



## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ И ФИЛЬТРАЦИОННОГО РАЗРУШЕНИЯ РАЗЛИЧНЫМИ СРЕДАМИ ЭЛЕМЕНТОВ ГРУНТОВЫХ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ

Качаев А. Е. ORCID ID 0000-0001-6840-2477

*Федеральное государственное бюджетное научное учреждение  
«Всероссийский научно-исследовательский институт систем орошения  
и сельхозводоснабжения «Радуга», Радужный, Российская Федерация,  
e-mail: doctor\_cement@mail.ru*

Исследования в области разработки и верификация математических моделей процессов фильтрации и разрушения грунтовых элементов гидротехнических сооружений весьма актуальны в контексте климатических изменений и техногенных катастроф. С их помощью прогнозирование аварийных ситуаций на грунтовых гидротехнических сооружениях становится реальным и необходимым. В статье рассматривается разработка обобщенной математической модели фильтрации в грунтовых плотинах с учётом деформаций пористой среды, переменной пористости и влияния техногенных факторов, таких как концентрация солей, температура и осмотическое воздействие. Традиционные модели фильтрации, основанные на законе Дарси, не учитывают динамические изменения свойств грунта и сложные граничные условия, что снижает их применимость в современных инженерных задачах. Предлагаемый подход объединяет теории фильтрации, переноса солей, теплопереноса и осаждения пульпы, позволяет прогнозировать развитие области размыва в теле плотины. Модель построена на трехмерной геометрии, выделяющей тело дамбы и область размыва с учётом движущихся границ и разнообразных физических и химических факторов. Результаты моделирования демонстрируют возможность комплексного анализа устойчивости гидротехнических сооружений при воздействии жидкостей с различными физико-химическими свойствами. Предложенная модель создаёт основу для дальнейшей верификации и численных исследований, что способствует повышению надёжности и безопасности грунтовых плотин в условиях современной инженерной застройки.

**Ключевые слова:** фильтрация, переменная пористость, область размыва, деформируемая пористая среда, движущаяся граница, перенос солей, пульпа

## MATHEMATICAL MODELING OF FILTRATION AND FILTRATION DESTRUCTION OF ELEMENTS OF SOIL HYDRAULIC STRUCTURES BY VARIOUS ENVIRONMENT

Kachaev A. E. ORCID ID 0000-0001-6840-2477

*Federal State Budgetary Scientific Institution All-Russian Research Institute  
of Irrigation and Agricultural Water Supply Systems "Raduga", Raduzhny,  
Russian Federation, e-mail: doctor\_cement@mail.ru*

Research into the development and verification of mathematical models for filtration and failure of soil elements in hydraulic structures is highly relevant in the context of climate change and man-made disasters. These models make predicting emergency situations at soil hydraulic structures feasible and essential. This article discusses the development of a generalized mathematical model for filtration in earthen dams, taking into account porous medium deformations, variable porosity, and the influence of man-made factors such as salt concentration, temperature, and osmotic effects. Traditional filtration models based on Darcy's law do not account for dynamic changes in soil properties and complex boundary conditions, which limits their applicability to modern engineering problems. The proposed approach integrates the theories of filtration, salt transport, heat transfer, and slurry deposition, enabling prediction of the development of the erosion zone within the dam body. The model is constructed using three-dimensional geometry that distinguishes the dam body and the erosion zone, accounting for moving boundaries and various physical and chemical factors. The modeling results demonstrate the feasibility of comprehensive stability analysis of hydraulic structures exposed to fluids with varying physical and chemical properties. The proposed model provides a basis for further verification and numerical studies, thereby improving the reliability and safety of earth dams in modern engineering environments.

**Keywords:** filtration, variable porosity, erosion zone, deformable porous medium, moving boundary, salt transport, pulp

### Введение

В современном мире возрастают требования к надёжности и безопасности гидротехнических сооружений, построенных на территориях с инженерной застройкой (сельскохозяйственные здания, мелиоративные системы и насосные станции и др).

Грунтовые плотины, резервуары и дренажные системы работают в условиях сложной взаимосвязи гидродинамических, тепловых, химических и механических процессов внутри деформируемых пористых сред [1].

Традиционные модели фильтрации по Дарси [2, с. 69], как правило, предпола-

гают статическую пористость и линейные взаимосвязи, что ограничивает их применение к реальным объектам, где свойства грунта качества изменяются во времени под влиянием внешних факторов [3]. В условиях современных проектов и мониторинга требуется учитывать деформации пористой среды – водонасыщенного (дренированного) или неводонасыщенного (недренированного) грунта, переменную пористость и сложные граничные условия на их движущихся поверхностях и границах раздела [4].

Современные подходы к моделированию фильтрации в грунтах обычно опираются на классические теории потока в пористой среде (Дарси [5], расширения типа Бринкмана [6], а при влажном состоянии – уравнение Ричардса [7]). В моделях эрозийной устойчивости и пороговых условий переноса частиц используется критерий Шильдса [8]. Однако существующие модели чаще всего ограничены одной породой или конкретной гидродинамической и геотехнической конфигурацией, не учитывают в полной мере переходы между насыщенными и ненасыщенными режимами, неоднородность состава грунтовых слоев, а также механическую реакцию грунтов на фильтрационную нагрузку в условиях многослойной геометрии оснований гидротехнических сооружений.

**Цель исследования** заключается в разработке и формализации обобщенной математической модели, позволяющей прогнозировать развитие области размыва, изменение поверхностей размыва и устойчивости плотины под влиянием техногенных факторов при воздействии на грунт жидкостей с различными физико-химическими свойствами.

#### Материалы и методы исследования

Теоретико-аналитической основой настоящего исследования стал выбор и обобщение законов фильтрации (Дарси [5], Дарси – Герсеванова [2, с. 69]) с учётом деформаций пористой среды – грунта, его переменной пористости и влияния техногенных факторов (концентрации солей, температуры, осмотического воздействия). При этом формирование обобщенной модели переноса осуществлялось с помощью совместного описания фильтрации, переноса солей, теплообмена и осаждения пульпы в области размыва.

Математическое описание задач проводилось по следующим трекам.

1. Геометрия и области: разделение задачи на тело дамбы (плотины)  $O_1$  и область размыва ( $O_2$ ) с соответствующими границами и движущейся поверхностью впадины

трещины; определение сопряжённых условий на границе  $\Gamma_r$ .

2. Определение переменных и тензоров: давление  $P$ , концентрация соли  $C$ , температура  $T$ , концентрация пульпы  $S$ ; коэффициенты фильтрации  $k_h(X, t)$ , термодиффузии  $D_T$ , осмотические и прочие.

