

УДК 519.63  
DOI

## АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

Катаева Л.Ю.

*Нижегородский институт путей сообщения – филиал  
ФГБОУ ВО «Приволжский государственный университет путей сообщения»,  
Нижний Новгород, e-mail: kataeval2010@mail.ru*

В данной статье представлен сравнительный анализ численных методов решения обобщенного уравнения Бюргерса, включающего нелинейную конвекцию, переменную диссипацию и линейный источник-входной член. Исследование охватывает явный метод Эйлера, полуявный метод Кранка – Николсона с адаптивным временным шагом, неявные схемы с применением метода Ньютона и метод линий с жестким адаптивным интегратором. Для оценки эффективности и устойчивости методов проведены численные эксперименты при различных значениях параметров: коэффициента конвекции от 0,05 до 1,33, коэффициента диффузии от 0,05 до 5 и коэффициента затухания в диапазоне от -0,10 до 0,10. Результаты показали, что методы Кранка – Николсона и линий обеспечивают высокую точность с относительными ошибками, не превышающими  $10^{-3}$ . Метод линий продемонстрировал стабильную вычислительную эффективность и устойчивость к вариации параметров задачи. Явный метод Эйлера характеризуется значительным ростом ошибок и ограниченной устойчивостью при увеличении вязкости, а неявные схемы с методом Ньютона требуют существенно больших вычислительных ресурсов, что снижает их практическую применимость. Выполненный анализ подтвердил высокую результативность изученных вычислительных методов при описании эволюции нелинейных волновых явлений, что предоставляет исследователям и инженерам проверенный инструмент для решения практических задач. Перспективы дальнейших исследований включают разработку гибридных численных алгоритмов и учет дополнительных физических факторов, что позволит повысить точность и эффективность моделирования сложных нелинейных процессов.

**Ключевые слова:** обобщенное уравнение Бюргерса, численные методы, вычислительная эффективность

## ANALYSIS OF NUMERICAL METHODS FOR SOLVING THE GENERALIZED BURGERS EQUATION FOR NONLINEAR WAVES

Kataeva L.Yu.

*Nizhny Novgorod Institute of Railway Transport, a branch of the Volga State  
Transport University, Nizhny Novgorod, e-mail: kataeval2010@mail.ru*

This article presents a comparative analysis of numerical methods for solving the generalized Burgers equation incorporating nonlinear convection, variable dissipation, and a linear source term. The study encompasses the explicit Euler method, the semi-implicit Crank-Nicolson method with adaptive time stepping, implicit schemes employing the Newton method, and the method of lines with a stiff adaptive integrator. To assess the efficiency and stability of the methods, numerical experiments were conducted across various parameter ranges: convection coefficients from 0.05 to 1.33, diffusion coefficients from 0.05 to 5, and damping coefficients ranging from -0.10 to 0.10. The results demonstrated that the Crank-Nicolson and method of lines approaches achieve high accuracy with relative errors not exceeding  $10^{-3}$ . The method of lines exhibited stable computational efficiency and robustness to parameter variations. The explicit Euler method is characterized by significant error growth and limited stability with increasing viscosity, while implicit schemes with the Newton method require substantially greater computational resources, reducing their practical applicability. The performed analysis confirmed the high effectiveness of the studied computational methods in describing the evolution of nonlinear wave phenomena, providing researchers and engineers with validated tools for solving practical problems. Future research prospects include the development of hybrid numerical algorithms and incorporation of additional physical factors to enhance the accuracy and efficiency of modeling complex nonlinear processes.

**Keywords:** generalized Burgers equation, numerical methods, computational efficiency

### Введение

Обобщенное уравнение Бюргерса является сложным с точки зрения численного моделирования. В отличие от классического уравнения Бюргерса, обобщенное одновременно отражает затухание волнового поля, его деформацию под влиянием дисперсионных эффектов и воздействие внешних силовых полей и позволяет опи-

сывать акустические, гидродинамические и плазменные системы, где взаимодействие нескольких механизмов формирует широкий спектр динамических явлений [1; 2]. В реакционно-диффузионных и теплопередающих процессах обобщенное уравнение Бюргерса помогает прогнозировать распространение тепла и химических реагентов с учетом нелинейных реакций и градиен-

тов концентрации [3, с. 146]. В аэрогазодинамике оно широко используется для изучения формирования и эволюции ударных волн, а также пограничных слоев в потоках с изменяющейся вязкостью [4]. В области плазменной физики модель позволяет исследовать турбулентные структуры и перенос заряда в магнитогидродинамических системах [5]. Микрофлюидные приложения требуют точного описания переноса микро- и наночастиц в средах со сложной реологией, что также реализуется с помощью обобщенного уравнения Бюргерса [6]. В экологии и эпидемиологии данная постановка служит для моделирования миграции популяций и распространения инфекционных агентов в неоднородных средах [7]. Астрономы применяют эту модель для изучения медленно распространяющихся волн в корональных магнитных петлях Солнца, где вязкость убывает экспоненциально, а внешние магнитные поля диктуют поведение плазмы [8; 9].

