

УДК 51-77

DOI 10.17513/snt.40436

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОДДЕРЖКИ ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

¹Зайцева И.В., ²Долгополова А.Ф., ³Малафеев О.А., ³Легкова И.А., ⁴Теммеева С.А.¹ФГБОУ ВО «Российский государственный гидрометеорологический университет»,
Санкт-Петербург, e-mail: irina.zaitseva.stv@yandex.ru;²ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь;³ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», Санкт-Петербург;⁴ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет
имени В.М. Кокова», Нальчик

В работе рассматривалась детерминированная теоретико-игровая модель демографического процесса с конечным горизонтом. Целью работы являлась разработка детерминированной математической многошаговой модели с конечным числом шагов исследования демографического процесса. Для достижения цели работы были решены следующие задачи: сформулирована математическая формализация процесса, конкретно составлена детерминированная математическая модель, в которой были задействованы два участника, один из которых – регулирующий орган, принимающий законодательные решения в зависимости от складывающихся внешних и внутренних условий, влияющих на течение демографического процесса, целью которого являлась максимизация функции, зависящей от численности населения, вторым участником явились внутренние и внешние условия среды, персонализирующие складывающиеся демографические условия, цель которых противоположна целям регулирующего органа; разработано и найдено оптимальное решение для многошаговой антагонистической игры; проанализированы полученные результаты и сделаны выводы. Проводимое исследование являлось примером изучения демографических процессов математическими методами. Полученная модель позволила провести исследование воздействий, проявляющихся в процессе работы, и определить оптимальное чередование различных программ поддержки населения и многолетних программ в зависимости от ожидаемого характера условий среды каждого года планируемого цикла.

Ключевые слова: антагонистическая игра, игра с конечным горизонтом, модель демографического процесса, детерминированная теоретико-игровая модель

MATHEMATICAL MODELING OF THE STUDY OF DEMOGRAPHIC PROCESS SUPPORT

¹Zaitseva I.V., ²Dolgoplova A.F., ³Malafeyev O.A., ³Legkova I.A., ⁴Temmeeva S.A.¹Russian State Hydrometeorological University, Stavropol,
e-mail: irina.zaitseva.stv@yandex.ru;²Stavropol State Agrarian University, Stavropol;³St. Petersburg State University, St. Petersburg;⁴Kabardino-Balkarian State Agrarian University, Nalchik

The paper discusses a deterministic game-theoretic model of the demographic process with a finite horizon. The aim of the work is to develop a deterministic mathematical multistep model with a finite number of steps for studying the demographic process. To achieve the goal of the work, it is necessary to solve the following tasks: to formulate a mathematical formalization of the process, and specifically, to draw up a deterministic mathematical model in which two participants will be involved, one of which is a regulatory body that makes legislative decisions depending on the emerging external and internal conditions affecting the course of the demographic process, the purpose of which is to maximize the function depending on the size of the population, the second the participant will be internal and external environmental conditions that personify the emerging demographic conditions, the purpose of which is opposite to the goals of the regulatory body; to develop and find the optimal solution for a multi-step antagonistic game; to analyze the results obtained. The study is an example of the study of demographic processes using mathematical methods. The obtained model makes it possible to study the impacts manifested in the process of work and to determine the optimal alternation of various programs to support the population and multi-year programs depending on the expected nature of the environmental conditions of each year of the planned cycle.

Keywords: antagonistic game, finite horizon game, demographic process model, deterministic game-theoretic model

Введение

Практически все страны переживали такое явление, как демографический кризис, в разные периоды своей истории, и Российская Федерация, конечно же, не исключение. Последний кризис рождаемости

в России происходил в 1991-2008 годах. Подобные явления специалисты связывают с демографическим переходом, то есть переход от традиционного общества (для которого характерна высокая рождаемость и высокая смертность) к индустриально-

му, а затем к постиндустриальному (для которых характерна низкая рождаемость и низкая смертность). На демографическую ситуацию влияют и уровень образованности населения, и качество жизни, и социально-экономическая ситуация. Для регулирования рождаемости в России вводятся демографические программы поддержки населения. Влияние этих программ на рождаемость может быть разнообразным и зависит от разных факторов, которые можно исследовать с помощью математического моделирования.

