

УДК 519.6
DOI

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КВАЗИСФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ДЛЯ РАСЧЕТА РЕФРАКЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОСМИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Лукьянцев Д.С., Афанасьев Н.Т., Калашникова Е.И.

ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет», Иркутск, e-mail: spacemaklay@gmail.com

Для повышения оперативности вычислительных схем в расчетах транспорта космического электромагнитного излучения используется приближение локальной (квазисферической) системы координат, связанной с плоскостью дуги большого круга, проходящей через источник, сферический центр и пункт наблюдения. Цель настоящего исследования заключается в оценке возможностей квазисферического приближения для расчета рефракционных характеристик космического излучения при распространении в поле тяготения астрофизических объектов. Для анализа рефракции лучей в сферической и локальной системах координат сделан вывод лучевых дифференциальных уравнений в форме Лагранжа – Эйлера на основе вариационного принципа Ферма. Численное интегрирование дифференциальных уравнений выполнено с применением функции `odeint` (библиотека `scipy`) на языке программирования Python. В качестве примера реализации рассмотренных вычислительных схем приведены результаты строгих и приближенных численных расчетов рефракционных характеристик космического излучения в поле тяготения одиночного астрофизического объекта. Для наглядности результаты моделирования представлены в виде проекций распределения лучевой структуры в картинной плоскости наблюдателя. Показано, что лучевая картина космического излучения, полученная на основе расчетов в локальной системе координат, подобна картине, рассчитанной в сферических координатах, когда плоскость падения излучения имеет смещение от плоскости дуги большого круга не более, чем $\pm 0.3\text{rad}$. Этот результат позволяет в ряде случаев при интерпретации данных астрофизических экспериментов использовать структуру излучения, рассчитанную в приближении квазисферической системы координат.

Ключевые слова: математическое моделирование, геометрическая оптика, дифференциальные уравнения, алгоритмы, вариационное исчисление, космическое излучение, поле тяготения

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проекты FZZE-2023-0004, FZZE-2024-0005), проекта ИГУ 091-25-306.

ABOUT APPLICATION OF QUASI-SPHERICAL SYSTEM OF COORDINATES FOR CALCULATION OF REFRACTION CHARACTERISTICS OF SPACE RADIATION

Lukyantsev D.S., Afanasev N.T., Kalashnikova E.I.

Irkutsk State University, Irkutsk, e-mail: spacemaklay@gmail.com

Approximation of local (quasi-spherical) system of coordinates bounded with plane of the great circle arc is used for increase operative of numerical scheme of calculation of transport of space radiation. The plane binds through source of radiation, spherical center and point of observation. Purpose present investigation consists of estimation of possibilities of quasi-spherical approximation for calculating of refraction characteristics of space radiation at propagation in gravitational field of astrophysical objects. Light differential equations in the Lagrange-Euler's form obtained from the Fermat's principle are derived for analyze of refraction of beams in spherical and local coordinate systems. Numerical integration of differential equations is performed with help function `odeint` (library `scipy`) on programming language Python. Results of exact and approximate numerical calculations of refraction characteristics of space radiation in gravitational field of single astrophysical object are demonstrated as example of implementation of considered numerical schemes. For clarity results of modeling are presented as projections of distribution of light structure in picture plane of observer. It's shown that light picture of space radiation obtained with help local coordinate system matches with picture calculated for spherical coordinates when plane of incidence has offset from the plane of the great circle arc no more than $\pm 0.3\text{rad}$. This result applies in some cases to use structure of radiation calculated in the approximation of quasi-spherical system of coordinates for interpretation of data of astrophysical experiments.

Keywords: mathematical modeling, geometrical optics, differential equations, algorithms, variation calculus, space radiation, gravitational field

The work was carried out with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (projects FZZE-2023-0004, FZZE-2024-0005), Irkutsk State University project 091-25-306.