Классическое уравнение Бюргерса с постоянным коэффициентом вязкости и без источников допускает аналитическое решение через преобразование Коула – Хопфа (Cole-Hopf transform), которое сводит нелинейное уравнение к линейному уравнению теплопроводности, а также допускает применение классических аналитических методов – преобразования Лапласа и Фурье, метод обратных задач и асимптотические разложения ограничены применимостью к линейным или сильно упрощенным ситуациям. В отличие от классического уравнения Бюргерса, его обобщенная формулировка включает коэффициент диффузии как функцию времени, линейный источниковый член, а также кусочно-заданные начальные и жесткие граничные условия. Для таких задач аналитическое решение в общем виде не существует. Возможно применение асимптотических и приближенных методов решения уравнения Бюргерса при малых или больших значениях параметров, построенных с помощью разложений, многомасштабного анализа. При фиксированных параметрах и существенных упрощениях, приводящих к частным случаям, можно получить частичные аналитические решения. В большинстве реальных краевых задач с переменными коэффициентами и резкими фронтами аналитика уступает место высокоэффективным численным методам, способным сочетать точность и устойчивость при обработке сложных неразрывностей. За последнее десятилетие разработаны и усовершенствованы несколько ключевых подходов:

– Высокопорядковые WENO-схемы конечных разностей, которые предотвращают

искусственные колебания при прорисовке резких фронтов и сохраняют физические границы решения [1; 2]. Временная дискретизация – неявно-явные (IMEX) Runge – Kutta методы 3–4-го порядка (для конвекции явный шаг, для диссипации – неявный).

– Современные BSQI-WENO-подходы с полунепрерывной адаптацией предлагают исследователям интеллектуальное решение для численного моделирования: алгоритм самостоятельно выбирает сплайновую квазинтерполяцию для регулярных зон и переходит к WENO-восстановлению пятого порядка при обнаружении резких переходов. Временная составляющая обеспечивается методикой Рунге – Кутты четвертой степени точности с адаптивным контролем погрешности, базирующимся на интегральном осреднении локальных невязок [4].

– Гибридные методы конечных элементов и конечных разностей (FEM-FDM) обеспечивают оптимальный баланс между точностью аппроксимации диффузионных членов и простотой реализации конвективных слагаемых [5]. В рамках данного подхода конечные элементы применяются для дискретизации вторых производных (диффузионный член), конечные разности используются для нелинейного конвективного члена, а источниковые слагаемые аппроксимируются локальными методами.

– Среди различных численных методов, применяемых для решения уравнения Бюргерса, особого внимания заслуживают методы, основанные на квадратичных В-сплайнах и конечных элементах, которые демонстрируют хорошую сходимость и устойчивость [10].

– Двухэтапные Lax – Wendroff схемы четвертого порядка (двухэтапные схемы RK4-WENO5 и GRP4-HWENO5), демонстрирующие высокую временную и пространственную точность при умеренных ресурсных затратах [6]. На первом этапе осуществляется расчет промежуточных значений, а на втором – коррекция на базе локальной задачей Римана, при этом экономия памяти достигается за счет одноуровневой организации шагов.

– Специальные WENO-методы для неравномерных сеток, сохраняющие формальный порядок аппроксимации даже на сильно искаженных разрежениях сетки [7]. В данном случае используются простые индикаторы гладкости с линейной стоимостью по порядку, а сам алгоритм автоматически адаптирует веса при локальных сжатиях/растяжениях ячеек.

– ИмPLICITно-экPLICITные Runge – Kutta схемы (IMEX), которые обеспечивают устойчивость при жесткости уравне-

ния, не теряя эффективности явных шагов по конвекции [9; 11].

– Дискретизации discontinuous Galerkin с локальной адаптацией порядка полиномов и гибкой сеточной структурой для сложных геометрий [5].

– Спектральные и спектрально-элементные методы (spectral/hp), гарантирующие экстремально высокую точность при моделировании дисперсионных эффектов и гладких решений [11].

– Среди различных численных методов, применяемых для решения уравнения Бюргерса, особого внимания заслуживают методы, основанные на квадратичных В-сплайнах и конечных элементах, которые демонстрируют хорошую сходимость и устойчивость [12; 13].

– Современные итерационные методы, такие как ускоренный новый итерационный метод (ARNIM) и модифицированный New Iterative Method (MNIM), которые демонстрируют высокую скорость сходимости и эффективность при решении нелинейных уравнений типа Бюргерса – Хаксли без необходимости дискретизации [14; 15].

