

УДК 621.3.037.372.3
DOI 10.17513/snt.40398

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ДВОИЧНОЙ И ТРОИЧНОЙ СБАЛАНСИРОВАННОЙ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

Юрьев Г.К., Гиниятуллин В.М., Блинова Д.В.

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный нефтяной технический университет», Уфа,
e-mail: Egorka.yurev17@mail.ru

В статье представлено исследование повышения точности решения дифференциальных уравнений за счет применения троичной сбалансированной системы счисления в экспоненциальном виде, с плавающей запятой. Сравнение результатов вычислений и оценка точности приводятся в десятичной системе счисления. Работа основана на сравнительном анализе трех подходов: аналитического решения дифференциального уравнения как эталона точности, классического метода Эйлера в двоичной системе (с проведением компьютерных вычислений) и классического метода Эйлера в троично-сбалансированной системе счисления с симметричным алфавитом $\{-1, 0, +1\}$ (вычисления выполнялись вручную). Теоретическое обоснование преимуществ троичной сбалансированной системы счисления базируется на уникальных свойствах симметричной арифметики, обеспечивающей естественную компенсацию ошибок округления. Работа демонстрирует возможность значительного повышения точности решения дифференциальных уравнений без увеличения вычислительной сложности за счет использования троично-сбалансированной системы счисления. Результаты численных экспериментов свидетельствуют о существенном преимуществе троично-сбалансированной системы счисления: достигаемая погрешность решения составляет всего 1–6%, что в несколько раз точнее по сравнению с результатами, полученными в традиционной двоичной системе. Такое улучшение точности объясняется фундаментальными свойствами симметричной троичной арифметики, где сбалансированное представление чисел способствует взаимной компенсации ошибок округления на каждом шаге вычислений. Показано, что использование троичной сбалансированной системы счисления позволяет повысить точность вычисления в 5 и более раз по сравнению с традиционной двоичной реализацией.

Ключевые слова: троичная сбалансированная система счисления, классический метод Эйлера, двоичная система счисления, обыкновенное дифференциальное уравнение, аналитический метод, численный метод

ESTIMATION OF THE ERROR IN SOLVING A DIFFERENTIAL EQUATION IN BINARY AND TERNARY BALANCED NUMBER SYSTEMS

Yurev G.K., Giniyatullin V.M., Blinova D.V.

Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, e-mail: Egorka.yurev17@mail.ru

The article presents a study of improving the accuracy of solving differential equations by using a ternary balanced number system in exponential form, with floating point. A comparison of the calculation results and an estimate of accuracy are given in decimal notation. The work is based on a comparative analysis of three approaches: the analytical solution of a differential equation as a standard of accuracy, the classical Eulerian method in a binary system (with computer calculations) and the classical Eulerian method in a ternary-balanced number system with a symmetric alphabet $\{-1, 0, +1\}$ (calculations were performed manually). The theoretical justification of the advantages of the ternary balanced number system is based on the unique properties of symmetric arithmetic, which provides natural compensation for rounding errors. The work demonstrates the possibility of significantly improving the accuracy of solving differential equations without increasing computational complexity by using a ternary-balanced number system. The results of numerical experiments indicate a significant advantage of the ternary-balanced number system: the achieved error of the solution is only 1–6%, which is several times more accurate than the results obtained in the traditional binary system. This improvement in accuracy is explained by the fundamental properties of symmetric ternary arithmetic, where a balanced representation of numbers helps to compensate for rounding errors at each step of the calculations. It is shown that the use of a ternary balanced number system makes it possible to increase the accuracy of the calculation by 5 or more times compared with the traditional binary implementation.

Keywords: ternary balanced number system, classical Eulerian method, binary number system, ordinary differential equation, analytical method, numerical method

Введение

Современные высокотехнологичные отрасли, такие как аэрокосмическая промышленность и ядерная энергетика, предъявляют исключительные требования к точности решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В аэрокосмической сфере погрешность в 0,001% при расчете

траекторий может привести к отклонению космического аппарата на километры от цели, а в ядерной энергетике ошибка в 0,0001% способна вызвать перегрев активной зоны реактора. Эти примеры наглядно демонстрируют критическую важность разработки высокоточных методов численного решения ОДУ [1; 2].