Введение

В настоящее время для исследования космического электромагнитного излучения в различных частотных диапазонах широко применяются методы математического моделирования [1, с. 9; 2, с. 30]. Наиболее простым и наглядным методом моделирова-

ния транспорта излучения является лучевое приближение [3, с. 72; 4, с. 39]. С его помощью можно отследить динамику высокочастотной асимптотики волнового поля в космической среде. Необходимым условием применимости геометрической оптики является предположение о медленном

изменении показателя преломления среды в масштабе длины волны. Лучевой метод эффективно используется в задачах распространения излучения в атмосферах Земли и других планет [3, с. 91; 5; 6, с. 157]. Построение лучевых траекторий положено в основу метода просвечивания околосолнечной плазмы [7–9]. Траекторные расчеты нашли применение в задачах зондирования солнечного ветра [10]. Лучевые представления позволяют одновременно исследовать эффекты космической плазмы и особенности проявления кривизны пространства в структуре электромагнитного излучения галактических и внегалактических источников [1, с. 65; 11; 12]. В ряде случаев при реализации геометрической оптики вводятся различные дополнительные приближения, позволяющие существенно повысить оперативность расчетов траекторий лучей, которые описывают рефракцию излучения в неоднородной среде. В частности, одним из таких приближений является применение локальной (квазисферической) системы координат [4, с. 87; 11; 12]. Основой локального приближения является предположение, что излучение распространяется в основном в плоскости дуги большого круга, то есть в плоскости, проходящей через центр сферической системы координат, источник и пункт наблюдения [6, с. 45]. Для убедительной интерпретации данных радиоастрономических и астрофизических экспериментов особенно важен высокоточный расчет рефракции электромагнитного излучения при распространении в трехмерно-неоднородной космической среде. Поэтому требуется анализ достоверности локального приближения в условиях, когда плоскость падения излучения наклонена относительно плоскости дуги большого круга.

Цель исследования – оценка возможностей квазисферического приближения для расчета рефракционных характеристик космического излучения при распространении в поле тяготения астрофизических объектов.

Материалы и методы исследования

В данном исследовании использован метод геометрической оптики [3, с. 72]

для расчета влияния поля тяготения массивного объекта на рефракцию электромагнитного излучения. Траекторная задача решена в евклидовом пространстве путем введения эффективного показателя преломления вакуума, выраженного через гравитационный потенциал. В качестве математического аппарата использованы нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, полученные из вариационного принципа Ферма [13, с. 305]. Численное интегрирование лучевых уравнений выполняется классическим методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности с использованием функции `odeint` (модуль `scipy.integrate` языка Python) [14]. С помощью численного моделирования удается эффективно визуализировать лучевую структуру излучения точечного источника в картинной плоскости наблюдателя для широкого набора параметров задачи. Наряду со строгими численными расчетами, для приближенного синтеза лучевой картины применяется локальная (квазисферическая) система координат [6, с. 45], позволяющая описать процесс распространения излучения в окрестности плоскости дуги большого круга, проходящей через центр сферической системы координат, источник и пункт наблюдения.

Результаты исследования и их обсуждение

Для оценки границ применимости локального приближения получим вначале лучевые дифференциальные уравнения из вариационного принципа Ферма [13, с. 305]:

$$\delta l = \delta \int_{(S)} n dS = 0, \quad (1)$$

где δl – вариация оптического пути распространения; n – показатель преломления космической среды; dS – элемент дуги. Учитывая, что dS в случае сферической системы координат имеет вид

$$dS = \sqrt{(dR)^2 + (R \sin \theta d\varphi)^2 + (R d\theta)^2},$$

где R , φ , θ – соответственно радиальная, азимутальная и полярная угловые координаты луча, выражение (1) можем записать в виде

$$\delta l = \delta \int_{\phi_n}^{\phi_k} n(R, \varphi, \theta) R \sqrt{\sin^2 \theta + \left(\frac{R'}{R}\right)^2 + (\theta')^2} d\varphi = \delta \int_{\phi_n}^{\phi_k} F(R, \varphi, \theta, R', \theta') d\varphi = 0, \quad (2)$$