Каждый из перечисленных подходов обладает своим балансом между устойчивостью, сходимостью и вычислительными затратами для частных случаев обобщенного уравнения Бюргерса. **Целью данной работы** является сравнительный анализ современных численных методов решения обобщенного уравнения Бюргерса с нелинейной конвекцией, переменной диссипацией и линейным источниковым членом. Исследование направлено на оценку точности, устойчивости и вычислительной эффективности рассматриваемых методов при моделировании нелинейных волновых процессов.

### Материалы и методы исследования

В данной работе рассматривается обобщенное уравнение Бюргерса, описывающее эволюцию поля  $U(y, \tau)$  с нелинейной конвекцией  $\left( AU \frac{\partial U}{\partial y} \right)$ , диффузией  $\left( f(\alpha, \tau) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$  и потенциальным  $(BaU)$  членами на про-

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta \tau \left( -AU_i^n \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta y} + f(\alpha, \tau_n) \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{\Delta y^2} - BaU_i^n \right). \quad (4)$$

Схема (4) обладает первым порядком точности по времени и вторым порядком по пространству. Данный метод прост в реализации и позволяет быстро получить приближенное решение. Однако метод является условно устойчивым и требует ограничения на шаг по времени, связанного с условием

странственном интервале с граничными условиями Дирихле и заданным начальным распределением  $U(y, 0)$ . В качестве математической модели использовано уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + AU \frac{\partial U}{\partial y} - Df(\alpha, \tau) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + BaU = 0, \quad (1)$$

где параметры  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$  и  $D$  задают интенсивность нелинейного, диссипативного и потенциального вкладов, а функция  $f(\alpha, \tau)$  задает нелинейные и диффузионные свойства системы.

Рассматриваемое обобщенное уравнение (1) сохраняет нелинейный конвективный член  $\left( AU \frac{\partial U}{\partial y} \right)$ , аналогичный классическому уравнению Бюргерса, однако коэффициент  $A$  фиксирован и отличается от единицы. Диффузионный член содержит коэффициент  $Df(\alpha, \tau) = De^{-\alpha\tau}$ , который экспоненциально убывает ( $D > 0$ ) или экспоненциально возрастает ( $D < 0$ ) по времени при положительных значениях  $\alpha$ , что приводит к переменной жесткости задачи. Линейный член  $BaU$  вносит дополнительное затухание или источник, влияя на динамику решения.

*Явный метод Эйлера с центральными разностями и адаптивным шагом.* Для аппроксимации уравнения можно использовать явный метод Эйлера, в котором временная производная аппроксимируется разностным отношением первого порядка (2), а пространственные производные – центральными разностями второго порядка (3). Обновление решения на временном шаге  $n+1$  имеет вид (4)

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_i^n \approx \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_i^n \approx \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{\Delta y^2}, \quad (3)$$

Куранта – Фридрихса – Леви (CFL), которое в данном случае зависит от максимального значения нелинейного члена  $\left( AU \frac{\partial U}{\partial y} \right)$ , переменного диффузионного коэффициента  $(f(\alpha, \tau))$  и линейного источника  $(Ba)$ .

Наличие разрывов в начальном условии и переменного коэффициента  $f(\alpha, \tau)$  может приводить к появлению численных осцилляций и артефактов, особенно при больших значениях параметров  $\alpha$  и больших  $R$ , что требует дополнительного сглаживания или использования схем с ограничителями. Например, при экспоненциально убывающей функции  $(Df(\alpha, \tau) = De^{-\alpha\tau})$  устойчивость схемы становится зависимой от времени. При уменьшении  $f(\alpha, \tau)$  диффузионное

сглаживание ослабевает, и ограничение на шаг по времени становится более жестким из-за усиления конвективного и нелинейного влияния. Линейный источник может выступать как затухание (при  $B\alpha > 0$ ) или как источник энергии (при отрицательных значениях). Это влияет на поведение решения и может усиливать или ослаблять устойчивость численной схемы. В частности, шаг по времени должен удовлетворять неравенству (5).

$$\Delta\tau \leq C \min \left( \frac{\Delta y}{A \max |U|}, \frac{\Delta y^2}{\max |f(\alpha, \tau)|}, \frac{1}{B|\alpha|} \right), \quad (5)$$

где  $C$  – константа порядка единицы. При нарушении этого условия численное решение становится неустойчивым и может демонстрировать неограниченный рост ошибок. Следовательно, для обеспечения устойчивости схемы (4) требуется достаточно мелкий шаг по времени с динамическим контролем.