В данной работе исследуется перспективный подход к повышению точности решения дифференциального уравнения классическим методом Эйлера за счет применения троично-сбалансированной системы счисления (ТСС).

Троичная сбалансированная система счисления – это позиционная система счисления, которая содержит в своем алфавите 3 символа: -1; 0; +1. Знаки перед единицами «встроены» в свои символы, и иногда разряды ТСС-чисел так и именуются – «минус/плюс». Для обозначения -1 можно использовать любой символ кроме 0 и 1, в данной работе используется символ 7 [3; 4].

Исторически первая аппаратная реализация троично-сбалансированной системы счисления была осуществлена Н.П. Брусенцовым при создании ЭВМ «Сетунь» [5]. Впоследствии данная технология получила развитие в California Polytechnic State University [6], а в настоящее время продолжает привлекать внимание разработчиков электронных систем [7].

Цель исследования – повышение точности решения дифференциальных уравнений за счет применения троичной сбалансированной системы счисления в экспоненциальном виде, с плавающей запятой.

Материалы и методы исследования

Для проведения исследований было выбрано обыкновенное дифференциальное уравнение [8; 9], решение которого осуществлялось в двоичной [10] и троичной сбалансированной системах счисления [3] с использованием классического метода Эйлера [11].

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка [12, с. 107]:

$$y' = \frac{5}{2}e^x - \frac{\sin x}{2} - \frac{\cos x}{2}. \quad (1)$$

Формула метода Эйлера [13, с. 377]:

$$y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n). \quad (2)$$

Результаты исследования и их обсуждение

Для удобства работы с числами в данной работе используется следующая запись числа: мантисса, со значащим разрядом до запятой – в ТСС, экспонента в десятичной системе счисления – число 3 в соответствующей степени. В табл. 1 и 2 приведены пошаговые вычисления значений дифференциального уравнения в троичной сбалансированной и десятичной системах счисления с разной степенью точности.

Таблица 1

Результаты ручного расчета ОДУ в ТСС
с шагом $h = 0,05$, с точностью 7 трит после запятой

$y_i,$ $i=$	Вычисление в ТСС	Результат в десятичной СС
1	$1,7000000*3^1 + 1,1001100*3^{-3} * 1,7000000*3^1 = 1,7010701*3^1$	2,1001371
2	$1,7010701*3^1 + 1,1001100*3^{-3} * (0,0001100*3^1 + 1,7010701*3^1) = 1,7170077*3^1$	2,2167352
3	$1,7170077*3^1 + 1,1001100*3^{-3} * (0,0010701*3^1 + 1,7170077*3^1) = 1,7100000*3^1$	2,3333333
4	$1,7100000*3^1 + 1,1001100*3^{-3} * (0,0011001*3^1 + 1,7100000*3^1) = 1,7110101*3^1$	2,45816188
5	$1,7110101*3^1 + 1,1001100*3^{-3} * (0,0177101*3^1 + 1,7110101*3^1) = 1,0771007*3^1$	2,5912208
6	$1,0771007*3^1 + 1,1001100*3^{-3} * (0,0171700*3^1 + 1,0771007*3^1) = 1,0717711*3^1$	2,7338820
7	$1,0717711*3^1 + 1,1001100*3^{-3} * (0,0107007*3^1 + 1,0717711*3^1) = 1,0070707*3^1$	2,8751714
8	$1,0070707*3^1 + 1,1001100*3^{-3} * (0,0100171*3^1 + 1,0070707*3^1) = 1,0001000*3^1$	3,0370370
9	$1,0001000*3^1 + 1,1001100*3^{-3} * (0,0117777*3^1 + 1,0001000*3^1) = 1,0170707*3^1$	3,2085048
10	$1,0170707*3^1 + 1,1001100*3^{-3} * (0,0110717*3^1 + 1,0170707*3^1) = 1,0117770*3^1$	3,3909465

Источник: составлено авторами.