Целью исследования являлась разработка детерминированной теоретико-игровой многошаговой модели с конечным числом шагов исследования демографического процесса.

Материалы и методы исследования

Детерминированная теоретико-игровая многошаговая модель с конечным числом шагов строилась на основе методов и алгоритмов теории игр. В работе рассмотрены две поочередные многошаговые антагонистические игры, в которых участники процесса (игроки) на каждом шаге совершают свои выборы решений поочередно. В модели задействованы два участника, один из которых – регулирующий орган, он принимает решения в зависимости от складывающихся внешних и внутренних условий, влияющих на течение демографического процесса, с целью максимизация функции, зависящей от численности населения, вторым участником являются условия среды, цель которых противоположна целям регулирующего органа. Для исследования использовались статистические данные за 2021 год в России.

Результаты исследования и их обсуждение

Постановка задачи

Предполагаем, что руководящему органу требуется определить оптимальное чередование различных программ поддержки населения и многолетних программ в зависимости от ожидаемого характера условий среды каждого года планируемого цикла. Неопределенность долгосрочных прогнозов внешних условий обуславливает целесообразность теоретико-игрового подхода, если принять за агентов I и II, преследующих прямо противоположные цели, соответственно руководящий орган и условия среды. Тогда для конечного множества альтернатив, имеющихся в распоряжении руководящего органа, и конечного множества прогнозов условий среды на каждый год цикла можно построить позиционные игры,

а затем найти оптимальную последовательность чередования [1; 2].

Допустим, что в первый год цикла планируется ввести программу поддержки населения № 1 на один год или многолетнюю программу А и что, согласно долгосрочному прогнозу, ожидается четыре варианта условий состояния среды, включающей в себя экономическое, политическое и социальное состояние среды ($\Pi_1^1, \Pi_2^1, \Pi_3^1, \Pi_4^1$). Если ввести программу № 1 и состояние среды первого года будут Π_1^1 , то программа № 1 успеет положительно подействовать и на следующий год вводим программы № 2 и № 3. При этом программы № 1 и № 2 дают прирост населения для условий Π_1^2 состояния среды второго года, равный t_1 , а для условий Π_2^2 – равный t_2 . Программы № 1 и № 3 дают прирост, равный t_3 и t_4 соответственно для условий Π_1^1 и Π_2^2 . Если же на первом году ввести программу поддержки № 1, а состояние среды окажется Π_2^1, Π_3^1 или Π_4^1 , то на второй год новые программы нельзя вводить, что обеспечивает прирост, равный соответственно t_5, t_6 и t_7 . Многолетняя программа А сменяется программой № 4 или № 5, если подтверждается прогноз условий среды Π_1^1 или Π_2^1 , и программой № 6 или № 7, если подтверждается прогноз условий Π_3^1 или Π_4^1 . При этом программа № 4 (№ 5) в условиях Π_1^1 первого года дает прирост t_8 или t_9 (t_{10} или t_{11}) в зависимости от условий Π_1^2 или Π_2^2 второго года, а в условиях Π_2^1 первого года дает прирост t_{12} (t_{13}) независимо от условий второго года. Программы № 6 и № 7 в условиях Π_3^1 первого года, независимо от условий второго года, дают соответственно прирост t_{14} и t_{15} , а в условиях Π_4^1 первого года – соответственно прирост t_{16} и t_{17} .