*Полунеявный метод Кранка – Николсона с адаптивным шагом.* Для повышения

устойчивости и точности для численного решения обобщенного уравнения Бюргера применим полунеявный метод Кранка – Николсон, в котором диффузионный член с переменным коэффициентом аппроксимируется неявно, а нелинейный конвективный и линейный члены – явно, а при необходимости можно использовать итерационные процедуры. Для рассматриваемой задачи схема имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta\tau} = & -AU_i^n \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta y} + \\ & + \frac{1}{2} \left( f(\alpha, \tau_{n+1}) \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{\Delta y^2} + f(\alpha, \tau_n) \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{\Delta y^2} \right) - B\alpha U_i^n. \end{aligned} \quad (6)$$

Схема (4) обладает вторым порядком точности по времени для диффузионного члена и улучшенной устойчивостью, что позволяет использовать более крупные шаги по времени по сравнению с явными методами. Решение на каждом временном шаге требует решения системы линейных уравнений, что увеличивает вычислительную сложность, но обеспечивает стабильность и точность при жестких параметрах. Минимальный шаг  $\Delta y$  определяется требованиями точ-

ности и особенностями решения (например, шириной фронтов, характером переходов), а при слишком крупном шаге  $\Delta y$  возникают численные диффузия и потеря точности, а также возможны нестабильности, связанные с аппроксимацией производных. Аппроксимация диффузионного члена неявно в полунеявном методе Кранка – Николсон значительно улучшает устойчивость по сравнению с явными методами, но требуются ограничения на  $\Delta\tau$ . Для удобства записи введем обозначения

$$U_{max}(\tau) = \max_y |U(y, \tau)|, \quad f_{min} = \min_{\tau} f(\alpha, \tau).$$

Тогда для обеспечения численной устойчивости и точности полунеявного метода Кранка – Николсон необходимо, чтобы временной шаг  $\Delta\tau$  удовлетворял следующему условию

$$\Delta\tau \leq \min \left( C \frac{\Delta y}{A \max(U_{max}(0))}, \Delta\tau_{diff}(f_{min}, \Delta y), \frac{1}{B|\alpha|} \right), \quad (7)$$

где  $C \in (0, 1]$ .

$$\Delta \tau_{diff}(f_{min}, \Delta y) = \kappa \frac{\Delta y^2}{f_{min} + \varepsilon}, \quad \varepsilon = 10^{-8}, \quad \kappa \in (0, 1].$$

Выбор  $\kappa = 0,5$  – это компромисс между эффективностью и устойчивостью. При наблюдении численных осцилляций или расходимости следует уменьшить  $\kappa$  до 0,3, а если решение стабильно и хочется увеличить шаг во времени, то значение  $\kappa$  можно увеличить до 0,8–1,0.

*Неявные схемы с использованием метода Ньютона для решения нелинейной*

*системы.* В решении обобщенного уравнения Бюргерса (1) при применении полностью неявной схемы можно использовать такой итерационный численный метод для нахождения корней нелинейной системы, как метод Ньютона. Для получения конечно-разностного представления уравнения (1) используем неявную схему Эйлера по времени:

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \Delta \tau \left( AU_i^{n+1} \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2\Delta y} - Df(\alpha, \tau_{n+1}) \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{\Delta y^2} + B\alpha U_i^n \right) = 0, \quad (8)$$

где  $U_i^{n+1} = [U_1^{n+1}, U_2^{n+1}, \dots, U_{N-1}^{n+1}]^T$  – вектор неизвестных на новом временном слое (граничные значения  $U_0^{n+1}$  и  $U_N^{n+1}$  задаются жестко). В результате получаем систему вида  $F(U^{n+1}) = 0$ , которую решаем методом Ньютона (9).

$$U_{(k+1)}^{n+1} = U_{(k)}^{n+1} - J^{-1}(U_{(k)}^{n+1}) F(U_{(k)}^{n+1}), \quad (9)$$

где  $U_{(k)}^{n+1}$  – приближение решения на итерации  $(k)$ ,

$$J(U_{(k)}) = \frac{\partial F}{\partial U} \Big|_{U_{(k)}} \quad \text{– якобиан системы,}$$

$$F(U) = [F_1(U), F_2(U), \dots, F_{N-1}(U)]^T.$$

Элементы якобиана для каждого узла  $i = 1, N-1$  и переменной  $U_j^{n+1}, j = 1, N-1$  определяются  $J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial U_j^{n+1}}$ .

Учитывая, что  $F_i$  зависит только от  $U_{i+1}^{n+1}, U_i^{n+1}, U_{i-1}^{n+1}$  получаем разреженную структуру якобиана с элементами:

$$J_{ij+1} = \Delta \tau \left( A \frac{U_i^{n+1}}{2\Delta y} - D \frac{f(\alpha, \tau_{n+1})}{\Delta y^2} \right),$$

$$J_{ij} = \Delta \tau \left( A \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2\Delta y} - B\alpha + 2D \frac{f(\alpha, \tau_{n+1})}{\Delta y^2} \right),$$

$$J_{ij-1} = \Delta \tau \left( -A \frac{U_i^{n+1}}{2\Delta y} + D \frac{f(\alpha, \tau_{n+1})}{\Delta y^2} \right). \quad (10)$$

Метод Ньютона обладает квадратичной сходимостью, но только при достаточно близком начальном приближении и требует вычисления якобиана, что существенно увеличивает вычислительные затраты. Для повышения устойчивости предпочтительнее использовать модифицированный метод Ньютона или методы с линейным поиском. В задачах с жесткими нелинейностями и резкими переходами требуется дополнительное регуляризующее сглаживание или адаптивный выбор параметров. Данный метод является мощным инструментом для решения нелинейных систем, возникающих при неявной дискретизации уравнения Бюргерса.