Таблица 2

Результаты ручного расчета ОДУ в ТСС
с $h = 0,05$, с точностью 4 трит после запятой

y_i $i =$	Вычисление в ТСС	Результат в десятичной СС
1	$1,7000 * 3^1 + 1,1001 * 3^{-3} * 1,7000 * 3^1 = 1,7010 * 3^1$	2,111111
2	$1,7010 * 3^1 + 1,1001 * 3^{-3} * (0,0001 * 3^1 + 1,7010 * 3^1) = 1,7170 * 3^1$	2,222222
3	$1,7170 * 3^1 + 1,1001 * 3^{-3} * (0,0010 * 3^1 + 1,7170 * 3^1) = 1,7100 * 3^1$	2,333333
4	$1,7100 * 3^1 + 1,1001 * 3^{-3} * (0,0011 * 3^1 + 1,7100 * 3^1) = 1,7110 * 3^1$	2,444444
5	$1,7110 * 3^1 + 1,1001 * 3^{-3} * (0,0177 * 3^1 + 1,7110 * 3^1) = 1,0771 * 3^1$	2,592592
6	$1,0771 * 3^1 + 1,1001 * 3^{-3} * (0,0171 * 3^1 + 1,0771 * 3^1) = 1,0717 * 3^1$	2,740740
7	$1,0717 * 3^1 + 1,1001 * 3^{-3} * (0,0107 * 3^1 + 1,0717 * 3^1) = 1,0070 * 3^1$	2,888888
8	$1,0070 * 3^1 + 1,1001 * 3^{-3} * (0,0100 * 3^1 + 1,0070 * 3^1) = 1,0001 * 3^1$	3,037037
9	$1,0001 * 3^1 + 1,1001 * 3^{-3} * (0,0117 * 3^1 + 1,0001 * 3^1) = 1,0170 * 3^1$	3,222222
10	$1,0170 * 3^1 + 1,1001 * 3^{-3} * (0,0110 * 3^1 + 1,0170 * 3^1) = 1,0117 * 3^1$	3,407407

Источник: составлено авторами.

В данной работе для компьютерных вычислений значений ОДУ методом Эйлера была написана программа на языке Си, использующая для переменных стандартный 32-битный формат данных IEEE 754 с плавающей запятой: бит 31 – знак мантииссы, 30 – 23 биты – экспонента, 22 – 0 биты – мантиисса без первой цифры, что обеспечивает примерно 7 десятичных значащих цифр в диапазоне ± 8388608 . Особое внимание уделялось изучению влияния точности представления

чисел на накопление вычислительной погрешности – проводились серии расчетов с последовательным уменьшением разрядности мантииссы как для исходных данных, так и для промежуточных результатов.

Запись аналитического решения ОДУ [14; 15], а также результаты решения ОДУ классическим методом Эйлера в двоичной системе счисления, в случае, если задействованы все 23 бита при представлении мантииссы, изображены на рис. 1.

xt=0.000000	yt=2.000000	xe=0.050000	ye=2.100000
xt=0.050000	yt=2.103813	xe=0.100000	ye=2.207499
xt=0.100000	yt=2.215509	xe=0.150000	ye=2.322865
xt=0.150000	yt=2.335481	xe=0.200000	ye=2.446481
xt=0.200000	yt=2.464139	xe=0.250000	ye=2.578738
xt=0.250000	yt=2.601905	xe=0.300000	ye=2.720045
xt=0.300000	yt=2.749219	xe=0.350000	ye=2.870824
xt=0.350000	yt=2.906534	xe=0.400000	ye=3.031510
xt=0.400000	yt=3.074322	xe=0.450000	ye=3.202556
xt=0.450000	yt=3.253074	xe=0.500000	ye=3.384432
xt=0.500000	yt=3.443299		

Рис. 1. Результаты решения ОДУ аналитическим (yt) и численным методом (ye) в компьютерном представлении в виде короткого вещественного числа