Решение поставленной задачи

Рассмотрим решение задачи, считая, что игрок II не имеет информации о выбранных альтернативах агентом I на каждом ходе. Очевидно, что первый ход делает агент I, находясь в информационном множестве $U_I^1 = \{q_1\}$ и имея две альтернативы (1-я программа № 1, 2-я – многолетняя программа А). Второй ход принадлежит агенту II, который находится в информационном множестве $U_{II}^1 = \{q_2, q_3\}$, и имеется четыре альтернативы (альтернатива k соответствует условиям среды первого года Π_k^1). Третий ход делает агент I, выбирая одну из двух альтернатив: в информационном множестве $U_I^2 = \{q_4\}$ альтернатива 1 – программа № 2 и альтернатива 2 – программа № 3;

в информационном множестве $U_I^3 = \{q_5, q_6\}$ альтернатива 1 – программа № 4 и альтернатива 2 – программа № 5; в информационном множестве $U_I^4 = \{q_7, q_8\}$ альтернатива 1 – программа № 6 и альтернатива 2 – программа № 7. Четвертый ход делает агент II, находясь в информационном множестве $U_{II}^2 = \{q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}\}$ и выбирая одну из двух альтернатив (альтернатива 1 – условия среды второго года Π_1^2 , альтернатива 2 – условия среды второго года Π_2^2). Стратегии агента

I можно записать как следующую систему $\|i_1\|i_2\|$, где i_1 – альтернатива, выбираемая на первом ходе ($i_1 = 1, 2$), а i_2 – альтернатива, выбираемая на третьем ходе ($i_2 = 1, 2$). Стратегии агента II можно записать как следующую систему $\|j_1\|j_2\|$, где j_1 – альтернатива, выбираемая на втором ходе ($j_1 = 1, 2, 3, 4$), а j_2 – альтернатива, выбираемая на четвертом ходе ($j_2 = 1, 2$) [3-4]. В результате функция выигрыша агента I будет представлена таблицей 1.

Таблица 1

Функция выигрыша игрока I

	Стратегия игрока II							
	$\ 1\ 1\ $	$\ 1\ 2\ $	$\ 2\ 1\ $	$\ 2\ 2\ $	$\ 3\ 1\ $	$\ 3\ 2\ $	$\ 4\ 1\ $	$\ 4\ 2\ $
$\ 1\ 1\ $	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
$\ 1\ 2\ $	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}	t_{16}
$\ 2\ 1\ $	t_{17}	t_{18}	t_{19}	t_{20}	t_{21}	t_{22}	t_{23}	t_{24}
$\ 2\ 2\ $	t_{25}	t_{26}	t_{27}	t_{28}	t_{29}	t_{30}	t_{31}	t_{32}

Пусть t_k принимает такие значения, что функцией выигрыша агента I будет матрица

$$H = \begin{pmatrix} 27.3 & 28 & 49 & 49 & 50 & 50 & 24.2 & 24.2 \\ 27.3 & 29 & 49 & 49 & 50 & 50 & 24.2 & 24.2 \\ 51.7 & 57.7 & 51.7 & 51.7 & 29 & 29 & 49 & 49 \\ 44.7 & 50 & 49 & 49 & 44.7 & 44.7 & 57.7 & 57.7 \end{pmatrix}.$$

Лемма. Пусть $\Gamma = \langle x, y, H \rangle$ – конечная антагонистическая игра, $\Gamma' = \langle x|x_0, y, H \rangle$ – подыгра игры Γ , а x_0 – чистая стратегия игрока I в игре Γ , доминируемая некоторой стратегией X_0 , спектр которой не содержит x_0 . Тогда всякое решение (X^*, Y^*, v) игры Γ'

является решением игры Γ [5, с. 20]. Следовательно, всякое решение игры Γ_1 является решением игры Γ .

