y_6 + 200 \cdot y_7$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 100 \cdot y_1 + 400 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 + y_4 + 0,5 \cdot y_6 + 0,4 \cdot y_7 \geq 3800, \\ 80 \cdot y_1 + 500 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 + y_4 + y_5 + 0,1 \cdot y_7 \geq 3200, \\ y_j \geq 0, j = \overline{1,7}. \end{cases}$$

6. *Перевод системы ограничений в канонический вид.* Симплексный метод требует перевода системы ограничений в канонический вид, то есть условия должны быть записаны в виде равенств, из неравенств остается только неотрицательность переменных. Если записать в левые части неравенств по одной дополнительной неотрицательной переменной x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 соответственно, то получим изменение системы

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 60, \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 60, \\ x_1 + x_2 \leq 13, \\ x_2 \leq 10, \\ x_1 \leq 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2} \end{cases}$$

на $\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_3 = 60, \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + x_4 = 60, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 13, \\ x_2 + x_6 = 10, \\ x_1 + x_7 = 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,7}. \end{cases}$

7. *Использование обратной матрицы для проверки правильности оптимального симплексного решения.* Этот этап работы с ЭММ должен проводиться уже после получения оптимального решения, поэтому пока примем на веру, что симплексное решение задачи – это матрица-строка вида $X_{\text{опт}} = (8 \ 5 \ 0 \ 3 \ 0 \ 5 \ 2)$, каждый элемент которой соответствует значениям переменных x_j . Составим матрицу A из коэффициентов канонической системы ограничений для ненулевых переменных, взятых из матрицы $X_{\text{опт}}$, то есть

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если найти обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то ее элементы можно увидеть в оптимальной симплексной таблице.

В следующей теме, «Системы линейных уравнений», описываются способы исследования, основанные на матричной алгебре, показывающие, сколько решений может иметь система и методы нахождения решений в случае их наличия. Одним из самых сложных методов для решения систем линейных уравнений традиционно считается метод Гаусса, поскольку он по сравнению с методом Крамера и матричным методом меньше поддается алгоритмизации. Это связано с тем, что оба указанных метода применяются только для систем, в которых количество уравнений и неизвестных совпадает, а метод Гаусса является универсальным и применяется при решении любых систем линейных уравнений. В случае однородной системы с одинаковым количеством уравнений и переменных метод Гаусса является основным для нахождения ненулевых решений.

На изучение систем линейных уравнений у экономистов в среднем отводится одно или два практических занятия, которых хватает только для освоения решения базовых математических задач. Прикладной материал по изучаемой теме должен уходить в дополнительный, выкладываемый в электронной образовательной среде, а именно: знакомство со свободными и базисными переменными и нахождение начального допустимого решения из канонической системы ограничений; использование элементарных преобразований для получения строки из неположительных коэффициентов в целевой функции; нахождение оптимума с помощью симплексных таблиц [10].

Приведем дополнительный материал по системам линейных уравнений из рассматриваемой профессионально ориентированной задачи.

8. Знакомство со свободными и базисными переменными и нахождение начального допустимого решения из канонической системы ограничений. В системе ограничений

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_3 = 60, \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + x_4 = 60, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 13, \\ x_2 + x_6 = 10, \\ x_1 + x_7 = 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,7}. \end{cases}$$

переменные x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 вводились дополнительно, они будут называться базисными, а переменные x_1 и x_2 считаются свободными. Подставив в свободные переменные нулевые значения, определяем численные значения базисных переменных. Полученная матрица-строка, содержащая все переменные, будет являться начальным допустимым решением системы ограничений. В нашем случае $X_1 = (0 \ 0 \ 60 \ 60 \ 13 \ 10 \ 10)$.