где $R' = dR/d\varphi$, $\theta' = d\theta/d\varphi$, ϕ_n , ϕ_k – начальная и конечная угловые координаты пунктов излучения и приема, соответственно. Распишем выражение (2):

$$\int_{\varphi_n}^{\varphi_k} \frac{\partial F}{\partial R} \delta R d\varphi + \int_{\varphi_n}^{\varphi_k} \frac{\partial F}{\partial R'} \delta R' d\varphi + \int_{\varphi_n}^{\varphi_k} \frac{\partial F}{\partial \theta} \delta \theta d\varphi + \int_{\varphi_n}^{\varphi_k} \frac{\partial F}{\partial \theta'} \delta \theta' d\varphi = 0. \quad (3)$$

Используя (3), получим путем известных преобразований систему дифференциальных уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial R} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial F}{\partial R'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial F}{\partial \theta'} = 0. \quad (4)$$

Соответствующие частные производные имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial R} &= \left(\frac{\partial n}{\partial R} R + n \right) \sqrt{\sin^2 \theta + \left(\frac{R'}{R} \right)^2 + (\theta')^2} - \frac{n \left(\frac{R'}{R} \right)^2}{\sqrt{\sin^2 \theta + \left(\frac{R'}{R} \right)^2 + (\theta')^2}}; \\ \frac{\partial F}{\partial R'} &= \frac{n \left(\frac{R'}{R} \right)}{\sqrt{\sin^2 \theta + \left(\frac{R'}{R} \right)^2 + (\theta')^2}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta'} = \frac{n R \theta'}{\sqrt{\sin^2 \theta + \left(\frac{R'}{R} \right)^2 + (\theta')^2}}; \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \frac{\partial n}{\partial \theta} R \sqrt{\sin^2 \theta + \left(\frac{R'}{R} \right)^2 + (\theta')^2} + \frac{n R \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \left(\frac{R'}{R} \right)^2 + (\theta')^2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя выражения (5) в систему (4), получим дифференциальные уравнения вида

$$\begin{aligned} \left(\frac{R'}{R} \right)' &= \left(\sin^2 \theta + \left(\frac{R'}{R} \right)^2 + (\theta')^2 \right) \left[\frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial \varphi} \left(\frac{R'}{R} \right) - R \frac{\partial n}{\partial R} \right) - 1 \right] + \theta' \left(\frac{R'}{R} \right) \operatorname{ctg} \theta; \\ \theta'' &= \frac{1}{n} \left(\sin^2 \theta + \left(\frac{R'}{R} \right)^2 + (\theta')^2 \right) \left(\frac{\partial n}{\partial \theta} - \frac{\partial n}{\partial \varphi} \theta' \right) + \sin \theta \cos \theta + 2 \operatorname{ctg} \theta (\theta')^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Вводя текущие углы рефракции α, β , из системы (6) получим лучевые дифференциальные уравнения в форме Лагранжа – Эйлера в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\varphi} &= R \operatorname{ctg} \beta \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{d\varphi} = \operatorname{tg} \alpha \sin \theta; \\ \frac{d\beta}{d\varphi} &= \sin \theta \left(1 + \sin^2 \beta \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \left[\frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \beta - R \frac{\partial n}{\partial R} \right) - 1 \right] - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \sin 2\beta \cos \theta; \\ \frac{d\alpha}{d\varphi} &= \sin \theta \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \beta \cos^2 \alpha \right) \frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial \theta} - \frac{\partial n}{\partial \varphi} \operatorname{tg} \alpha \right) + \cos \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Для оперативности и наглядности расчетов рефракции космического излучения в различных средах нередко используется квазисферическая система координат [6, с. 45] и предполагается, что траектории лучей сосредоточены в окрестности плоскости дуги большого круга, проходящей через источник, приемник и центр сферической системы координат ($\theta(\varphi = 0) = \pi/2$). В этом случае для элемента дуги имеем

$$dS = \sqrt{(dR)^2 + (R d\varphi)^2 + (R d\theta)^2}.$$

Проводя аналогичные аналитические преобразования, что и при выводе (7), получим систему лучевых уравнений в квазисферической системе координат. С учетом упрощенной записи элемента дуги dS вариационный принцип (2) принимает вид

$$\delta l = \delta \int_{\varphi_n}^{\varphi_k} n(R, \varphi, \theta) R \sqrt{1 + \left(\frac{R'}{R}\right)^2 + (\theta')^2} d\varphi = \delta \int_{\varphi_n}^{\varphi_k} G(R, \varphi, \theta, R', \theta') d\varphi = 0. \quad (8)$$