3. Постановка задач в натуральной постановке: формулировка операторов  $l_p, l_c, l_T$  и  $l_s$  для давления, концентрации соли, температуры и пульпы, соответственно; учет начальных условий ( $P_0, C_0, T_0, S_0$ ) и комбинированных граничных условий.

4. Разработка сопряжённых условий: учет зависимости  $e, \rho_{жс}, \rho_c$  от физико-химического состояния среды на границе  $\Gamma_r$  и в области размыва.

Перенос массы и тепло учитывались с помощью:

1) уравнения переноса соли – с учётом конвекции, диффузии и осмоса; с учётом влияния коэффициентов осмоса, которые зависят от температуры и концентраций различных сред;

2) уравнения теплопереноса – с учётом термодинамических факторов, а также влияния теплоёмкости и теплопроводности; с учетом связи переноса солей и химико-термическими эффектами на процесс фильтрации;

3) взаимодействия процессов массотеплопереноса с фильтрацией – анализ мультифизических связей и их влияния на коэффициент  $k_h$  и динамику области размыва.

#### Результаты исследования и их обсуждение

В результате математического моделирования поставленных задач разработана обобщенная математическая модель, позволяющая прогнозировать развитие области размыва, изменение поверхностей размыва и устойчивость дамбы (плотины) под влиянием техногенных факторов при воздействии на грунт жидкостей с различными физико-химическими свойствами. Она, помимо всего прочего, содержит в себе математическую модель фильтрации тела грунтовой плотины с уплотненной областью размыва, математическую модель фильтрации в биопластинчатом фильтре. В дальнейшем полученная математическая модель будет верифицирована с помощью численного расчета ее основных параметров.

Грунт при моделировании считается изотропным. На рис. 1 показана грунтовая дамба (плотина), в теле которой расположена дренажная система или потенциальный трубный водосброс – водовод. В результате повреждения водовода образуется область размыва (заштрихованная область на рис. 1).

В теле дамбы (плотины) происходят сложные процессы фильтрации, которые каким-либо образом зависят от наличия работающего или поврежденного водовода. Существование такого водовода влияет на расположение поверхности впадины, на которой он находится, а также на процессы фильтрации в области околотрубного водосбора. При повреждении такого водовода образуется область размыва со значительным выносом грунта, которая со временем может увеличиваться и вызывать обрушение плотины – проран [9].

На основании расчетной модели, показанной на рис. 1, будем считать весь объем дамбы (плотины) некоторой трехмерной областью  $O_1$ , на которую наложен ряд ограничений –  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ . При этом  $\Gamma_0$  – это свободная поверхность (граница), представляющая собой поверхность гребня дамбы (плотины). В объеме  $O_1$  находится водовод и область размыва, которую обозначим как  $O_2$ . На область размыва  $O_2$  наложим ряд взаимосвязанных ограничений:  $\Gamma_2, \Gamma_3$  – участки границы, через которые водовод «дышит», контактируя с окружающей атмосферой;  $\Gamma_1, \Gamma_4, \Gamma_5$  – границы служат абсолютными барьерами, через которые ничего не проникает;  $\Gamma_{12}$  – граница становится актуальной, когда процесс вымывания грунта происходит с высокой скоростью;  $\Gamma_{11}$  – граница играет ключевую роль в определении взаимосвязи между различными параметрами, так как она разделяет пористый грунт и область, где происходит его вымывание пульпой. Пульпой будем считать водный

раствор соли (если речь идет о переносе соли) и твердых, нерастворимых частиц, вымытых из грунтового массива. Стенки водовода – непроницаемые.

В авторской математической модели учтен принцип работы системы фильтрации Биоплато [10] с каменной засыпкой (рис. 2а). Загрязненная вода поступает на поверхность Биоплато через перфорированные трубы  $\Gamma_1$ , расположенные на входной границе. Несмотря на подачу воды в водоводы под давлением, после выхода из них она свободно просачивается в пористый грунт. Границы  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  – непроницаемы. Отфильтрованная вода удаляется через перфорированные трубы, расположенные на выходной границе  $\Gamma_2$ .

На рис. 3 представлен характер течения жидкости через горизонтальный водовод (перфорацию) в грунтовом массиве. При кольматации наблюдается динамическое изменение пористости грунта, что оказывает непосредственное влияние на коэффициент фильтрации. Следовательно, для корректного моделирования функционирования фильтра Биоплато необходимо учитывать данные эффекты в уравнении фильтрации.

1. Для грунта с переменной пористостью уравнение фильтрации выражается законом Дарси [5] и формулируется так:

$$u = -k_h \nabla P, \quad (1)$$

где  $u$  – скорость фильтрации, м/с;  $\nabla P$  – гидравлический градиент, м/м;  $k_h$  – коэффициент фильтрации, м/с.

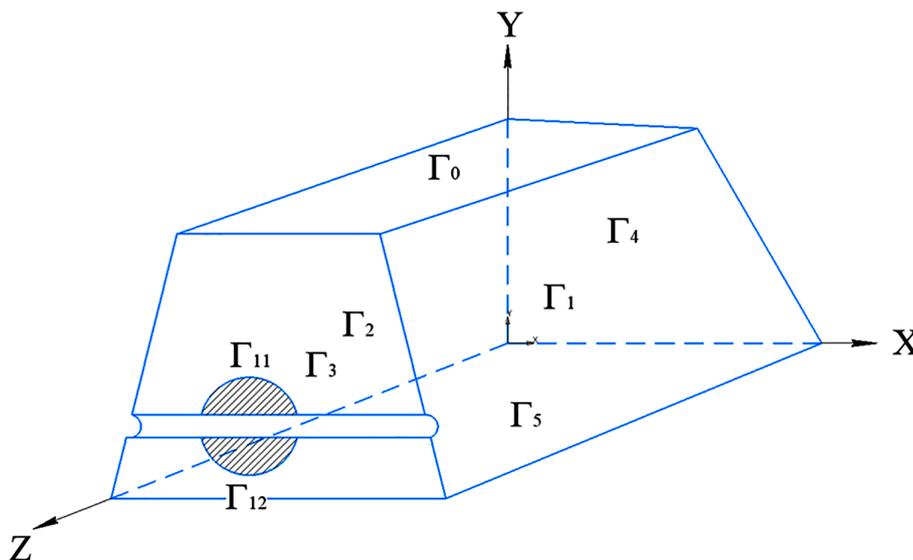


Рис. 1. Тело грунтовой плотины водохранилища и область потенциального размыва  
Источник: составлено автором по моделируемой задаче