9. Использование элементарных преобразований для получения строки из неположительных коэффициентов в целевой функции. С помощью элементарных преобразований требуется перейти от одной канонической системы ограничений к другой так, чтобы решение каждой полученной системы увеличивало значение целевой

функции вплоть до максимального значения. Подобные преобразования используются в методе Гаусса с той лишь разницей, что в нем итоговая расширенная матрица системы линейных уравнений приводится к треугольному (или трапециoidalному) виду, из которого решения системы усматриваются непосредственно. Для симплексного метода принципиально получить неположительные коэффициенты переменных в целевой функции.

Составим расширенную матрицу, первая строка которой содержит коэффициенты перед неизвестными из целевой функции (целевая функция должна содержать только свободные переменные), а остальные строки соответствуют числам из расширенной матрицы канонической системы ограничений. Из первой строки определяется переменная с максимальным положительным коэффициентом, она станет новой базисной в последующем действии. Затем вычисляются отношения свободных членов к соответствующим коэффициентам перед той же неизвестной в каждом уравнении системы и выбирается минимум среди полученных чисел. По нему определяется строка, вычитая (или складывая) которую нужно число раз, обнуляем коэффициенты перед выбранной ранее переменной. Выбранные строка и столбец выделены в приведенном решении стрелками. Такими действиями добиваемся неположительных значений для первой строки.

$$\begin{pmatrix} 3800 \downarrow & 3200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \leftarrow & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3200 \downarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & -3800 & -38000 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \leftarrow \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -800 & 0 & 0 & 0 & 200 \downarrow & -46000 \\ 0 & 1 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & -1,25 & 2,5 \\ 0 & 0 & -1,25 & 1 & 0 & 0 & 2,25 & 7,5 \\ 0 & 0 & -0,25 & 0 & 1 & 0 & 0,25 & 0,5 \leftarrow \\ 0 & 0 & -0,25 & 0 & 0 & 1 & 1,25 & 7,5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -600 & 0 & -800 & 0 & 0 & -46400 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -9 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

10. Нахождение оптимума с помощью симплексных таблиц. Оформление через матрицы в данном случае ухудшает понимание, поэтому можно симплексное решение представить в виде таблицы (табл. 2).

Решение в симплексной таблице можно проверить, посмотрев на элементы обратной матрицы A^{-1} , найденной ранее. Они соответствуют числам в столбцах до-

полнительных переменных, если строки по новым базисным (ненулевым) переменным расположить в порядке x_1, x_2, x_3, x_6, x_7 . Способ нахождения решения двойственной задачи по формуле $Y_{\text{опт}} = C \cdot A^{-1}$, где C – матрица-строка коэффициентов при базисных переменных целевой функции в оптимальном решении исходной задачи [11].

Таблица 2

Расчет оптимального решения задачи симплексным методом

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Свободный член
F	3800	3200	0	0	0	0	0	0
x_3	5	4	1	0	0	0	0	60
x_4	4	5	0	1	0	0	0	60
x_5	1	1	0	0	1	0	0	13
x_6	0	1	0	0	0	1	0	10
x_7	1	0	0	0	0	0	1	10
$X_1 = (0\ 0\ 60\ 60\ 13\ 10\ 10), F_1 = 0$								
F	0	3200	0	0	0	0	-3800	-38000
x_3	0	4	1	0	0	0	-5	10
x_4	0	5	0	1	0	0	-4	20
x_5	0	1	0	0	1	0	-1	3
x_6	0	1	0	0	0	1	0	10
x_1	1	0	0	0	0	0	1	10
$X_2 = (10\ 0\ 10\ 20\ 3\ 10\ 0), F_2 = 38000$								
F	0	0	-800	0	0	0	200	-46000
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$-\frac{5}{4}$	2,5
x_4	0	0	$-\frac{5}{4}$	1	0	0	$\frac{9}{4}$	7,5
x_5	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	0	$\frac{1}{4}$	0,5
x_6	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{5}{4}$	7,5
x_1	1	0	0	0	0	0	1	10
$X_3 = (10\ 2,5\ 0\ 7,5\ 0,5\ 7,5\ 0), F_3 = 46000$								
F	0	0	-600	0	-800	0	0	-46400
x_2	0	1	-1	0	5	0	0	5
x_4	0	0	1	1	-9	0	0	3
x_7	0	0	-1	0	4	0	1	2
x_6	0	0	1	0	-5	1	0	5
x_1	1	0	1	0	-4	0	0	8
$X_{\text{опт}} = X_4 = (8\ 5\ 0\ 3\ 0\ 5\ 2), F_{\text{max}} = 46400$								