Расписывая выражение (8) с подынтегральной функцией $G(R, \varphi, \theta, R', \theta')$, имеем

$$\int_{\varphi_n}^{\varphi_k} \frac{\partial G}{\partial R} \delta R d\varphi + \int_{\varphi_n}^{\varphi_k} \frac{\partial G}{\partial R'} \delta R' d\varphi + \int_{\varphi_n}^{\varphi_k} \frac{\partial G}{\partial \theta} \delta \theta d\varphi + \int_{\varphi_n}^{\varphi_k} \frac{\partial G}{\partial \theta'} \delta \theta' d\varphi = 0. \quad (9)$$

Используя (9), получим систему дифференциальных уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial G}{\partial R} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial G}{\partial R'} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \theta} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial G}{\partial \theta'} = 0. \quad (10)$$

В этом случае входящие в систему (10) частные производные принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial R} &= \left(\frac{\partial n}{\partial R} R + n \right) \sqrt{1 + \left(\frac{R'}{R}\right)^2 + (\theta')^2} - \frac{n \left(\frac{R'}{R}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{R'}{R}\right)^2 + (\theta')^2}}, \\ \frac{\partial G}{\partial R'} &= \frac{n \left(\frac{R'}{R}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{R'}{R}\right)^2 + (\theta')^2}}, \quad \frac{\partial G}{\partial \theta'} = \frac{n R \theta'}{\sqrt{1 + \left(\frac{R'}{R}\right)^2 + (\theta')^2}}, \quad \frac{\partial G}{\partial \theta} = \frac{\partial n}{\partial \theta} R \sqrt{1 + \left(\frac{R'}{R}\right)^2 + (\theta')^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Решая систему (10) с учетом выражений (11), получим дифференциальные уравнения вида

$$\begin{aligned} \left(\frac{R'}{R}\right)' &= - \left[1 + \left(\frac{R'}{R}\right)^2 + (\theta')^2 \right] \left[\frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial \varphi} \left(\frac{R'}{R}\right) - R \frac{\partial n}{\partial R} \right) - 1 \right]; \\ \theta'' &= \frac{1}{n} \left[1 + \left(\frac{R'}{R}\right)^2 + (\theta')^2 \right] \left(\frac{\partial n}{\partial \theta} - \frac{\partial n}{\partial \varphi} \theta' \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Путем введения текущих углов рефракции α, β из системы (12) получим лучевые уравнения в квазисферическом приближении [12]:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\varphi} &= R \operatorname{ctg} \beta, \quad \frac{d\beta}{d\varphi} = \left(1 + \sin^2 \beta \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \left[\frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \beta - R \frac{\partial n}{\partial R} \right) - 1 \right]; \\ \frac{d\theta}{d\varphi} &= \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{d\alpha}{d\varphi} = \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \beta \cos^2 \alpha \right) \frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial \theta} - \frac{\partial n}{\partial \varphi} \operatorname{tg} \alpha \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что в случае $\theta(\varphi = 0) = \pi/2$ система (7) переходит в систему (13).

Анализ возможностей применения квазисферической системы координат для расчетов рефракционных характеристик космического излучения был проведен в наиболее информативном случае распространения электромагнитного излучения в поле тяготе-

ния одиночного астрофизического объекта. Как известно [15, с. 170], согласно общей теории относительности (ОТО) для слабых гравитационных полей задача рефракции излучения в окрестности астрофизического объекта может быть решена в обычном евклидовом пространстве путем введения эффективного показателя преломления вакуума.