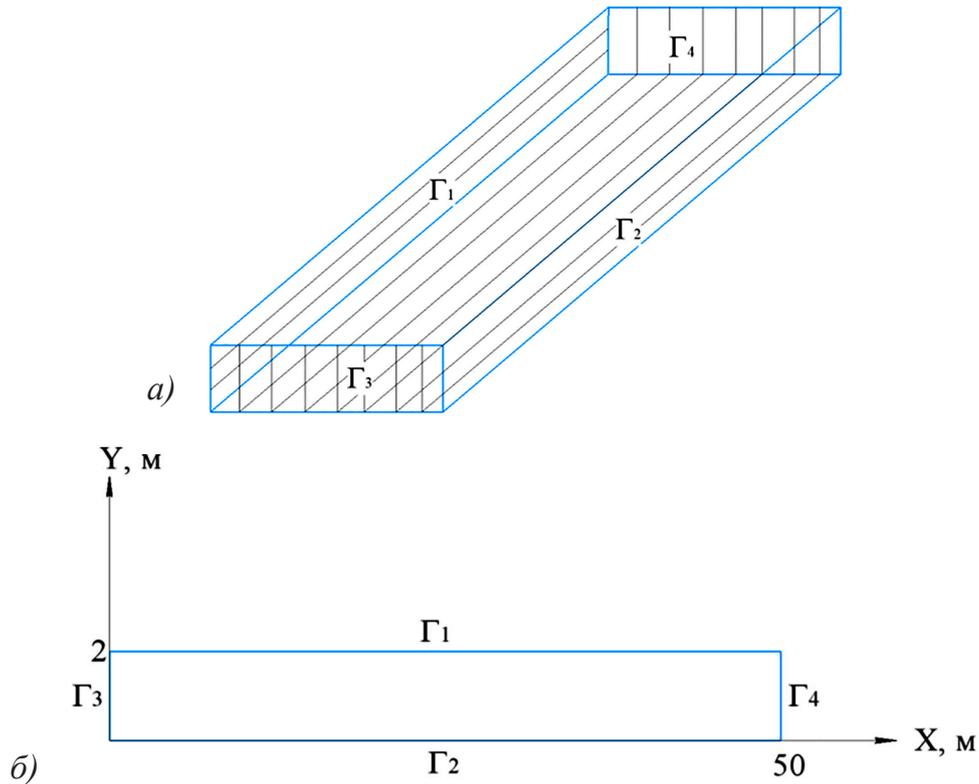


Рис. 2. Корпус Биоплато-фильтра: а) объемный; б) плоский  
 Источник: составлено автором по моделируемой задаче

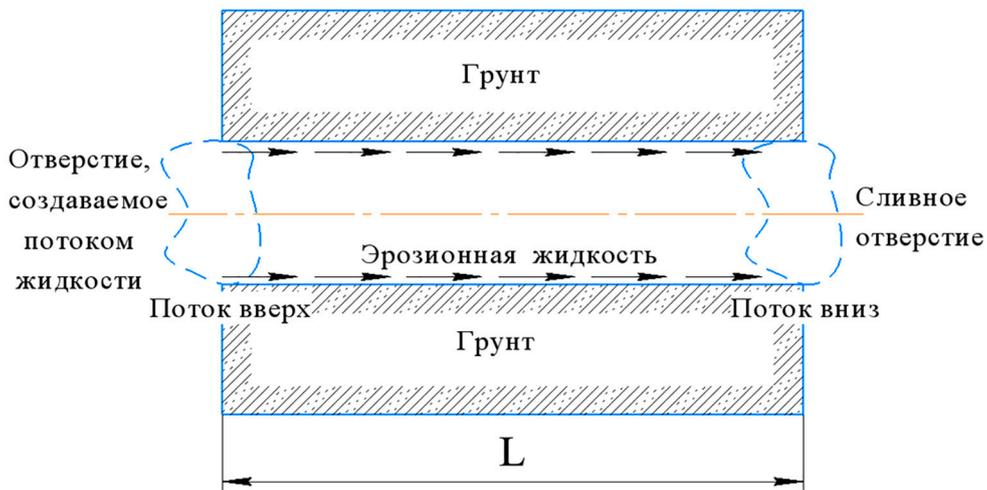


Рис. 3. Схема для моделирования потока через водовод (перфорацию) в грунте  
 Источник: составлено автором по моделируемой задаче

Закон Дарси с учетом поправок М. М. Герсеванова [2, с. 69] имеет модифицированный вид:

$$u + k_h \nabla P = e\nu, \quad (2)$$

где  $e$  – коэффициент пористости грунта;  $\nu$  – скорость движения частиц грунта, м/с.

В неизотермических условиях выражение закона Дарси – Герсеванова [7] для динамики солевых растворов в пористой среде имеет следующий вид:

$$u + k_h(T, C, P) \nabla P - k_T \nabla T - k_c(C) \nabla C = e\nu, \quad (3)$$

где  $T$  – температура, °С;  $C$  – концентрация химического раствора, кг/л;  $k_c$  – коэффици-

ент концентрации химического раствора химического осмоса;  $k_T$  – коэффициент температуры химического осмоса. В работе [11] было получено обобщенное фильтрационное уравнение в пористой среде с учетом влияния техногенных факторов в тензорной форме:

$$\begin{aligned} & \frac{R \cdot \gamma_c \cdot a(T, C_z, C_c)}{1 + (R_h - 1)K_a} \frac{\partial P}{\partial t} - (1 + e)^2 \sum_{i=1}^l \frac{\partial C_z}{\partial t} - (1 + e)^2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial C_{cj}}{\partial t} - \\ & - e \left( \frac{1}{\rho_{жс}} \left( \frac{\partial \rho_{жс}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_{жс}}{\partial C_j} \frac{\partial C_j}{\partial t} \right) - \frac{1}{\rho_z} \left( \frac{\partial \rho_z}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_z}{\partial C_{cj}} \frac{\partial C_{cj}}{\partial t} \right) \right) = \\ & = (1 + e)(\nabla \cdot k_h(t, T, P, C_z, C_c, C) \nabla P) + \nabla F_o, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $R$  – заданный размер, м;  $\gamma_c$  – удельный вес раствора соли, Н/м<sup>3</sup>;  $a$  – коэффициент сжатия грунта, Па<sup>-1</sup>;  $C_z$  – концентрация суффозионных частиц грунта, кг/м<sup>3</sup>;  $C_c$  – концентрация солей в грунте, кг/кг;  $P$  – поровое давление, Па;  $\rho_c$  – плотность грунта, кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_{жс}$  – плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>;  $K_a$  – коэффициент активного давления грунта;  $\rho_c$  – плотность соли, кг/м<sup>3</sup>;  $\nabla$  – тензор;  $k_h$  – коэффициент фильтрации, м/с;  $F_o$  – силовой фактор осмотических воздействий.