*Метод линий с центральными разностями и жестким адаптивным временным интегратором* является классическим и широко применяемым подходом для решения нелинейных жестких уравнений в частных производных [12; 13]. В данной работе используется пространственная дискретизация с помощью центральных разностей второго порядка точности для аппроксимации производных (2) и (3), а для интегрирования по времени применяется жесткий адаптивный решатель обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на методах обратных разностных формул (Backward Differentiation Formula). Следует отметить, что центральные разности для диффузионного члена условно устойчивы при явных схемах, однако в рассматриваемом методе временная интеграция выполняется отдельно, и устойчивость решения определяется выбранным временным интегратором. Центральные разности для нелинейного конвективного члена не являются монотонными и могут приводить к численным осцилляциям, особенно при наличии резких градиентов или разрывов.

**Результаты исследования  
и их обсуждение**

Во всех численных экспериментах для решения уравнения (1) с заданными начальными и граничными условиями используется равномерная или локально адаптивная пространственная сетка (h-адаптация) с минимальным размером ячейки  $\Delta x$ , обеспечивающим адекватное разрешение областей резких градиентов. Временной шаг  $\Delta \tau$  подчиняется критерию CFL для явных конвективных методов и контролю локальной ошибки для IMEX-схем. Для оценки качества решений и сравнения методов использованы  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_\infty$  – нормы ошибки относительно эталонного решения на очень мелкой сетке, время вычисления и шаг по пространству. Для тестирования алгоритмов выбран частный

случай уравнения Бюргерса с известным аналитическим решением. В уравнении (1) выбраны значения коэффициентов  $A = 1$ ,  $B = 0$ , и  $f(\alpha, \tau) = v = Const > 0$ ,  $D = 1$ , что приводит к классическому уравнению Бюргерса (11) с однородными граничными условиями и начальным состоянием (12). Наличие потенциального члена приводит к изменению амплитуды решения в соответствии с видом задаваемой функции.

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + AU \frac{\partial U}{\partial y} - v \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \quad (11)$$

$$U(0, \tau) = 0, U(1, \tau) = 0 \text{ при } \tau > 0 \text{ и}$$

$$U(y, 0) = \sin(\pi y) \text{ при } 0 < y < 1. \quad (12)$$

Точное решение для данной задачи представлено в работе [10; 13] и имеет вид

$$U(y, \tau) = 2\pi v \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(- (n\pi)^2 v \tau\right) n \sin(n\pi y)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(- (n\pi)^2 v \tau\right) \cos(n\pi y)},$$

$$a_0 = \int_0^1 \exp\left[-\frac{1 - \cos(\pi y)}{2\pi v}\right] dy,$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \exp\left[-\frac{1 - \cos(\pi y)}{2\pi v}\right] \cos(n\pi y) dy, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

В табл. 1 приведены результаты численного моделирования задачи (11) с граничными условиями нулевого значения на границах по пространственной переменной и начальным условием в виде синусоиды (12). Исследование проведено для трех значений параметра вязкости  $v$ : 0,1; 0,5 и 1,5, с использованием четырех численных методов – явного метода Эйлера с адаптивным шагом, метода Кранка – Николсон с адаптивным шагом, неявных схем с методом Ньютона (три итерации) и метода линий. Для каждого метода представлены относительные нормы ошибки (14)–(16), минимальный шаг по времени ( $\Delta t_{\min}$ ) и среднее время вычисления одного шага по времени ( $\tau_{\text{ср}}$ ). Явный метод Эйлера демонстрирует наибольшие значения ошибок при всех рассматриваемых уровнях вязкости, а также требует существенно меньших временных шагов из-за ограничений по устойчивости, что снижает его точность, но его простой алгоритм не требует итерационных процедур и поэтому обладает минимальным временем вычислений. Метод Кранка – Николсон с адаптивным шагом и метод линий показывают значительно более высокую точность

и более крупные временные шаги без потери устойчивости, при этом время их работы остается приемлемым. Неявные схемы в сочетании с методом Ньютона занимают промежуточное положение: они обеспечивают меньшую точность по сравнению с Кранком – Николсон и методом линий, но требуют большего времени из-за сложности алгоритма и необходимости итеративных вычислений. При увеличении параметра вязкости наблюдается рост ошибок у явного метода Эйлера, тогда как методы Кранка – Николсон и линий сохраняют стабильные и низкие значения ошибок, что подчеркивает их надежность и эффективность при моделировании процессов с выраженным диффузионным характером. Временные затраты у всех методов, кроме явного, остаются относительно постоянными, что свидетельствует о хорошей адаптивности и сбалансированности выбранных численных схем.