Примечание: составлена авторами на основе полученных данных в ходе исследования.

После раздела «Элементы линейной алгебры» в курсе математики для экономистов следует раздел «Векторная алгебра», в который можно включить часть графического метода линейного программирования.

II. Построение вектора-градиента целевой функции и линии уровня. Для целевой функции $F = 3800 \cdot x_1 + 3200 \cdot x_2$ градиент, то есть вектор, показывающий направление наиболее быстрого ее увеличения, имеет координаты $\vec{q}(3800; 3200)$, потребуются

лишь определить направление этого вектора, для этого нужно правильно выбрать масштаб. Исходя из того, что на рисунке в дальнейшем придется также изобразить область решений неравенств из системы ограничений, можно выбрать координаты вектора-градиента пропорционально соответствующим координатам, например $\vec{q}(9, 5; 8)$. Перпендикулярно вектору-градиенту проходят линии уровня целевой функции, которые имеют вид $F = C, C = const$.

Правильно определенное значение постоянной C и даст искомую максимальную выручку. На начальном этапе можно построить одну линию уровня вида $F = 0$, то есть прямую $3800 \cdot x_1 + 3200 \cdot x_2 = 0$.

Графический метод нахождения оптимума рассматриваемой профессионально ориентированной задачи в дополнительный учебный материал раздела «Аналитическая геометрия» может быть вставлен при работе с декартовой системой координат на плоскости.

Дополнительным материалом для темы «Прямые на плоскости» могут стать: построение области допустимых решений и нахождение точки оптимума графическим методом линейного программирования.

12. *Построение области допустимых решений.* Область допустимых решений – это область решения системы ограниченных из ЭММ. Используя нумерацию прямых $5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 60(1)$, $4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 60(2)$, $x_1 + x_2 = 13(3)$, $x_2 = 10(4)$, $x_1 = 10(5)$, определим, что область допустимых решений – это многоугольник $OABCDEF$ (рис. 1). Точка оптимума, содержащая количество необходимых к выпуску сумок и клатчей, должна лежать в найденной области [12].

13. *Нахождение точки оптимума графическим методом линейного программирования.* Для нахождения точки максимума целевой функции требуется перенести прямую $F = 0$ параллельно самой себе в направлении вектора \vec{q} до конечной точки заштрихованной области. В случае целочисленного решения полученная точка и будет решением задачи, в противном случае требуется найти ближайшую к ней целочисленную точку заштрихованной области, двигая линию уровня назад. В настоящее время существует множество графических калькуляторов, позволяющих быстро справиться с построениями, например, Mathway, Desmos. Если есть сложности с выбором точки оптимума из нескольких, то ее можно определить аналитически, подставив координаты точек, подозрительных на оптимум, в целевую функцию. Например, на рис. 1 имеются три точки, подозрительные на оптимум: $C = (2) \cap (3)$, $D = (1) \cap (3)$ и $E = (1) \cap (5)$. Определяем их координаты из систем, содержащих уравнения указанных прямых, затем находим значения целевой функции $F(C) = F(5,8) = 44600$, $F(D) = F(8,5) = 46400$ и $F(E) = F(10,2.5) = 46000$. Очевидно, что точкой оптимума является точка D , значит, продажа товара (8 сумок и 5 клатчей) при указанных в задаче условиях приведет к максимальной выручке в 46 400 руб.