Консоль отладки Microsoft Visual Studio				
xt=0.000000	yt=2.000000			
xt=0.050000	yt=2.103813	xe=0.049988	ye=2.099609	yTCC=2.1001371
xt=0.100000	yt=2.215509	xe=0.099976	ye=2.205078	yTCC=2.2167352
xt=0.150000	yt=2.335481	xe=0.149902	ye=2.318359	yTCC=2.3333333
xt=0.200000	yt=2.464139	xe=0.199829	ye=2.441406	yTCC=2.4581618
xt=0.250000	yt=2.601905	xe=0.249756	ye=2.572266	yTCC=2.5912208
xt=0.300000	yt=2.749219	xe=0.299561	ye=2.712891	yTCC=2.733882
xt=0.350000	yt=2.906534	xe=0.349365	ye=2.861328	yTCC=2.8751714
xt=0.400000	yt=3.074322	xe=0.399170	ye=3.019531	yTCC=3.037037
xt=0.450000	yt=3.253074	xe=0.448975	ye=3.189453	yTCC=3.2085048
xt=0.500000	yt=3.443299	xe=0.498779	ye=3.369141	yTCC=3.3909465

Рис. 2. Результаты решения ОДУ аналитическим (yt) и численным (ye) методами представлены в виде вещественных чисел с усеченной 10-битной мантиссой

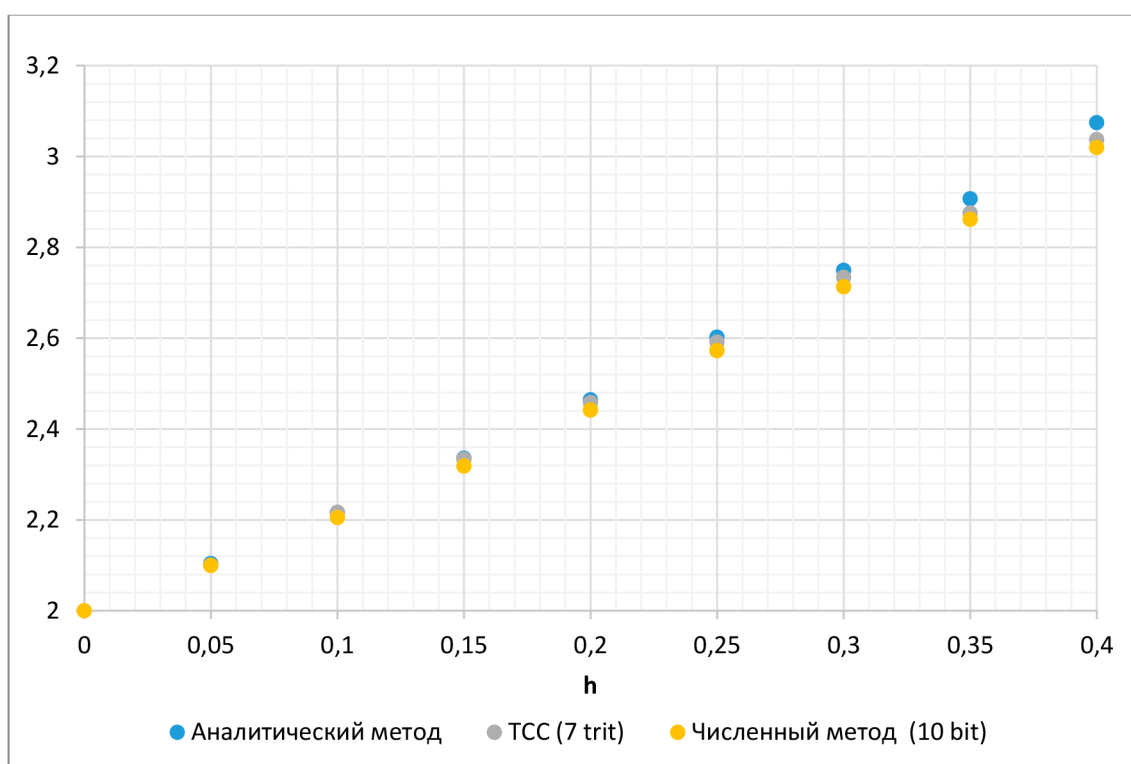


Рис. 3. Графическое представление результатов решения ОДУ

После усечения разрядов до 10 бит представления мантиссы, значащая часть числа находится в диапазоне ± 1024 (десятичное представление), мантисса в 7 трит ТСС числа соответствует диапазону ± 1093 (десятичное представление). Запись аналитического решения ОДУ, а также результаты компьютерного решения ОДУ классическим методом Эйлера приведены на рис. 2.