На рисунке показаны результаты численного решения задачи (11)–(12) методом линий с центральными разностями и жестким адаптивным временным интегратором. Аналогичный результат дают остальные методы.

Таблица 1

Результаты по нормам ошибок при заданном значении шага по координате при  $dy = 2.040816e-02$ , шаг по времени и среднее время выполнения одного шага

Методы	$e_1$	$e_2$	$e_\infty$	$\Delta\tau_{\min}$	$\tau_{cp}$ , сек
$v = 0.1$					
Явный метод Эйлера	8.395e-02	9.951e-02	1.675e-01	1.6733e-04	0.000090
Метод Кранка – Николсон с адаптивным шагом	4.457e-03	5.440e-03	9.113e-03	2.0408e-03	0.000094
Неявные схемы с методом Ньютона (итераций 3)	4.589e-03	5.440e-03	9.082e-03	2.0408e-03	0.000208
Метод линий	4.599e-03	5.539e-03	9.109e-03	2.0408e-03	0.000335
$v = 0.5$					
Явный метод Эйлера	2.390e-01	2.672e-01	3.839e-01	6.7071e-05	0.000003
Метод Кранка – Николсон с адаптивным шагом	2.620e-03	3.000e-03	4.542e-03	2.0408e-03	0.000044
Неявные схемы с методом Ньютона (итераций 3)	3.603e-03	4.045e-03	5.877e-03	2.0408e-03	0.000112
Метод линий	2.666e-03	3.029e-03	4.523e-03	2.0408e-03	0.000109
$v = 1.5$					
Явный метод Эйлера	4.803e-01	5.337e-01	7.544e-01	2.4967e-05	0.000004
Метод Кранка – Николсон с адаптивным шагом	7.039e-04	7.856e-04	9.113e-03	2.0408e-03	0.000041
Неявные схемы с методом Ньютона	3.925e-03	4.363e-03	6.181e-03	2.0408e-03	0.000107
Метод линий	7.282e-04	8.114e-04	1.156e-03	2.0408e-03	0.000070

Источник: составлено автором на основе полученных данных в ходе исследования.

Таблица 2

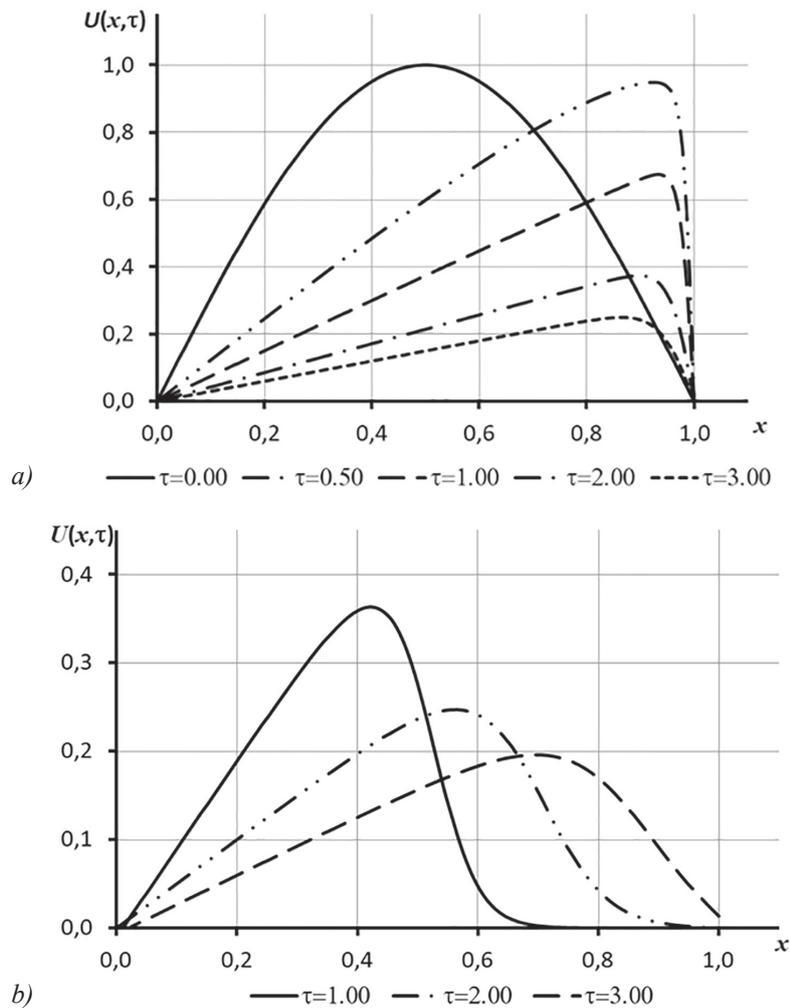
Сравнение метода Кранка – Николсон и метода линий с центральными разностями и адаптивным жестким интегратором для обобщенного уравнения Бюргерса