Рассмотренная профессионально ориентированная задача дает возможность объединения материала не только из всех тем

алгебры и геометрии, но может быть включена в дополнительный материал по математическому анализу. Целевая функция в таком случае станет примером функции двух переменных с линиями уровня $F = C$, координаты вектора-градиента можно най-

ти через частные производные $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial F}{\partial x_2}$.

Важно также отметить, что нельзя использовать метод нахождения максимума функции через производные, так как целевая функция не имеет стационарных точек.

Постооптимальный анализ является важным этапом после решения задачи линейного программирования [13]. Имеются возможности для дальнейшего анализа данных:

1) есть закономерности в симплексном и графическом решении, например, во всех полных матрицах-решениях из симплексных таблиц элементы первого и второго столбцов соответствуют точкам O, F, E и D графического решения, значит, симплексные решения идут по вершинам области допустимых решений от начала координат до точки оптимума по направлению, содержащему наименьшее количество этих точек;

2) значения дополнительных переменных определяют остатки запасов сырья, то есть оптимальная симплексная таблица дает иные данные помимо искомого оптимума;

3) можно обратиться к двойственной задаче и познакомиться с методами ее решения;

4) исследовать влияние изменения одного или нескольких факторов (запасов сырья, цены на производимый товар) на оптимум.

Систематизируя возможное влияние лишь одной приведенной профессионально ориентированной задачи на связи как внутри математики, так и междисциплинарные связи (рис. 2), можно отметить важность и нужность такой работы с дополнительным материалом. Использование математических методов позволит добиться высоких результатов в решении экономических задач [14].

Учебная мотивация, напрямую связанная с образовательным результатом, способна эффективно влиять на обучающегося лишь в том случае, если сами педагоги и разработчики курса имеют адекватное и целостное представление о понятии учебной мотивации, его компонентах и методах ее стимулирования [15]. При наличии заинтересованности прикладным материалом можно предложить обучающемуся самому придумать задачу на составление ЭММ с учетом знаний в области экономики, выдаваемых его выпускающей кафедрой, такие исследования могут стать темой для выступлений на математической или экономической конференции, либо основой для научной статьи.