С учетом закона Дарси – Герсеванова [7] выражение (4) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left( \rho_{жс}(C, T) \cdot k_h(t, T, S, \sigma) \nabla P \right) = \\ & = \sigma \left( \frac{\partial \rho_{жс}}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{жс}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \frac{\rho_{жс}}{\rho_z} \frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{\rho_{жс}}{\rho_s} \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla(\rho_{жс}(C, T) F_o), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\sigma$  – изменяемая пористость;  $Z$  – изменяемая концентрация водорастворимых пород в твердой фазе, кг/кг;  $S$  – изменяемая концентрация подвижных твердых водорастворимых частиц, кг/кг;  $\rho_z$  – плотность водорастворимых твердых частиц солей, кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_s$  – плотность суффозионного материала в водоводе, кг/м<sup>3</sup>.

2. Уравнения переноса теплоты и массы движущихся частиц. Вследствие интеграции антропогенных факторов в представленные уравнения фильтрации для полного описания процессов переноса теплоты и массы движущихся частиц в жидкой фазе требуется дополнить систему уравнений. Это дополнение должно включать уравнения, позволяющие определить: концентрацию растворенных солей в жидкой фазе грунта  $C(X, t)$ , температурное поле грунта, концентрацию солей в твердой фазе грунта, концентрацию взвешенных нерастворимых твердых частиц в жидкой фазе.

Уравнение переноса солей в жидкой или твердой среде в тензорной форме имеет следующий вид [12]:

$$\nabla \cdot \left( (D_T \nabla T) + \nabla \cdot (D_c \nabla C_s) \right) = \sigma \frac{\partial C_s}{\partial t} + u \cdot \nabla C_s + \frac{\partial Z}{\partial t}, \quad (6)$$

где  $D_T$  – коэффициент термодиффузии, м<sup>2</sup>/(с·°C);  $D_c$  – коэффициент конвективной диффузии, м<sup>2</sup>/с;  $C_s$  – концентрация водорастворимых пород в грунте, кг/кг.

Учетом в уравнении переноса массы частиц воздействие химических и термических факторов, которые влияют на изменение плотности жидкости в порах грунта [13]:

$$\begin{aligned} & \sigma \left( 1 - \frac{C}{\rho_{жс}} \frac{\partial \rho_{жс}}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial t} \right) = \\ & = \nabla \cdot (D_c \nabla C) - u \left( 1 - \frac{C}{\rho_{жс}} \frac{\partial \rho_{жс}}{\partial C} \right) + \nabla C + \frac{C}{\rho_{жс}} \left( \sigma \frac{\partial \rho_{жс}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial \rho_{жс}}{\partial T} \nabla T \right) - \frac{\partial C}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражение функционального теплопереноса  $T(X, t)$  имеет вид [13, с. 70]:

$$\nabla \cdot (\lambda_2 \nabla T) - \rho_n \cdot c_p \cdot u \cdot \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (8)$$

где  $\lambda_2$  – коэффициент теплопроводности грунта, Вт/(м·°С);  $\rho_n$  – плотность солевого раствора, находящегося в порах грунта, кг/м<sup>3</sup>;  $c_p$  – удельная теплоемкость раствора соли, Дж/(кг·°С);  $c_T$  – объемная теплоемкость грунта, Дж/(м<sup>3</sup>·°С).

С учетом суффозионных процессов, происходящих в грунте, через который фильтруется жидкость с различным содержанием солей, согласно работам [12; 13] можно записать:

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_2 \nabla T) - \rho_n \cdot c_p \cdot u \cdot \nabla T - \left( \rho_s \cdot c_s \frac{\partial S}{\partial t} + \rho_z \cdot c_z \frac{\partial Z}{\partial t} \right) \cdot T, \quad (9)$$

где  $c_p, c_s, c_z$  – соответственно, удельная теплоемкость жидкости в порах грунта, суффозионных частиц и твердых водорастворимых частиц грунта, Дж/(кг·°С).

Область размыва начинает образовываться во время контактной эрозии грунта с водоводом, последний заполняется пульпой, согласно рис. 3. Для математического описания характера изменения концентрации пульпы в области размыва с учетом скорости осаждения частиц пульпы в водоводе воспользуемся диффузионной моделью в тензорном виде [14]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \nabla \cdot (D_s \nabla S) - (u - w) \cdot \nabla S, \quad (10)$$

где  $S(X, t)$  – объемная концентрация пульпы в водоводе, кг/м<sup>3</sup>;  $D_s$  – коэффициент дисперсности пульпы;  $w$  – скорость седиментации твердых частиц пульпы, м/с.

Зададим начальные и граничные условия для неизвестных функций:

$$T(X, 0) = T_0(X), \quad S(X, 0) = S_0(X); \quad P(X, 0) = P_0(X), \quad C(X, 0) = C_0(X), \quad X \in \bar{O}, \quad (11)$$

где  $T_0(X)$  – функция температуры;  $S_0(X)$  – функция концентрации пульпы;  $P_0(X)$  – функция избыточного давления;  $C_0(X)$  – функция концентрации химических веществ.

Дренируемая область  $O$  имеет свои границы. Граничное условие для давления  $P$  концентрации химических веществ  $C$  будет иметь вид:

$$P(X, t)|_{X \in \Gamma} = P_1(X, t), \quad X \in \Gamma, \quad (12)$$

$$C(X, t)|_{X \in \Gamma} = C_1(X, t), \quad X \in \Gamma, \quad (13)$$

где  $P_1(X, t)$  – заданная функция давления, Па;  $C_1(X, t)$  – заданная функция концентрации химических веществ в грунте, кг/кг.

При рассмотрении границ области  $O$  как непроницаемых граничное условие непроницаемости для случая скоростной фильтрации запишется в виде:

$$(u, n)|_{X \in \Gamma} = 0, \quad X \in \Gamma. \quad (14)$$

Непроницаемость может быть обусловлена наличием слоя каменной наброски или грунта, который по своим физико-химическим свойствам является непроницаемым. Значит, для химических веществ пределы условий непроницаемости определяются с учётом их концентрации из выражения [12]:

$$(D_c \cdot \nabla C + D_T \cdot \nabla T, n)|_{X \in \Gamma} = 0, \quad X \in \Gamma. \quad (15)$$

Также непроницаемость грунта может быть обоснована расположением слоев соли. Тогда граничное условие для концентрации химических веществ будет иметь вид:

$$C(X, t)|_{X \in \Gamma} = C_{\max}, \quad X \in \Gamma, \quad (16)$$

где  $C_{\max}$  – концентрация граничного насыщения химическими веществами грунта, кг/кг.