$A$	$D$	$B$	$\tau_{KN}$ , сек	$\Delta\tau_{KN}$	$\tau_L$ , сек	$\Delta\tau_L$
0,50	0,05	-0,10	0,128103	0,000342	0,011092	0,005025
0,50	0,05	0,10	0,115607	0,000342	0,008708	0,005025
0,50	0,50	-0,10	1,111318	0,000002	0,011125	0,005025
0,50	0,50	0,10	1,149861	0,000002	0,010020	0,005025
0,50	1,00	-0,10	2,214532	0,000046	0,011786	0,005025
0,50	1,00	0,10	2,207285	0,000046	0,011699	0,005025
1,00	0,05	-0,10	0,092808	0,000918	0,009693	0,005025
1,00	0,05	0,10	0,089061	0,000918	0,009338	0,005025
1,00	0,50	-0,10	0,899959	0,000073	0,012594	0,005025
1,00	0,50	0,10	0,904544	0,000073	0,013889	0,005025
1,00	1,00	-0,10	1,825258	0,000011	0,014695	0,005025
1,00	1,00	0,10	1,839204	0,000011	0,016778	0,005025

Источник: составлено автором на основе полученных данных в ходе исследования.

В табл. 2 представлены результаты численного решения обобщенного уравнения Бюргерса с применением методов Кранка – Николсон и линий, включая параметры  $A$ ,  $D$ ,  $B$ , а также время вычислений и величину временного шага. Из табл. 2 видно, что при фиксированном значении  $A$  и посто-

янным знаке  $B$  увеличение диффузионного коэффициента  $D$  приводит к значительному росту времени вычислений и уменьшению временного шага у метода Кранка – Николсон, что связано с необходимостью более точной дискретизации для сохранения устойчивости.



Численное решение уравнения Бюргера для различных моментов времени  
 Источник: составлено автором по результатам данного исследования

Как видно из результатов численного моделирования, метод линий показывает высокую эффективность и устойчивость к изменению параметров и имеет относительно низкое время работы с неизменным шагом по времени. Изменение знака параметра  $B$  с  $+0,1$  на  $-0,1$  слабо влияет на производительность обоих методов, а повышение значения  $A$  с  $0,5$  до  $1$  и увеличение значений параметра  $D$  с  $0,05$  до  $1$  способствует увеличению времени вычислений у метода Кранка – Николсон, при этом метод линий более стабилен и экономичен в вычислительном плане, что делает его более предпочтительным для решения обобщенного уравнения Бюргера.

#### Заключение

В данной статье проведен комплексный анализ таких современных численных методов, как метод линий с жестким адап-

тивным интегратором, полуявный метод Кранка – Николсон, метод Эйлера и неявные схемы с использованием метода Ньютона для решения обобщенного уравнения Бюргера с нелинейной конвекцией, переменной диссипацией и потенциальным членом. Анализ полученных результатов показал, что такие методы, как Кранка – Николсон и метод линий, обеспечивают оптимальное сочетание точности, устойчивости и вычислительной эффективности при решении задач с переменными коэффициентами и резкими фронтами. Явный метод Эйлера более прост в реализации, но имеет более низкую точность и ограниченную устойчивость при увеличении параметра вязкости. Неявные схемы с методом Ньютона имеют высокую точность, но при этом требовательны к вычислительным ресурсам, что снижает их эффективность в сравнении с альтернативными методами. При этом метод линий

имеет высокую устойчивость к изменению параметров задачи и сохраняет стабильное время вычислений, что делает его предпочтительным для практического применения в моделировании нелинейных волн.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на несколько ключевых областей. Во-первых, расширение класса решаемых задач и учет дополнительных физических эффектов, включая аэродинамические воздействия и многомерность. Во-вторых, разработка более совершенных адаптивных алгоритмов. В-третьих, создание гибридных численных методов, объединяющих преимущества различных подходов для повышения общей эффективности вычислений.