Численные расчеты на основе систем уравнений (7), (13) были выполнены с использованием модели эффективного показателя преломления вида

$$n = 1 + \frac{R_g}{R}, \quad (14)$$

где R_g – гравитационный радиус массивного объекта. Геометрия задачи и схематическое изображение лучевых траекторий показаны на рис. 1.

Численное интегрирование уравнений (7), (13) проводилось методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности [16, с. 363] с использованием функции `odeint` (модуль `scipy.integrate` языка Python) [14], предназначенной для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Численные расчеты были выполнены с начальными условиями: $R(\varphi = 0) = R_n = 50cul$ (cul – условная единица длины), $\theta(\varphi = 0) = \pi/2 + \Delta\theta$ (система (7)) и $\theta(\varphi = 0) = \Delta\theta$ (система (8)), $\alpha(\varphi = 0) = \alpha_n$, $\beta(\varphi = 0) = \beta_n$. Значения начальных углов излучения α_n варьировались в диапазоне $[-0.75; 0.75]$, а углов β_n – в диапазонах $[-0.75; 0.06]$ и $[0.06; 0.75]$. Смещение начального значения полярной координаты $\Delta\theta$ рассматривалось в диапазоне $[0.0; 0.5]rad$. Расчеты проводились для случая $R_g = 1cul$

до расстояния $R_k = 50cul$, где фиксировались конечные значения угловых координат ($\varphi_k; \theta_k$). Для наглядности результаты моделирования представлялись в виде проекции в картинной плоскости наблюдателя посредством перерасчета конечных значений координат луча:

$$x_k = R_k \cos \varphi_k \cos \theta_k, \quad y_k = R_k \sin \varphi_k \cos \theta_k.$$

Результаты расчета представлены на рис. 2, где красными кружками обозначены проекции точек прихода лучей на фиксированное расстояние R_k , полученные посредством системы (7), а черными кружками – с применением системы (13).

Анализ рис. 2 показал, что с увеличением смещения начального значения полярной угловой координаты ошибка расчета лучевых траекторий с использованием приближенной системы (13) возрастает. Эта погрешность соответственно приводит к возникновению отличий и в лучевой структуре излучения в картинной плоскости наблюдателя. Проявляющиеся тонкие эффекты в центральных областях лучевой картины, рассчитанные на основе строгой системы (7), становятся более заметными при меньших смещениях начальной полярной координаты, чем при расчетах с использованием системы (13).