Точечная диаграмма результатов решения ОДУ приведена на рис. 3.

После усечения разрядов до 5 бит представления мантиссы, значащая часть числа находится в диапазоне ± 32 (десятичное

представление), мантисса в 4 трита ТСС числа соответствует диапазону ± 40 (десятичное представление). Запись аналитического решения ОДУ, а также результаты решения ОДУ классическим методом Эйлера в двоичной системе счисления при шаге $h = 0,05$ приведены на рис. 4.

Точечная диаграмма результатов решения ОДУ приведена на рис. 5.

Как видно из рис. 3 и 5, результат решения ОДУ классическим методом Эйлера с применением ТСС позволяет получить более точное решение по сравнению с традиционной двоичной реализацией.

Консоль отладки Microsoft Visual Studio				
xt=0.000000	yt=2.000000			
xt=0.050000	yt=2.103813	xe=0.049805	ye=2.062500	yTCC=2.111111
xt=0.100000	yt=2.215509	xe=0.099609	ye=2.125000	yTCC=2.222222
xt=0.150000	yt=2.335481	xe=0.148438	ye=2.187500	yTCC=2.333333
xt=0.200000	yt=2.464139	xe=0.195312	ye=2.250000	yTCC=2.444444
xt=0.250000	yt=2.601905	xe=0.242188	ye=2.312500	yTCC=2.592592
xt=0.300000	yt=2.749219	xe=0.289062	ye=2.375000	yTCC=2.74074
xt=0.350000	yt=2.906534	xe=0.335938	ye=2.500000	yTCC=2.888888
xt=0.400000	yt=3.074322	xe=0.382812	ye=2.625000	yTCC=3.037037
xt=0.450000	yt=3.253074	xe=0.429688	ye=2.750000	yTCC=3.222222
xt=0.500000	yt=3.443299	xe=0.476562	ye=2.875000	yTCC=3.407407

Рис. 4. Результаты решения ОДУ аналитическим (yt) и численным (ye) методами представлены в виде вещественных чисел с усеченной 5-битной мантиссой