### Список литературы

1. Islam M.N., Hafez M.G., Deb U.K. Burgers equation with cubic and quartic nonlinearity: dynamics of heavy ion-acoustic coherent structures in unmagnetized strongly coupled plasma // *Physica Scripta*. 2025. Vol. 100, Is. 4. P. 045249. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1402-4896/adc2b0> (дата обращения: 23.07.2025). DOI: 10.1088/1402-4896/adc2b0.
2. Abd-Elzaher M., Atteya A. Negative energy dust acoustic waves evolution in a dense magnetized quantum Thomas–Fermi plasma // *Scientific Reports*. 2022. Vol. 12, Is. 1. P. 15890. URL: <https://www.nature.com/articles/s41598-022-20174-y> (дата обращения: 23.07.2025). DOI: 10.1038/s41598-022-20174-y.
3. Катаева Л.Ю. Постановка и проведение вычислительного эксперимента по исследованию аэро- и гидродинамических процессов в аварийных ситуациях природного и техногенного характера: монография. М.: РГОТУПС, 2007. 218 с. EDN: QJJOMJ. ISBN 978-5-7473-0347-8.
4. Kumar R. Adaptive semi-discrete formulation of BSQI–WENO scheme for the modified Burgers’ equation // *BIT Numerical Mathematics*. 2018. Vol. 58, Is. 1. P. 103–132. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10543-017-0675-8> (дата обращения: 23.07.2025). DOI: 10.1007/s10543-017-0675-8.
5. Sakay A.B., Selim S. A new efficient hybrid method based on FEM and FDM for solving Burgers’ equation with forcing term // *Journal of Applied Mathematics*. 2024. Vol. 2024, Is. 1. Art. 5497604. URL: <https://www.hindawi.com/journals/jam/2024/5497604/> (дата обращения: 21.07.2025). DOI: 10.1155/2024/5497604. ISSN 1110-757X.
6. Garcia-Villalba M., Colonius T., Desjardins O., Lucas D., Mani A., Marchisio D., Matar O.K., Picano F., Zaleski S. Numerical methods for multiphase flows // *International Journal of Multiphase Flow*. 2025. Vol. 191. P. 105285. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932225001636> (дата обращения: 23.07.2025). DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2025.105285.
7. Martí M.C., Mulet P., Yáñez D.J., Zorío D. Efficient WENO schemes for nonuniform grids // *Journal of Scientific Computing*. 2024. Vol. 100. Art. 6. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10915-024-02558-6> (дата обращения: 21.07.2025). DOI: 10.1007/s10915-024-02558-6.
8. Ruderman M.S., Petrukhin N.S., Kataeva L.Y. Nonlinear propagating slow waves in cooling coronal magnetic loops // *Solar Physics*. 2025. Vol. 300. P. 85–101. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11207-025-02496-y> (дата обращения: 21.07.2025). DOI: 10.1007/s11207-025-02496-y.
9. Ruderman M.S., Petrukhin N.S., Kataeva, L.Y. Non-linear damped standing slow waves in cooling coronal magnetic loops // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2025. Vol. 542, Is. 2. P. 1076–1087. URL: <https://academic.oup.com/mnras/article/542/2/1076/8230795> (дата обращения: 23.07.2025). DOI: 10.1093/mnras/staf1310.
10. Kutluay S., Esen A., Dag I. Numerical solutions of the Burgers’ equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2004. Vol. 167, Is. 1. P. 21–33. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042703008768> (дата обращения: 10.07.2025). DOI: 10.1016/j.cam.2003.09.043. ISSN 0377-0427.
11. Moghaddam P.P., Dalkhani A.R., Keshavarz N., Beyrami H., Sharifi M., Kafshdooz M.M. A Hybrid Finite-Difference and Spectral-Element Method for Free-Surface Topography Modeling // 80th EAGE Conference and Exhibition 2018: Conference Proceedings. 2018. Vol. 2018. P. 1–5. URL: <https://www.eurodoc.org/content/papers/10.3997/2214-4609.201800971> (дата обращения: 23.07.2025). DOI: 10.3997/2214-4609.201800971.
12. Geiser J. Iterative and Noniterative Splitting Methods of the Stochastic Burgers’ Equation: Theory and Application // *Mathematics*. 2020. Vol. 8, Is. 8. P. 1243. URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/8/8/1243> (дата обращения: 21.07.2025). DOI: 10.3390/math8081243.
13. Cecchi M.M., Nociforo R., Grego P.P. Space-time finite elements numerical solutions of Burgers Problems // *Le Matematiche*. 1996. Vol. 51, Is. 1. P. 43–57. URL: <https://lematematiche.dmi.unict.it/index.php/lematematiche/article/view/425> (дата обращения: 21.07.2025).
14. Rhofir K., Radid A., Laaraj M. Accelerated residual new iterative method for solving the generalized Burgers–Huxley equation // *Mathematical Modeling and Computing*. 2025. Vol. 12, Is. 1. P. 67–74. URL: [https://www.researchgate.net/publication/387555204\\_Accelerated\\_residual\\_new\\_iterative\\_method\\_for\\_solving\\_the\\_generalized\\_Burgers-Huxley\\_equation](https://www.researchgate.net/publication/387555204_Accelerated_residual_new_iterative_method_for_solving_the_generalized_Burgers-Huxley_equation) (дата обращения: 09.07.2025). DOI: 10.23939/mmc2025.01.067.
15. Ibrahim A., Kwami A.M., Barde A. On The One Step New Iterative Method for the Solution of Partial Differential Equation // *International Journal of Scientific Research in Mathematical and Statistical Sciences*. 2025. Vol. 12, Is. 2. P. 33–40. URL: [https://www.isroset.org/journal/IJSRMS/full\\_paper\\_view.php?paper\\_id=3839](https://www.isroset.org/journal/IJSRMS/full_paper_view.php?paper_id=3839) (дата обращения: 09.07.2025).