Представим игру Γ_1 (руководящий орган выбирает 1-ю альтернативу на 1-м ходе) матрицей

$$H^1 = \begin{pmatrix} 27.3 & 28 & 49 & 49 & 50 & 50 & 24.2 & 24.2 \\ 27.3 & 29 & 49 & 49 & 50 & 50 & 24.2 & 24.2 \end{pmatrix}.$$

Из анализа матрицы H_1 понятно, что при подтверждении прогноза условий среды Π_1^1 в первый год и Π_1^2 на второй год, либо Π_4^1 в первый год прирост рождаемости будет составлять $27.3 \cdot 10^4$ человек, либо $24.2 \cdot 10^4$, что составит максимальный прирост. Если же условия среды будут Π_1^1 и Π_2^2 , соответственно в первый и во вто-

рой год, то прирост рождаемости составит $29 \cdot 10^4$ человек. При условиях Π_2^1 и Π_3^1 прирост $49 \cdot 10^4$ новорожденных и $50 \cdot 10^4$ новорожденных соответственно. Далее рассмотрим ситуацию выбора 2-й альтернативы на первом ходе. По лемме решение игры Γ_2 может быть решением игры Γ . Представим игру Γ_2 матрицей

$$H^2 = \begin{pmatrix} 51.7 & 57.7 & 51.7 & 51.7 & 29 & 29 & 49 & 49 \\ 44.7 & 50 & 49 & 49 & 44.7 & 44.7 & 57.7 & 57.7 \end{pmatrix}.$$

Сопоставляя матрицу H_2 , получаем следующие результаты. При условиях Π_1^1 и Π_1^2 , соответственно в первый и во второй год, либо при Π_2^1 ожидается прирост рождаемости, равный $51.7 \cdot 10^4$ человек. Если подтверждается условие Π_1^1 в первый год и Π_2^2 во второй год, либо Π_4^1 , то прирост рождаемости составит $57.7 \cdot 10^4$ человек. При условиях Π_3^1 прирост равен $44.7 \cdot 10^4$ новорожденных, что составит максимальный прирост.

Таким образом, агент I выбирает альтернативу 1 на первом ходе и альтернативу 2 на третьем ходе, либо альтернативу 2 на первом ходе и альтернативу 1 на третьем ходе, если на втором ходе будет выбрана альтернатива 1 или 2, и альтернатива 2, если на втором ходе будет выбрана альтернатива 3 или 4. В содержательной терминологии задачи необходимо ввести программу поддержки населения № 1 в первый год и программу № 3 во второй год либо ввести многолетнюю программу А в первый год и программу № 4 во второй год, если подтвердится прогноз Π_1^1 или Π_2^1 , и программу № 7 – во второй год, если подтвердится прогноз Π_3^1 или Π_4^1 .

Вероятные выигрыши в условиях переменной удельной стоимости

Рассмотрим наиболее вероятные выигрыши из первой части задачи в условиях переменной удельной стоимости, выделяемой на поддержку одной семьи [6-8]. Пусть руководящий орган имеет в своем распоряжении L женщин, находящихся в репродуктивном возрасте, и может ввести m программ поддержки населения. Обозначив через y_i прирост рождаемости после введения программы типа i , через ξ_i – долю населения, на которую направлена i -я программа, а через p_i – удельную стоимость, необходимую для поддержки семьи после рождения ребенка, можно выразить общую стоимость формулой

$$M = \sum_{i=1}^m y_i \xi_i L p_i. \quad (1)$$

Удельная стоимость является функцией от количества новорожденных, родители которых воспользовались i -й программой поддержки населения демографии, то есть

$$p_i = f_i(g_i), \quad (2)$$

где g_i – общее количество новорожденных после ввода в действие программы i -го типа.

Можно считать, что

$$g_i = \bar{y}_i \eta_i T, \quad (3)$$

где $\bar{y}_i$ – средний прирост рождаемости после программы i -го типа, T – общая численность женского населения, находящегося в репродуктивном возрасте, а η_i – доля численности населения, на которое направлена программа типа I [9]. Подставляя формулы (2) и (3) в (1),

$$M = \sum_{i=1}^m y_i \xi_i L f_i(\bar{y}_i \eta_i T). \quad (4)$$

Обозначив через агента I – руководящий орган, а через агента II – условия среды, приходим к антагонистической игре, в которой стратегиями агента I будут векторы

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m), \quad \xi_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \xi_i = 1;$$

стратегиями агента II – векторы

$$y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m), \quad \eta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \eta_i = 1;$$

функция выигрыша задается формулой (4). Очевидно, что чем в большей мере население воспользуется одной из программ, тем меньше удельная стоимость затрат на каждую семью. Следовательно, каждая из функций f_i монотонно убывает [9]. Будем считать, что это убывание происходит с показательной скоростью, то есть каждая из функций f_i имеет вид $f_i = \alpha_i g_i^{-\epsilon_i}$; для которой коэффициенты α_i и показатели ϵ_i вычисляются статистическими методами [10, с. 146].