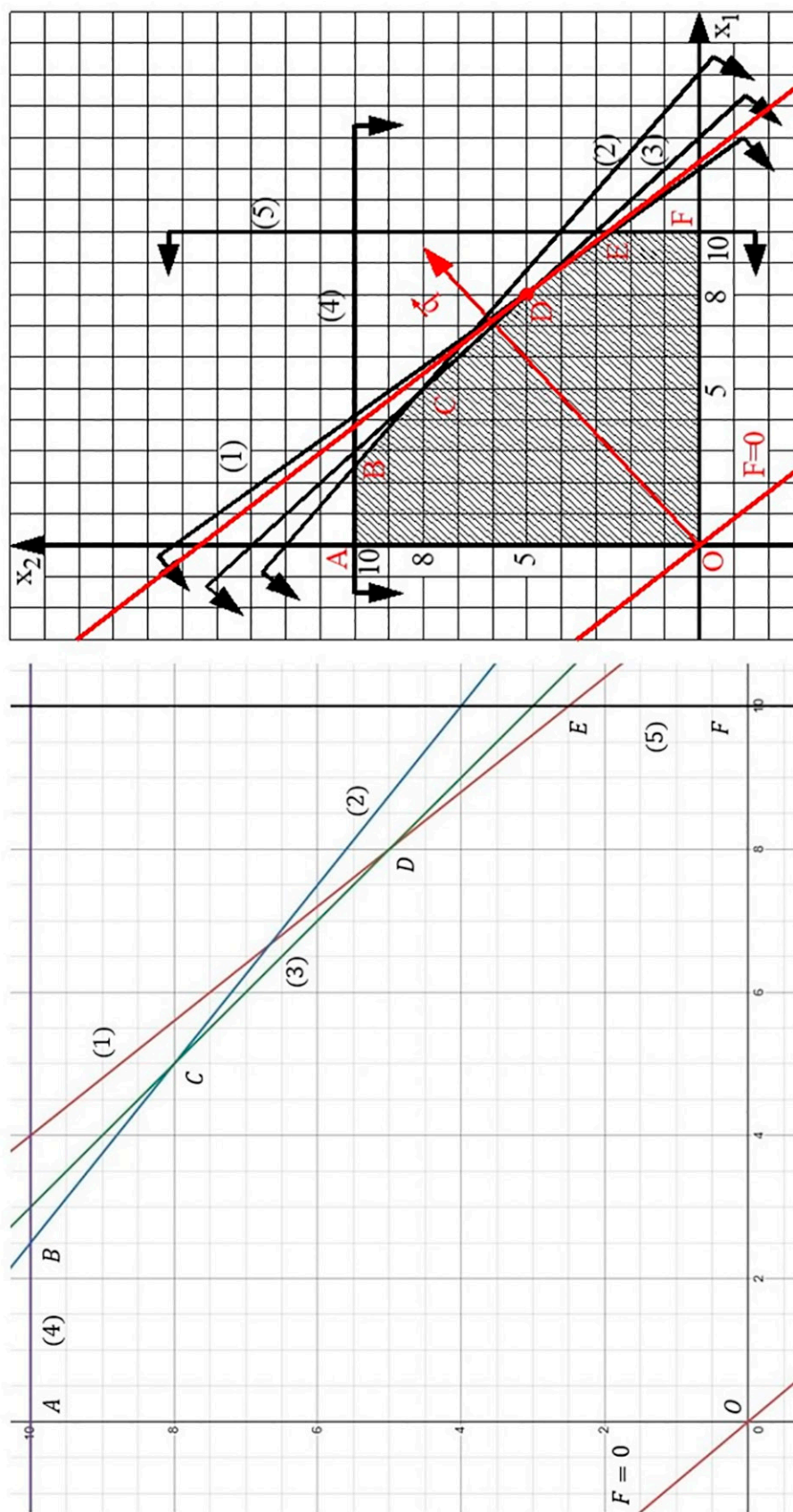


Рис. 1. Решение задачи графическим методом
Примечание: составлен авторами по результатам данного исследования