При известной температуре на границе области размыва  $O$  имеем граничное условие:

$$T(X, t)|_{X \in \Gamma} = T_1(X, t), \quad X \in \Gamma, \quad (17)$$

где  $T_1(X, t)$  – заданная функция температуры, °С.

При известной концентрации пульпы в области размыва  $O$  имеем граничное условие:

$$S(X, t)|_{X \in \Gamma} = S_1(X, t), \quad X \in \Gamma, \quad (18)$$

где  $S_1(X, t)$  – заданная функция концентрации пульпы, кг/кг.

3. Граничные условия в области размыва и на границе водовода с областью размыва.

Предполагается, что на границе контакта  $\Gamma_r$  в зависимости от площади грунтового массива выполняются условия сопряжения идеального контакта:

$$[P]|_{\Gamma_r} = 0, \quad (u, Z)|_{\Gamma_r} = 0, \quad [C]|_{\Gamma_r} = 0, \quad [T]|_{\Gamma_r} = 0, \quad (19)$$

где  $[ ]$  – символ переходных функций.

Граничное условие на границе размывания контакта грунта с водоводом имеет вид:

$$k_p \cdot S(X, t)((v, n) + (v, d)) + (1 - \sigma)\rho_T \Gamma_r = 0, \quad X \in \Gamma, \quad (20)$$

где  $k_p$  – коэффициент размыва грунта на  $\Gamma_{iz}$ ;  $\rho_T$  – плотность твердых частиц грунта, кг/м<sup>3</sup>;  $n$  – вектор направленных косинусов внешней нормали;  $d$  – вектор направленных косинусов касательных направляющих.

Концентрация твердых частиц в области размыва  $O$  достаточно мала, поэтому их влияние на вязкость и движение пульпы в этой области считается незначительным. В результате этого процесс движения пульпы в области размыва можно моделировать с использованием уравнений Навье – Стокса [15]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = - \left( (u_x, u_y, u_z), \left( \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right) \right) \cdot (u_x, u_y, u_z) + v \cdot \Delta \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} - g \begin{pmatrix} \frac{dP}{dx} \\ \frac{dP}{dy} \\ \frac{dP}{dz} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где  $u_x, u_y, u_z$  – радиальная, тангенциальная и вертикальная скорости движения пульпы, соответственно, м/с;  $v$  – кинематическая вязкость жидкой фазы, м<sup>2</sup>/с;  $g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>.

4. Модифицированное граничное условие для поверхности впадины тела грунтовой дамбы (плотины), на которой существует водовод.

Фильтрация воды внутри грунтовой дамбы (плотины) связана с наличием свободной границы – в трехмерном пространстве массива грунта это поверхность впадины, представляющая собой линию, где давление жидкости в порах грунта равно атмосферному. Для упрощения анализа принимается допущение, что любая вертикальная линия пересекает свободную границу только в одной точке.

В момент времени  $t = t_j$  на свободной поверхности  $\Phi(X, t, j)$ , определяемой условием, для отдельной области  $\Omega^{(j)}$  зафиксировано положение. Далее исследовано движение этой свободной поверхности, направленное вдоль внешней нормали  $n$  (рис. 4).

В настоящей математической модели пренебрегаем инфильтрацией. Физико-химические и механические свойства в изолированном цилиндре грунта между двумя положениями свободной границы в моменты времени  $t = t_j$  и  $t = t_{j+1}$  были аппроксимированы по линейными зависимостям. Тогда объем пор в выделенном цилиндре грунта будет равен:

$$V = \sigma^{(j+1)} \cdot \Phi(X^{(j+1)}, t_{j+1}) - \sigma^{(j)} \cdot \Phi(X^{(j)}, t_j), \quad (22)$$

где  $\sigma^{(j)} = \sigma(X^{(j)}, t_j)$   $x^{(j)} \in S^{(j)}$  – точка, принадлежащая выделенному полю  $S^{(j)}$ .

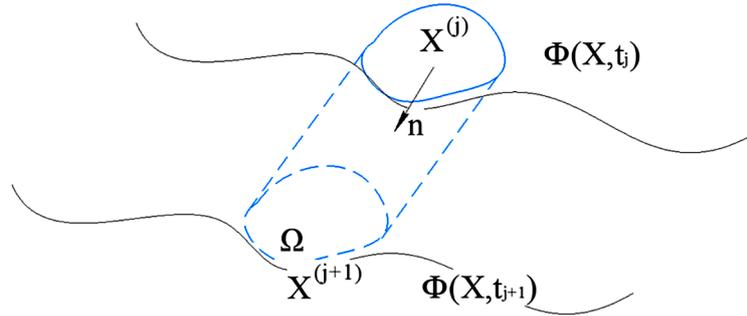


Рис. 4. Схема к моделированию положения свободной подвижной границы  
 Источник: составлено автором по моделируемой задаче

Как видно из (22), пористость в полях  $S^{(j)}$  и  $S^{(j+1)}$  усредняется и ставится равной заданному значению величины в пунктах  $X^{(j+1)} \in S^{(j+1)}$  и  $X^{(j)} \in S^{(j)}$ , соответственно. С другой стороны, с течением времени  $\Delta t = t_{j+1} - t_j$  изменение объема жидкости в выделенном цилиндре из грунта будет равно:

$$\Delta V = (u, n) \Delta t. \tag{23}$$

Сравнивая (22) и (23) в соответствии с  $\Delta t \rightarrow 0$  мы имеем граничное условие:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma \Phi) = (u, n). \tag{24}$$

В левой части (24) имеется полная производная по времени  $t$ . Тогда будем иметь:

$$\frac{d}{dt}(\sigma \Phi) = \frac{d\sigma}{dt} \Phi + \sigma \frac{d\Phi}{dt}. \tag{25}$$

Принимая во внимание (25), из (23) получаем модифицированное граничное условие:

$$\frac{d\sigma}{dt} \cdot \Phi(X, t) + \sigma \cdot \frac{d\Phi(X, t)}{dt} = (u, n). \tag{26}$$

Изменения в расположении поверхности впадины также могут возникать из-за уплотнения, разбухания грунта под ней. Обобщенное граничное условие для просадки грунта в результате его уплотнения учитывается в работе [16] и имеет вид:

$$\frac{dl(x, y, t)}{dt} = \left( \int_{l(x, y, t)}^{l(x, y, t)} \frac{e}{1+e} \left( \frac{1}{\rho_{жс}} \frac{d\rho_{жс}}{dt} - \frac{1}{\rho_z} \frac{d\rho_z}{dt} \right) + \Delta \cdot u \right) dz, \tag{27}$$

где  $z = l(x, y, t)$  – фиксация положения верхней подвижной границы грунта;  $z = L(x, y, t)$  – фиксация положения нижней подвижной границы грунта.