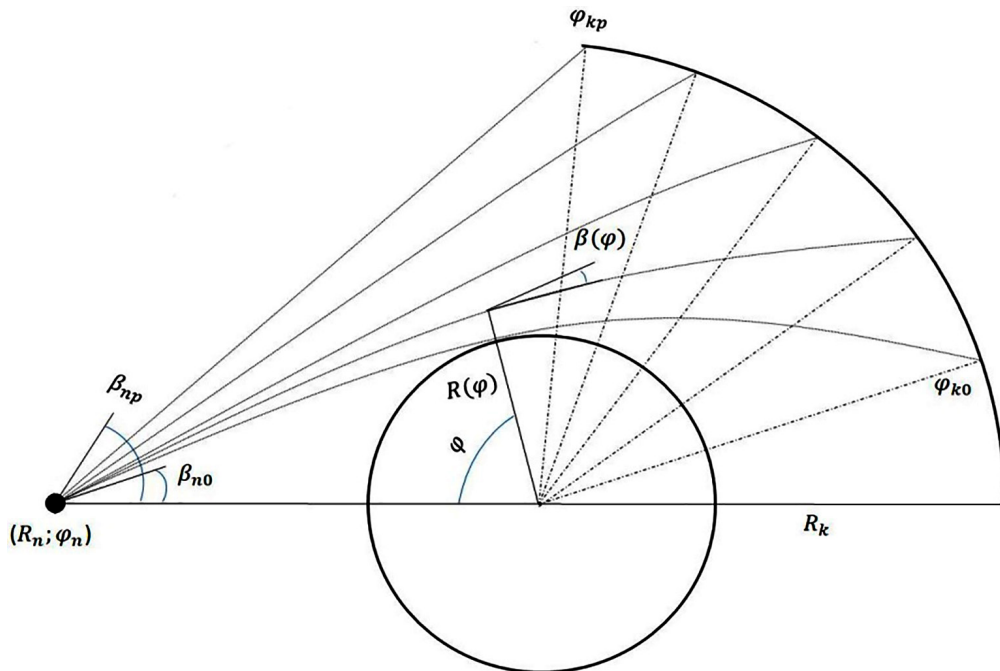


Рис. 1. Геометрия задачи. Вид сбоку. $(R_n; \varphi_n)$ – координаты источника излучения относительно центра массивного объекта; R_k – расстояние до сферической поверхности; $[\varphi_{ko}; \varphi_{kp}]$ – распределение конечных угловых координат лучей на сферической поверхности; $[\beta_{no}; \beta_{np}]$ – диапазон начальных углов излучения; $R(\varphi)$, φ , $\beta(\varphi)$ – соответственно текущие значения радиальной и угловой координат луча, а также угла рефракции
Источник: составлено авторами по результатам данного исследования