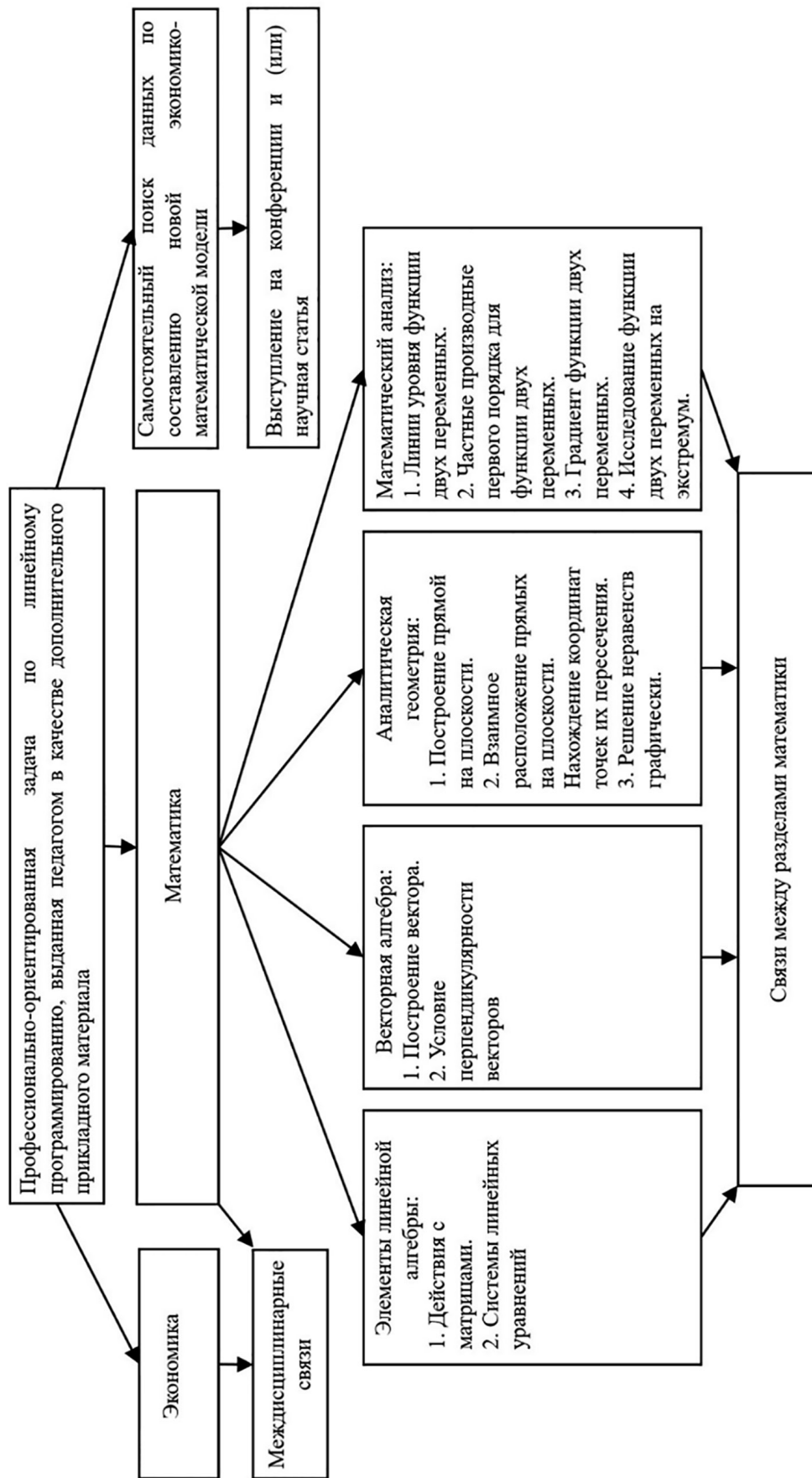


Рис. 2. Влияние внедрения рассмотренной профессионально ориентированной задачи в дополнительный математический материал
Примечание: составлен авторами по результатам данного исследования

Заключение

Таким образом, математика включает в себя множество разделов, основательно изучить каждый из них во время занятий не представляется возможным, однако будущие экономисты должны обладать базовыми знаниями основных ее разделов – алгебры и геометрии, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики. При необходимости важно уметь обращаться к иным математическим разделам, и знакомство с ними хотя бы в виде дополнительного учебного материала может помочь в дальнейшей профессиональной деятельности. Приведенная в исследовании профессионально ориентированная задача является простейшей задачей линейного программирования. Для заинтересованных студентов можно предложить более сложные варианты или предложить обучающимся самим определить задачу, решающую конкретную экономическую проблему. Реализация профессионально ориентированного обучения позволит значительно повысить мотивационные стимулы, а также обеспечит более высокую квалификацию студентов-экономистов.