Предполагая независимость процессов растрескивания и адгезивности с учетом (27), вытекающего из (24), имеем:

$$\frac{d\sigma}{dt} \cdot \varphi(X, t) + \sigma \cdot \frac{d\varphi(X, t)}{dt} = (u, n) + \left( \int_{L(x, y, t)}^{\varphi(X, t)} \frac{e}{1+e} \left( \frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) + \Delta u \right) dz. \tag{28}$$

Для применения в выражении (28) зависимостей для  $e(\sigma)$ ,  $\rho_p$ ,  $\rho_m$  должны быть известны их значения зависимости от концентрации соли в жидкой и твердой фазах, концентрации суффозионных частиц, температуры [17].

5. Обобщенная математическая модель, позволяющая прогнозировать развитие области размыва, изменение поверхностей размыва и устойчивость дамбы (плотины) под воздействием техногенных факторов при воздействии на грунт жидкостей с различными физико-химическими свойствами, показанная на рис. 1, описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (\rho_{\text{жс}}(C, T) \cdot k_h(t, T, S, \sigma) \nabla P) = \\ & = \sigma \left( \frac{\partial \rho_{\text{жс}}}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{\text{жс}}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \frac{\rho_{\text{жс}}}{\rho_Z} \frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{\rho_{\text{жс}}}{\rho_s} \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla (\rho_{\text{жс}}(C, T) F_o), \quad X \in O, \quad t > 0, \\ & \sigma \left( 1 - \frac{C}{\rho_{\text{жс}}} \frac{\partial \rho_{\text{жс}}}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial t} \right) = \\ & = \nabla \cdot (D_c \nabla C) - u \left( 1 - \frac{C}{\rho_{\text{жс}}} \frac{\partial \rho_{\text{жс}}}{\partial C} \right) + \nabla C + \frac{C}{\rho_{\text{жс}}} \left( \sigma \frac{\partial \rho_{\text{жс}}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial \rho_{\text{жс}}}{\partial T} \nabla T \right) - \frac{\partial C}{\partial t}, \quad X \in O, \quad t > 0, \\ & c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_a \nabla T) - \rho_i \cdot c_p \cdot u \cdot \nabla T - \left( \rho_s \cdot c_s \frac{\partial S}{\partial t} + \rho_z \cdot c_z \frac{\partial Z}{\partial t} \right) \cdot T, \quad X \in O, \quad t > 0, \\ & \frac{\partial S}{\partial t} = \nabla \cdot (D_s \nabla S) - (u - w) \cdot \nabla S, \quad X \in O, \quad t > 0, \\ & u + k_h(T, C, P) \nabla P - k_T \nabla T - k_c(C) \nabla C = ev, \quad X \in O, \quad t > 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = - \left( (u_x, u_y, u_z), \left( \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right) \right) \cdot (u_x, u_y, u_z) + v \cdot \Delta \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} - g \begin{pmatrix} \frac{dP}{dx} \\ \frac{dP}{dy} \\ \frac{dP}{dz} \end{pmatrix}, \quad X \in O_2, \quad t > 0,$$

$$\begin{aligned} & [P] \Big|_{\Gamma_r} = 0, (u, Z) \Big|_{\Gamma_r} = 0, [C] \Big|_{\Gamma_r} = 0, [T] \Big|_{\Gamma_r} = \\ & = 0, k_p \cdot S(X, t) ((v, n) + (v, d)) + (1 - \sigma) \rho_T \Gamma_r = 0, X \in \Gamma, \end{aligned}$$

где

$$V^{(s)} = \frac{\alpha^+}{\sigma} \cdot u^{(s)},$$

$$P(X, 0) = P_0(X), \quad X \in O, \quad C(X, 0) = C_0(X), \quad X \in O,$$

$$T(X, 0) = T_0(X), \quad X \in O, \quad S(X, 0) = S_0(X), \quad X \in O,$$

$$l_p P(X, t) \Big|_{\Gamma} = P_1(X, t), \quad X \in \Gamma, \quad l_c C(X, t) \Big|_{\Gamma} = C_1(X, t), \quad X \in \Gamma,$$

$$P(X) \Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_0} = y, \quad X \in \Gamma_1 \cup \Gamma_0, \quad P(X) \Big|_{\Gamma_2} = P_1(X), \quad X \in \Gamma_2,$$

$$(\nabla, n) \Big|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5} = 0, \quad X \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5,$$

$$l_s S(X, t) \Big|_{\Gamma} = S_1(X, t), \quad X \in \Gamma.$$

где  $t \in [0; t_0]$ ,  $l_p, l_c, l_p, l_s$  – операторы, задающие граничные условия для давления, концентрации соли, температуры и концентрации пульпы, соответственно.

Математическая модель фильтрации тела грунтовой плотины с уплотненной областью размыва (рис. 1) включает в себя уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{R \cdot \gamma_c \cdot a(T, C_2, C_c)}{1 + (R_h - 1)K_a} \frac{\partial P}{\partial t} - (1+e)^2 \sum_{i=1}^l \frac{\partial C_2}{\partial t} - (1+e)^2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial C_{cj}}{\partial t} - \\ & - e \left( \frac{1}{\rho_{жс}} \left( \frac{\partial \rho_{жс}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_{жс}}{\partial C_j} \frac{\partial C_j}{\partial t} \right) - \frac{1}{\rho_2} \left( \frac{\partial \rho_2}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_2}{\partial C_{cj}} \frac{\partial C_{cj}}{\partial t} \right) \right) = \\ & = (1+e)(\nabla \cdot k_h(t, T, P, C_2, C_c, C) \nabla P) + \nabla F_o, \quad X \in O, \quad t > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sigma \left( 1 - \frac{C}{\rho_{жс}} \frac{\partial \rho_{жс}}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial t} \right) = \\ & = \nabla \cdot (D_c \nabla C) - u \left( 1 - \frac{C}{\rho_{жс}} \frac{\partial \rho_{жс}}{\partial C} \right) + \nabla C + \frac{C}{\rho_{жс}} \left( \sigma \frac{\partial \rho_{жс}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial \rho_{жс}}{\partial T} \nabla T \right) - \frac{\partial C}{\partial t}, \quad X \in O, \quad t > 0, \end{aligned}$$