После подстановки выражения для f_i в формулу (4) получим

$$M = \sum_{i=1}^m y_i \xi_i L \alpha_i (\bar{y}_i \eta_i T)^{-\epsilon_i},$$

$$\text{или } M = \sum_{i=1}^m k_i \xi_i L \eta_i^{-\epsilon_i}, \quad (5)$$

где $k_i = y_i \alpha_i / (\bar{y}_i T)^{\epsilon_i}$. В этом случае функция выигрыша (5) является линейной по стратегии агента I и выпуклой относительно стратегии агента II [9]. Следовательно, на основании теорем 1 и 2, каждый из игроков имеет оптимальные чистые стратегии [5, с. 34].

Теорема 1. Если x и y – сепарабельные компакты, множество x выпукло, а функция H непрерывна на $x \times y$ и вогнута по x при каждом значении y , то в игре $\Gamma = \langle x, y, H \rangle$ первый игрок имеет оптимальную чистую стратегию.

Таблица 2

Оптимальные стратегии

Вид стратегии	№ 1 и № 3	А и № 4
Показатели	1	2
$y_i = \bar{y}_i$ (10 тыс.)	27,3	51,7
ε_i	1,85	2,63
α_i	$(1,52 \cdot 10^9)^{1,85} = 9,69 \cdot 10^{16}$	$(3,56 \cdot 10^9)^{2,63} = 2,05 \cdot 10^{25}$
k_i	3,030	4,000
Вид стратегии	А и № 7	№ 1
Показатели	3	4
$y_i = \bar{y}_i$ (10 тыс.)	44,7	24,2
ε_i	5,00	0,515
α_i	$(1,20 \cdot 10^9)^5 = 2,49 \cdot 10^{45}$	$(1,47 \cdot 10^9)^{0,515} = 5,27 \cdot 10^4$
k_i	0,003	13,750

Примечание: составлено авторами на основе источников: Демографический прогноз населения до 2035 [Электронный ресурс] / Росстат. URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/12781> (дата обращения: 02.05.2025); Численность постоянного населения на 1 января [Электронный ресурс] / Росстат. URL: <https://showdata.gks.ru/report/278928/> (дата обращения: 06.05.2025).

Теорема 2. Если x и y – сепарабельные компакты, множество u выпукло, а функция H непрерывна на $x \times u$ и выпукла по u при каждом значении x , то в игре $\Gamma = \langle x, y, H \rangle$ второй игрок имеет чистую оптимальную стратегию.

Найдем оптимальные стратегии агента I (руководящий орган) и агента II (внешних и внутренних условий), используя данные из первой части работы по ведению таких стратегий, как $\|1\|1\|$, $\|1\|2\|$, $\|2\|1\|$ и $\|2\|2\|$

со стороны руководящего органа и стратегии $\|1\|1\|$, $\|2\|1\|$, $\|3\|1\|$ и $\|4\|1\|$ со стороны внешних условий [11]. Иными словами, будем исследовать оптимальность введения программ № 1 и № 3, только № 1, многолетнюю программу А и № 4 или многолетнюю программу А и № 7. Таким образом, $T = 7\,500\,000$, а остальные данные приведем в таблице 2.