Список литературы

1. Бредихина О. А., Фильчакова С. В., Головин А. А. Возможности математического моделирования для развития способности планировать оптимальное производство // Экономика и предпринимательство. 2020. № 5 (118). С. 1221–1227. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42937769> (дата обращения: 05.03.2026). DOI: 10.34925/EIP.2020.118.5.255.
2. Гачаев А. М., Салгирев Р. Р. Стратегии применения математических моделей в экономической сфере // Экономика и управление: проблемы, решения. 2025. Т. 9. № 2 (155). С. 5–10. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=80475373> (дата обращения: 03.03.2026). DOI: 10.36871/ek.up.p.r.2025.02.09.001.
3. Белокрылов К. А., Киварина М. В., Мясников А. А., Огурцова Е. В. Роль математики в преподавании базовых экономических дисциплин: мнения студентов и рекомендации // Журнал Новой экономической ассоциации. 2019. № 3 (43). С. 116–150. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41121548> (дата обращения: 08.03.2026). DOI: 10.31737/2221-2264-2019-43-3-6.
4. Бредихина О. А., Фильчакова С. В., Головин А. А. Использование математических способов и методов при решении задач в области экономики // Вестник евразийской науки. 2019. Т. 11. № 5. С. 45. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41833786> (дата обращения: 10.03.2026).
5. Максимова Т. С. Роль систем практико-ориентированных задач по высшей математике при формировании профессиональной направленности студентов // Современное образование: содержание, технологии, качество. 2024. Т. 1. С. 236–238. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=68612490> (дата обращения: 11.03.2026).
6. Останина С. А., Птицына Е. В., Анцева В. П. Проблемы перехода на дистанционное обучение в условиях цифровизации образования: взгляд преподавателей и студентов // Современные проблемы науки и образования. 2021. № 6. С. 30. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=47669976> (дата обращения: 03.03.2026). DOI: 10.17513/spno.31257.
7. Ланина С. Ю., Подолько Е. А. Профессионально ориентированные задачи как средство профессиональной мотивации студентов экономического профиля (на примере математики) // Вопросы педагогики. 2020. № 9–1. С. 75–78. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43940337> (дата обращения: 12.03.2026).
8. Абдувахобов Д. А. Профессионально направленные задачи в обучении математике // The Scientific Heritage. 2023. № 126 (126). С. 21–22. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=55153238> (дата обращения: 08.03.2026). DOI: 10.5281/zenodo.10299417.
9. Львова В. Д. Применение профессионально ориентированных задач для формирования ключевых компетенций при изучении математики // Вопросы педагогики. 2018. № 7. С. 65–69. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35340203> (дата обращения: 02.03.2026).
10. Прудникова Т. А., Посакалова Т. А. Зарубежный опыт применения информационно-коммуникационных технологий в целях повышения учебной мотивации // Современная зарубежная психология. 2019. Т. 8. № 2. С. 67–82. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38978147> (дата обращения: 04.03.2026). DOI: 10.17759/jmfp.2019080107.
11. Бредихина О. А., Головин А. А., Спицына А. О. Экономико-математические методы и инструменты в решении задачи оптимизации // Фундаментальные исследования. 2021. № 9. С. 5–11. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46640859> (дата обращения: 11.03.2026). DOI: 10.17513/ir.43086.
12. Хасанов А. С., Зверева А. И. Графический анализ чувствительности оптимальных решений задач линейного программирования // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2021. № 2. С. 61–76. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46265467> (дата обращения: 01.03.2026). DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-61-76.
13. Салтыкова Е. В., Овсянников А. В. Формирование профессиональной компетентности будущих инженеров с помощью профессионально ориентированных задач при обучении математике // Вестник педагогического опыта. 2021. № 48. С. 87–91. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44785733> (дата обращения: 04.03.2026).
14. Бредихина О. А., Фильчакова С. В., Головин А. А. Возможности использования экономико-математических методов при выборе цены товаров и определении оптимальных запасов сырья для их производства // Вестник евразийской науки. 2023. Т. 15. № 4. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=55881427> (дата обращения: 10.03.2026).
15. Архипова Н. А., Евдокимова Н. Н., Рудина Т. В. К вопросу о профессионально-направленных задачах в курсе математики // Наука и культура России. 2020. Т. 1. С. 227–229. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43848988> (дата обращения: 12.03.2026).

Конфликт интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest: The authors declare that there is no conflict of interest.

Финансирование: Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования.

Financing: The research was performed without external funding.