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_2 \nabla T) - \rho_n \cdot c_p \cdot u \cdot \nabla T - \left( \rho_s \cdot c_s \frac{\partial S}{\partial t} + \rho_z \cdot c_z \frac{\partial Z}{\partial t} \right) \cdot T, \quad X \in O, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \nabla \cdot (D_s \nabla S) - (u - w) \cdot \nabla S, \quad X \in O, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = - \left( (u_x, u_y, u_z), \left( \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right) \right) \cdot (u_x, u_y, u_z) + v \cdot \Delta \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} - g \begin{pmatrix} \frac{dP}{dx} \\ \frac{dP}{dy} \\ \frac{dP}{dz} \end{pmatrix}, \quad X \in O_2, \quad t > 0,$$

$$\frac{d\sigma}{dt} \cdot \varphi(X, t) + \sigma \cdot \frac{d\varphi(X, t)}{dt} = (u, n) + \left( \int_{L(x,y,t)}^{\varphi(X,t)} \frac{e}{1+e} \left( \frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) + \Delta u \right) dz,$$

$$[P]_{\Gamma_{11}} = 0, \quad (u, n)_{\Gamma_{11}} = 0, \quad [C]_{\Gamma_{11}} = 0, \quad [T]_{\Gamma_{11}} = 0,$$

$$k_p \cdot S(X, t) ((v, n) + (v, d)) + (1 - \sigma) \rho_T \Gamma_r = 0, \quad X \in \Gamma,$$

$$[p]_{D_{11}} = 0, \quad (u, n)_{D_{11}} = 0, \quad [c]_{D_{11}} = 0, \quad [T]_{D_{11}} = 0,$$

$$-(1 - \sigma) \cdot \rho_T \frac{(\Gamma_{11}^{(s+1)} - \Gamma_{11}^{(s)})}{\tau} = k_{er} \cdot S(X, t) (V^{(s)}, n),$$

где  $\tau$  – касательные напряжения на границе раздела грунта и водовода, Па;

$$\alpha^+ = \begin{cases} 1, & |u| \geq u_{kr}, \\ 0, & |u| < u_{kr}, \end{cases}$$

$$P(X, 0) = P_0(X), \quad X \in O, \quad \sigma_0 = \sigma_0(X),$$

$$T(X, 0) = T_0(X), \quad X \in O, \quad S(X, 0) = S_0(X), \quad X \in O,$$

$$\sigma_0 = \sigma_0(X, t), \quad l_C C(X, t)|_D = C_1(X, t), \quad X \in \Gamma,$$

$$l_S S(X, t)|_\Gamma = S_1(X, t), \quad X \in \Gamma,$$

где  $t \in [0; t_0]$ ,  $l_p, l_c, l_T, l_s$  – операторы граничных условий для давления, концентрации соли, температуры и концентрации пульпы, соответственно.

Математическая модель фильтрации в биопластинчатом фильтре, показанная на рис. 2б, с учетом суффозии и кольматации содержит в себе следующий набор уравнений:

$$\nabla \cdot \left( \rho_{\text{жс}}(C) \cdot k_h(C, \sigma) \nabla P \right) = \sigma \frac{\partial \rho_{\text{жс}}}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\rho_{\text{жс}}}{\rho_s} \frac{\partial S}{\partial t}, \quad X \in \sigma, \quad t > 0,$$

$$\sigma \left( 1 - \frac{C}{\rho_{\text{жс}}} \frac{\partial \rho_{\text{жс}}}{\partial C} \right) \frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (D_c \nabla C) - u \left( 1 - \frac{C}{\rho_{\text{жс}}} \frac{\partial \rho_{\text{жс}}}{\partial C} \right) \nabla C - \frac{\partial S}{\partial t}, \quad X \in O, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \alpha \cdot C - \beta \cdot S, \quad X \in O, \quad t > 0,$$

$$u = -k_h(C, S, \sigma) \nabla P, \quad X \in O,$$

$$C(X, 0) = C_0, \quad X \in O,$$

$$S(X, 0) = S_0, \quad X \in O,$$

$$P(X, t)|_{X \in \Gamma_1} = Y,$$

$$q|_{X \in \Gamma_2} = C_2,$$

$$\tilde{N}(X, t)|_{X \in \Gamma_1} = C_1.$$

Предложенная математическая модель требует проверки на адекватность и численный расчет, что будет сделано в дальнейших исследованиях по данной тематике. После этого можно будет сделать вывод о соответствии полученной модели процессам разрушения в теле дамбы (плотины). После чего полученная математическая модель может использоваться при мониторинге гидротехнических сооружений грунтового типа.

#### Заключение

Разработана и формализована обобщённая математическая модель фильтрации,

учитывающая деформацию пористой среды, переменную пористость, температурные и химические влияния, а также процессы переноса массы и тепла. В модели совмещено описание фильтрации, солепереноса, теплопереноса и осаждения пульпы, что обеспечивает многопараметрический подход к прогнозированию области размыва и устойчивости плотины. Введены новые операторы и сопряжённые условия, позволяющие более адекватно моделировать динамику фильтрационного потока через сложные структуры (в том числе биопластинчатые фильтры).

Работа подчёркивает необходимость учета динамического изменения пористости и влияния механических и химических процессов, например коагуляции, на коэффициенты фильтрации. Обобщённая модель создает основу для дальнейшей верификации и численного моделирования, что позволит повысить точность прогноза развития размыва и предотвращения аварийных ситуаций на начальном этапе формирования эрозионных процессов.