После подстановки величин T , y_i , $\bar{y}_i$, ε_i , α_i в формулу (5) получим [12]

$$M = 3,030 \xi_1 L \eta_1^{-1,85} + 4,000 \xi_2 L \eta_2^{-2,63} + 0,030 \xi_3 L \eta_3^{-5,00} + 13,750 \xi_4 L \eta_4^{-0,515}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} v &= \min_y \max_x \left[3,030 \xi_1 L \eta_1^{-1,85} + 4,000 \xi_2 L \eta_2^{-2,63} + 0,030 \xi_3 L \eta_3^{-5,00} + 13,750 \xi_4 L \eta_4^{-0,515} \right] = \\ &= \min_y \max_x \left[3,030 L \eta_1^{-1,85}; 4,000 L \eta_2^{-2,63}; 0,030 L \eta_3^{-5,00}; 13,750 L \eta_4^{-0,515} \right], \end{aligned}$$

а минимум правой части последнего равенства достигается при соотношении

$$3,030 \eta_1^{-1,85} = 4,000 \eta_2^{-2,63} = 0,030 \eta_3^{-5,00} = 13,750 \eta_4^{-0,515}.$$

Отсюда получим систему уравнений [13]

$$3,030 \eta_1^{-1,85} = 4,000 \eta_2^{-2,63}, \quad 0,003 \eta_3^{-5,00} = 13,750 \eta_4^{-0,515},$$

$$3,030 \eta_1^{-1,85} = 13,750 \eta_4^{-0,515}, \quad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 = 1,$$

решением которой является вектор $y^* = (0,262; 0,432; 0,153; 0,153)$, а $v = 36,1 \cdot 10^4$ – прирост рождаемости с одной программы [14].

Для вычисления оптимальных стратегий агента I найдем частные производные функции

$$M = \sum_{i=1}^4 y_i \xi_i L \alpha_i (\bar{y}_i \eta_i T)^{-\varepsilon_i} \text{ по аргументам } \eta_i (i = 1, 2, 3) \text{ [15].}$$

Учитывая, что $\eta_4 = 1 - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3$ и $y_i = \bar{y}_i$, а затем приравнявая их к нулю, получим

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial M}{\partial \eta_1} \right|_{(x,y)} &= -\varepsilon_1 \eta_1^{-1-\varepsilon_1} y_1 \xi_1 \alpha_1 T^{-\varepsilon_1} + \varepsilon_4 y_4^{-1-\varepsilon_4} \xi_4 \alpha_4 T \eta_4^{-\varepsilon_4} = 0, \\ \left. \frac{\partial M}{\partial \eta_2} \right|_{(x,y)} &= -\varepsilon_2 \eta_2^{-1-\varepsilon_2} y_2^{1-\varepsilon_2} \xi_2 \alpha_2 T^{-\varepsilon_2} + \varepsilon_4 y_4^{-1-\varepsilon_4} \xi_4 \alpha_4 T^{-\varepsilon_4} \eta_4^{-1-\varepsilon_4} = 0, \\ \left. \frac{\partial M}{\partial \eta_3} \right|_{(x,y)} &= -\varepsilon_3 \eta_3^{-1-\varepsilon_3} y_3^{1-\varepsilon_3} \xi_3 \alpha_3 T^{-\varepsilon_3} + \varepsilon_4 y_4^{-1-\varepsilon_4} \xi_4 \alpha_4 T^{-\varepsilon_4} \eta_4^{-1-\varepsilon_4} = 0, \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 &= 1,\end{aligned}$$

решением будет вектор $x^* = (0,246; 0,184; 0,053; 0,517)$.

Таким образом, оптимальная стратегия руководящего органа состоит в выделении под i -ю программу долю ξ_i населения численности L , а значение игры (ожидаемый доход в наименее благоприятном случае) – прирост с одной программы $v = 36,1 \cdot 10^4$ новорожденных. При этом наименее благоприятный случай возникает тогда, когда реализуются условия среды согласно y^* , что возникает вследствие монотонного убывания каждой из функций f_i .