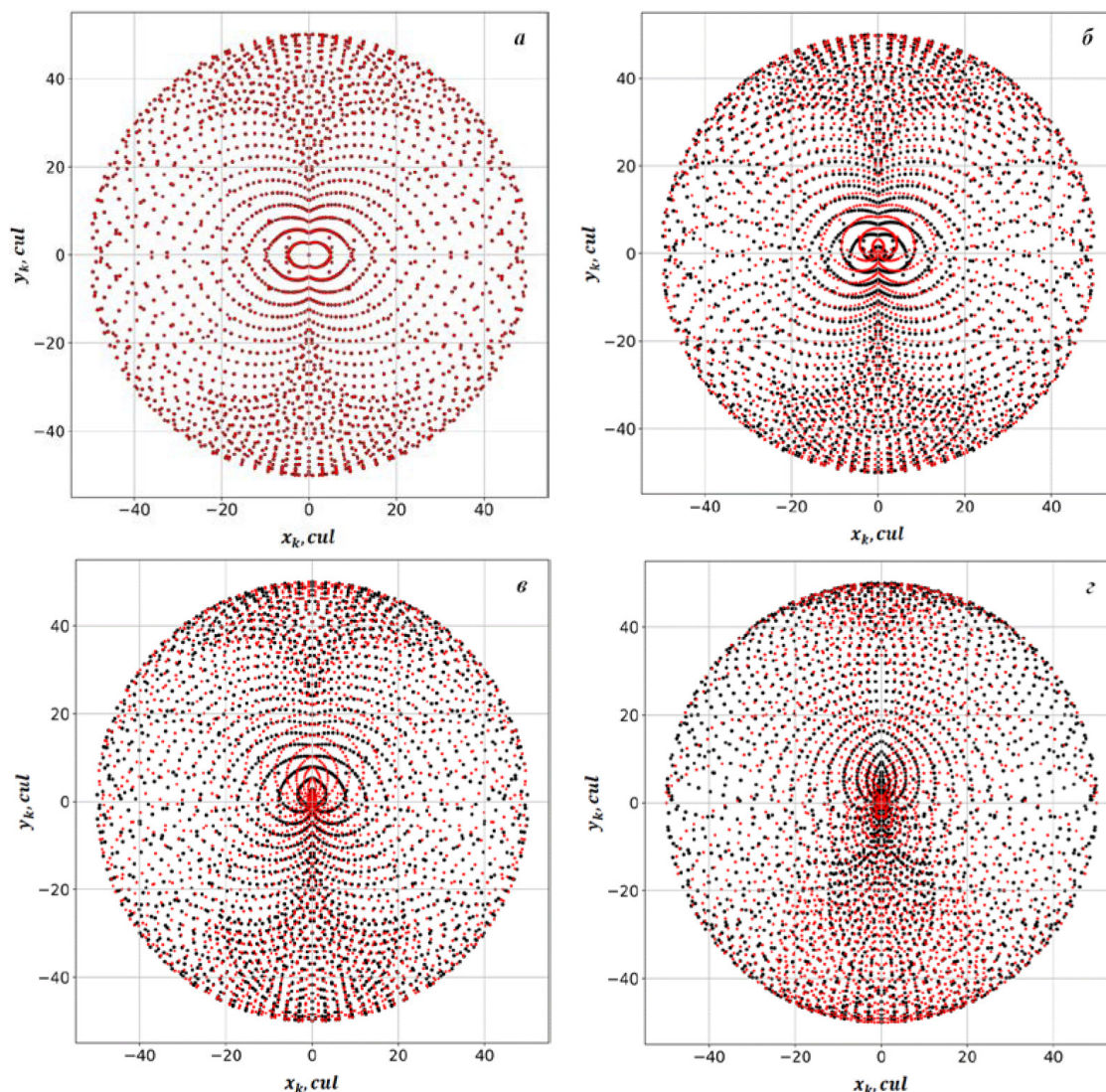


Рис. 2. Картинная плоскость наблюдателя при распространении излучения в поле тяготения астрофизического объекта при различных значениях $\Delta\theta$: а – 0rad ; б – 0.03rad ; в – 0.3rad ; г – 0.5rad
 Источник: составлено авторами по результатам данного исследования

Между тем общий интегральный эффект воздействия поля тяготения одиночного астрофизического объекта на рефракционные характеристики излучения в обоих случаях сохраняется с достаточной точностью до значений смещения $\Delta\theta \pm 0.3\text{rad}$. Этот результат позволяет в ряде случаев при интерпретации данных измерений характеристик космического излучения [1, с. 74; 17] использовать результаты математического моделирования, полученные в приближении локальной (квазисферической системы координат).

Заключение

Сделана оценка возможностей локального (квазисферического) приближения геометрической оптики для расчета реф-

ракционных характеристик космического электромагнитного излучения при распространении в поле тяготения массивного объекта. Выполнен детальный сравнительный анализ аналитических преобразований при выводе строгих и приближенных систем лучевых дифференциальных уравнений в форме Лагранжа – Эйлера из вариационного принципа Ферма. На основе систем лучевых уравнений проведено численное моделирование рефракционных характеристик космического излучения прошедшего поле тяготения одиночного гравитационного объекта. Показано, что в квазисферическом приближении лучевая структура излучения в картинной плоскости наблюдателя соответствует строгим расчетам, когда

плоскость падения излучения наклонена относительно плоскости дуги большого круга не более, чем $\pm 0.3rad$.