### Список литературы

1. Немеровец О. В., Евдокимов В. А., Ивашкин В. В. Исследования разрушения грунтовых плотин на физических моделях // Мелиорация. 2024. № 4 (110). С. 19-28. URL: [https://melio.belal.by/jour/article/view/1143/1096?locale=ru\\_RU](https://melio.belal.by/jour/article/view/1143/1096?locale=ru_RU) (дата обращения: 17.01.2026).
2. Сологаев В. И. Фильтрационные расчеты и компьютерное моделирование при защите от подтопления в городском строительстве: монография. Омск: СибАДИ, 2002. 416 с. URL: [https://www.elibrary.ru/download/elibrary\\_25360858\\_28136727.pdf](https://www.elibrary.ru/download/elibrary_25360858_28136727.pdf) (дата обращения: 17.01.2026).
3. Королев В. А. Проблематика и задачи теоретического грунтоведения // Грунтоведение. 2021. № 2 (17). С. 38-44. URL: [https://www.elibrary.ru/download/elibrary\\_49391050\\_72182290.pdf](https://www.elibrary.ru/download/elibrary_49391050_72182290.pdf) (дата обращения: 17.01.2026). DOI: 10.53278/2306-9139-2021-2-17-38-44.
4. Орлова С. С., Абдразаков Ф. К., Панкова Т. А. Прогнозирование волны прорыва и зоны затопления территории при аварии на плотине // Аграрный научный журнал. 2018. № 3. С. 42-46. URL: [https://www.elibrary.ru/download/elibrary\\_32682190\\_81581094.pdf](https://www.elibrary.ru/download/elibrary_32682190_81581094.pdf) (дата обращения: 17.01.2026). DOI: 10.28983/asj.v0i3.307.
5. Гильманов А. Я., Шевелев А. П. Оценка влияния безразмерного предельного градиента давления на отклонение фильтрации от классического закона // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14. № 4. С. 425-433. URL: [https://www.elibrary.ru/download/elibrary\\_47566735\\_81328408.pdf](https://www.elibrary.ru/download/elibrary_47566735_81328408.pdf) (дата обращения: 18.01.2026).
6. Гаюбов А. Т. Особенности течения флюидов в пористых средах в условиях нарушения линейного закона Дарси // Труды Российского государственного университета нефти и газа имени И.М. Губкина. 2021. № 1 (302). С. 19-28. URL: [https://www.elibrary.ru/download/elibrary\\_45658263\\_43558785.pdf](https://www.elibrary.ru/download/elibrary_45658263_43558785.pdf) (дата обращения: 18.02.2026). DOI: 10.33285/2073-9028-2021-1(302)-19-28.
7. Марков Е. В., Пульников С. А., Гербер А. Д. Разработка математической модели массопереноса компонент водно-солевого раствора в пучинистых грунтах на основании кинетической теории жидкостей // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2018. Т. 10. № 1. С. 37-44. URL: <https://www.mathnet.ru/links/0f05c8922913c89c9b352283456b1035/vyurm364.pdf> (дата обращения: 17.01.2026). DOI: 10.14529/mmph180105.
8. Леонтьев И. О. О расчете вдольберегового транспорта наносов // Океанология. 2014. Т. 54. № 2. С. 226-232. URL: [https://www.elibrary.ru/download/elibrary\\_21333761\\_39698464.pdf](https://www.elibrary.ru/download/elibrary_21333761_39698464.pdf) (дата обращения: 17.01.2026). DOI: 10.7868/S0030157414020130.
9. Колосов М. А., Чинаков П. П., Заворовский М. И., Симкин А. Ю., Поздеев А. С. О причинах прорывов напорного фронта в плотине Белопорожского гидроузла // Гидротехника. 2022. № 2. С. 42-46. URL: [https://hydroteh.ru/jarticles/o\\_prichinah\\_proryvov\\_napornogo\\_fronta\\_v\\_plotine\\_beloporozhskogo\\_gidrouzla\\_279/](https://hydroteh.ru/jarticles/o_prichinah_proryvov_napornogo_fronta_v_plotine_beloporozhskogo_gidrouzla_279/) (дата обращения: 17.01.2026). DOI: 10.55326/22278400\_2022\_2\_42.
10. Mixeyev O. M., Madzhd S. M., Lapan O. V. New method of floating bioplate construction for phytodesactivation of water bodies of civil aviation enterprises // East European Scientific Journal. 2016. Vol. 9. № 3. P. 135-142. URL: [https://www.elibrary.ru/download/elibrary\\_28145223\\_51485421.pdf](https://www.elibrary.ru/download/elibrary_28145223_51485421.pdf) (дата обращения: 17.01.2026).
11. Власюк А. П., Мартынюк П. Н. Фильтрационная консолидация трёхфазных грунтов с учётом ползучести скелета и влияния солепереноса в неизотермическом режиме // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. № 4. С. 32-56. URL: <https://www.mathnet.ru/links/80b57c8c8a762444bc65c8b9b9de0c77/mm2957.pdf> (дата обращения: 17.02.2026).
12. Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Васильев А. В. Модель стационарного турбулентного течения и процесс седиментации примеси // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2019. № 3 (203). С. 4-14. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41291435> (дата обращения: 17.02.2026).
13. Симонов О. А., Филимонова Л. Н. Влияние максимума плотности воды на охлаждение водонасыщенной пористой среды // Прикладная механика и техническая физика. 2021. Т. 62. № 4 (368). С. 68-79. URL: [https://www.elibrary.ru/download/elibrary\\_46447993\\_74069192.pdf](https://www.elibrary.ru/download/elibrary_46447993_74069192.pdf) (дата обращения: 17.01.2026).
14. Capone F., Gentile M., Hill A. A. Penetrative convection in anisotropic porous media with variable permeability // Acta Mech. 2011. Vol. 216. № 1-4. P. 49-58. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=16840272> (дата обращения: 17.01.2026). DOI: 10.1007/s00707-010-0353-2.
15. Хатунцева О. Н. Учет производства энтропии в уравнении Лиувилля и вывод из него «модифицированной» системы уравнений Навье-Стокса // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: [https://www.elibrary.ru/download/elibrary\\_63410678\\_84881112.pdf](https://www.elibrary.ru/download/elibrary_63410678_84881112.pdf) (дата обращения: 17.01.2026).
16. Саламова К. Д., Турдикулов Х. Х., Мифтахова И. Р. Расчет высокой грунтовой плотины с учетом напряженного состояния и порового давления (с учетом данных натуральных наблюдений) // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. 2019. № 7. С. 24-32. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/raschet-vysokoy-gruntovoy-plotiny-s-uchetom-napryazhennogo-sostoyaniya-i-porovogo-davleniya-s-uchetom-dannyh-naturalnyh-nablyudeniya/viewer> (дата обращения: 17.01.2026). DOI: 10.34031/article\_5d35d0b7694ea7.79490804.
17. Олейник А. П., Штайер Л. А., Клапоушак А. И. Математическое моделирование фильтрационных процессов в задачах оценки уровня и качества грунтовых вод // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2013. т. 1/4 (61). С. 15-18. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/matematiche-modelyuvannya-filtratsiynih-protseviv-v-zadachah-otsinki-rivnya-ta-yakosti-gruntovih-vod/viewer> (дата обращения: 17.01.2026).

**Конфликт интересов:** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Conflict of interest:** The authors declare that there is no conflict of interest.

**Финансирование:** Исследования проведены в рамках государственного задания Министерства сельского хозяйства Российской Федерации (тема № 102503-2600073-9-4.1.1-4.1.1).

**Financing:** The research was conducted within the framework of the state assignment of the Ministry of Agriculture of the Russian Federation (topic no. 102503-2600073-9-4.1.1-4.1.1).