Заключение

В результате были рассмотрены две задачи:

1) при выборе на первом ходе 1-й альтернативы прирост составит $24,2 \cdot 10^4$ новорожденных, а 2-й – $44,7 \cdot 10^4$ новорожденных;

2) под i -ю программу выделить долю ξ_i населения численности L , а значение игры (ожидаемый доход в наименее благоприятном случае) равно $v = 36,1 \cdot 10^4$ новорожденных. Востребованность программы влечет за собой уменьшение удельной стоимости затрат на каждую семью в рамках данной программы.

Список литературы

1. Gintciak A., Burlutskaya Zh., Zubkova D., Uspenskiy M. The application of ontology-based game theory for decision support in sociotechnical systems // Sustainable development and engineering economics. 2024. № 3 (13). P. 65-73. DOI: 10.48554/SDEE.2024.3.5.
2. Smirnov I., Malafeyev O., Kuperin Yu., Zaitseva I., Leshcheva M., Uryadova T. Investigation of multi-agent interaction processes in socio-demographic systems. Proceedings II International Scientific Conference on Advances in Science, Engineering and Digital Education (ASEDU-II-2021). Conference Proceedings. Krasnoyarsk. 2022. P. 20027. DOI: 10.1063/5.0104217.
3. Zhou J., Petrosian O.L., Gao H. Dynamic decision-making under uncertainty: bayesian learning in environmental game theory // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2024. Т. 20. № 2. P. 289-297. DOI: 10.21638/spbu10.2024.213.

4. Петросян Л.А., Панкратова Я.Б. Кооперативные сетевые игры с изменяющейся сетевой структурой. Труды института математики и механики УрО РАН. 2025. Т. 31. № 2. DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-2-195-204.
5. Зайцева И.В., Малафеев О.А. Теория игр. СПб.: РГТМУ. 2021. 174 с. ISBN: 978-5-86813-525-5.
6. Мотовилов М.А., Карачанская Е.В. Использование методов теории игр в теории управления // Научно-техническое и экономическое сотрудничество стран АТР в XXI веке. 2020. Т. 2. С. 428-431. EDN: WXLVGD.
7. Айматова Ф.Х., Отакулов Э.Ш. Применение теории игр для решения некоторых задач в экономике // Проблемы современной науки и образования. 2021. № 12 (169). С. 5-9. EDN: DGRELS.
8. Сопочкина А.С., Сухарева С.К. Теория игр в микро-экономике // Научный аспект. 2023. Т. 11. № 12. С. 1324-1331. EDN: VSBTRO.
9. Гордеева И.В., Севодин М.А. Об игровом подходе к решению задачи отбора сельскохозяйственных культур // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 3. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=9417> (дата обращения: 15.05.2025).
10. Колданов А.П., Колданов П.А. Теория вероятностей и математическая статистика М.: ИД Высшей школы экономики. 2023. 245. ISBN: 978-5-7598-2544-9.
11. Moldabayev D., Kartbayev A. Development of an algorithm for the application of game theory in social networks // Universum: технические науки. 2024. № 6-6 (123). P. 18-21. EDN: MHNRI.
12. Юрлов Ф.Ф., Яшин С.Н., Плеханова А.Ф., Маркианов М.Ю. Проблемы и возможности применения теории антагонистических игр при анализе экономических систем различного назначения // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2022. Т. 13. № 2. С. 223-234. DOI: 10.18287/2542-0461-2022-13-2-223-234.
13. Kolokoltsov V.N. Quantum mean-field games with the observations of counting type. Games. 2021. Т. 12. № 1. P. 1-14. DOI: 10.3390/g12010007.
14. Zaitseva I.V., Malafeyev O.A., Zakharov V.V., Smirnova T.E., Novozhilova L.M. Mathematical model of network flow control // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. 873 (1). № 012036. DOI: 10.1088/1757-899X/873/1/012036.
15. Дмитрикова А.П. Приложение теории кооперативных игр к анализу отношений государственно-частного партнерства // Записки Горного института. 2011. Т. 193. С. 307-309. EDN: RPXGGR.