Список литературы

1. Многоканальная астрономия / Ред.-сост. А.М. Черепашук. Фрязино: Век 2, 2019. 528 с. ISBN 978-5-85099-198-2.
2. Галанин М.П., Тихонов Н.А., Токмачев М.Г. Математическое моделирование: теория и применение. М.: ЛЕНАНД, 2022. 600 с. ISBN 978-5-9710-9750-1.
3. Яковлев О.И., Якубов В.П., Урядов В.П., Павельев А.Г. Распространение радиоволн. М.: ЛЕНАНД, 2019. 496 с. ISBN 978-5-9710-6642-2.
4. Яковлев О.И. Космическая радиофизика. М: РФФИ, Научная книга, 1998. 432 с. ISBN 5-7871-00-42-5.
5. Арманд Н.А., Гуляев Ю.В., Гаврик А.Л., Ефимов А.И., Матюгов С.С., Павельев А.Г., Савич Н.А., Самознаев Л.Н., Смирнов В.М., Яковлев О.И. Результаты исследований солнечного ветра и ионосфер планет радиофизическими методами // Успехи физических наук. 2010. Т. 180. Вып. 5. С. 542–548. DOI: 10.3367/UFNr.0180.201005j.0542.
6. Колосов М.А., Шабельников А.В. Рефракция электромагнитных волн в атмосферах Земли, Венеры и Марса. М.: Советское радио, 1976. 220 с. [Электронный ресурс]. URL: <https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/KolosovShabelnikov1976ru.pdf> (дата обращения: 23.06.2025).
7. Ефимов А.И., Луканина Л.А., Смирнов В.М., Чашей И.В., Бёрд М.К., Петцольд М. Детектирование области повышенной турбулентности сверхкороны Солнца с использованием спутников *VENUS EXPRESS* и *MARS EXPRESS* // Геомагнетизм и аэрономия. 2021. Т. 61. № 3. С. 275–281. DOI: 10.31857/S0016794021030044.
8. Лукьянцев Д.С., Афанасьев Н.Т., Танаев А.Б., Чудаев С.О. Численно-аналитическое моделирование рефракции низкочастотных солнечных радиовсплесков в возмущенной короне // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2023. № 4. С. 43–54. DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.4.
9. Ким Д.Б., Афанасьев Н.Т., Лукьянцев Д.С., Ситов И.С., Танаев А.Б., Чудаев С.О. Рефракционные искажения характеристик сигнала в возмущенном информационном канале с конечной кривизной // Современные наукоемкие технологии. 2023. № 12–2. С. 203–209. DOI: 10.17513/snt.39882.
10. Ефимов А.И., Смирнов В.М., Чашей И.В., Набатов А.С. Крупномасштабные возмущения солнечного ветра по данным радиопросвечивания с космического аппарата *MARS EXPRESS* и локальных измерений на спутнике *WIND* // Геомагнетизм и аэрономия. 2023. Т. 63. № 3. С. 275–283. DOI: 10.31857/S0016794022600661.
11. Lukyantsev D.S., Afanasiev N.T., Kalashnikova E.I., Tanaev A.B. Mathematical modeling of influence of localized gravitational noise on propagation of electromagnetic radiation in gravitational field // St. Petersburg: Technical Physics. 2024. Vol. 69, Is. 12. P. 1839–1841. URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/60398> (дата обращения: 23.06.2025). DOI: 10.61011/TP.2024.12.60398.338-24.
12. Лукьянцев Д.С., Афанасьев Н.Т., Танаев А.Б., Чудаев С.О. Численно-аналитическое моделирование гравитационного линзирования электромагнитных волн в случайно-неоднородной космической плазме // Компьютерные исследования и моделирование. 2024. Т. 16. № 2. С. 433–443. DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-2-433-443.
13. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. 5-е изд. М.: Едиториал УРСС, 2002. 319 с. ISBN 5-354-00135-8.
14. Igwe Ch. G., Jackreece P. C., George I. Comparative convergence analysis of Runge-Kutta fourth order and Runge-Kutta-Fehlberge methods implementation in Matlab and Python applied to a series RLC circuit // International Journal of Innovative Science and Research Technology. 2025. Vol. 10, Is. 3. P. 2957–2975. URL: <https://www.ijisrt.com/comparative-convergence-analysis-of-runge-kutta-fourth-order-and-runge-kuttafehlberge-methods-implementation-in-matlab-and-python-applied-to-a-series-rlc-circuit> (дата обращения: 24.06.2025).
15. Алексеев С.О., Памятных Е.А., Урсулов А.В., Третьякова Д.А., Латош Б.Н. Общая теория относительности. Введение. Современное развитие и приложения. М.: Издательская группа URSS, 2020. 400 с. ISBN 978-5-9710-7589-9.
16. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М: Лаборатория знаний, 2020. 636 с. ISBN 978-5-00101-836-0.
17. Райков А.А., Орлов В.В. Квазары ультравысокой светимости как проявление гравитационного мезолинзирования // Астрофизический бюллетень. 2016. Т. 71. № 2. С. 163–166.; URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kvazary-ultravysokoy-svetimosti-kak-proyavlenie-gravitatsionnogo-mezolinzirovaniya> (дата обращения: 24.07.2025).