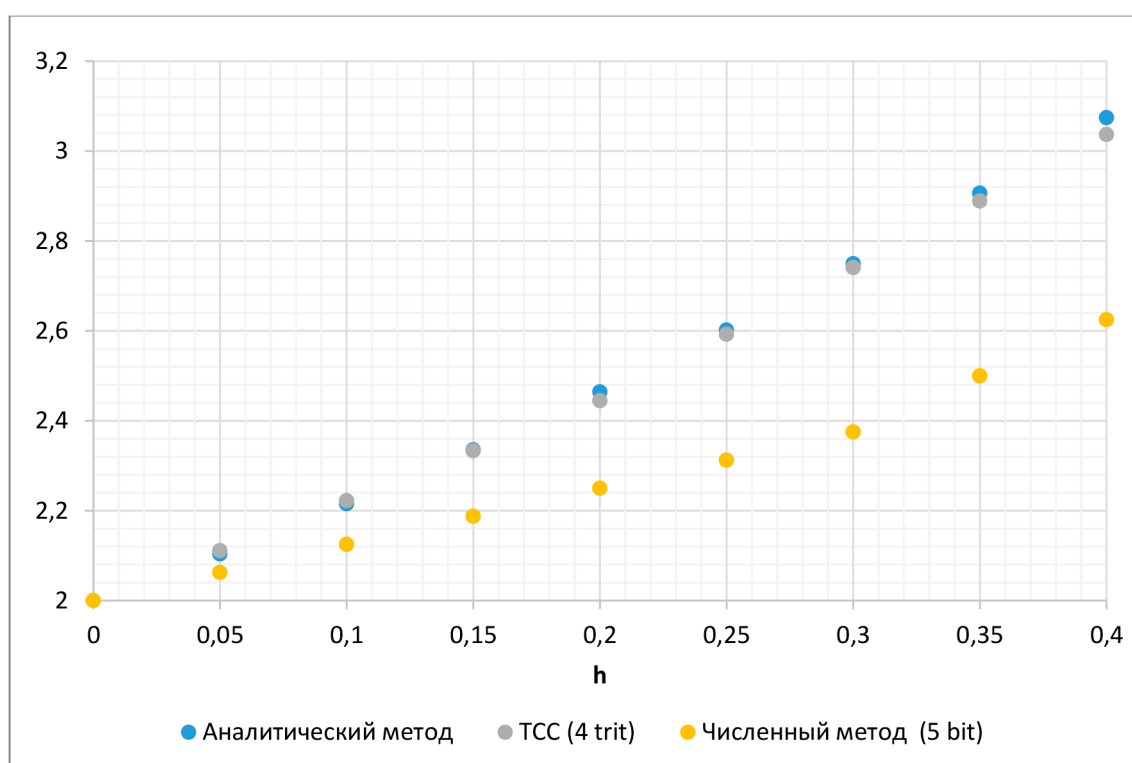


Рис. 5. Графическое представление результатов решения ОДУ

Заключение

Исследование показало высокую эффективность троично-сбалансированной системы счисления (ТСС) для решения дифференциальных уравнений методом Эйлера, погрешность вычислений в рамках проведенных исследований составила 1–6%.

Применение ТСС в классическом методе Эйлера на примере обыкновенного дифференциального уравнения позволило достичь значительного улучшения точности вычисления – в 5 раз и более раз по сравнению с традиционной двоичной реализацией.

Список литературы

1. Ромм Я.Е., Буланов С.Г. Численное моделирование устойчивости по Ляпунову // Современные наукоемкие технологии. 2021. № 7. С. 42–60. DOI: 10.17513/snt.38752.
2. Гладков С.О. Об одном классе решений двухмерного уравнения Лапласа на трехмерном многообразии // Владикавказский математический журнал. 2024. Т. 26. № 2. С. 39–46. DOI: 10.46698/j9246-8718-0030-f.
3. Гиниятуллин В.М., Салихова М.А. Эффект компенсации ошибок округления в троично-сбалансированной системе счисления // Вестник кибернетики. 2020. № 4 (40). С. 14–20. DOI: 10.34822/1999-7604-2020-4-14-20.
4. Габитов Р.Н., Габитова Я.А., Гиниятуллин В.М., Филиппов В.Н. Электронный ключ защиты с функциональностью троичного сопроцессора // Нефтегазовое дело. 2015. № 2. С. 385–396.

5. Брусенцов Н.П., Жоголев Е.А., Веригин В.В., Маслов С.П., Тишулина А.М. Малая цифровая вычислительная машина «Сетунь». М.: Изд-во МГУ, 1965. 145 с.
6. Connelly J., Patel C., Chavez A., Nico P. Ternary Computing Testbed 3-Trit Computer Architecture. San Luis Obispo: California Polytechnic State University, 2008. 192 p.
7. Семиколеннов С.А., Винокуров А.И., Малахов С.В., Якупов Д.О. Троичные процессоры // Наука и бизнес: пути развития. 2024. № 2 (152). С. 56–59.
8. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Об оценке погрешности приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, определенного с помощью рядов Чебышева // Вычислительные методы и программирование. 2020. Т. 21. № 3. С. 241–250. DOI: 10.26089/NumMet.v21r321.
9. Sherykhalina N.M., Shaymardanova E.R. Comparison of accuracy of the Cauchy problem solutions by different numerical methods // Syst. Eng. Inf. Technol. 2023. Vol. 5, Is. 6 (15). P. 11–16. DOI: 10.54708/2658-5014-SIIT-2023-no6-p11.
10. Златопольский Д.М. Из истории двоичной системы счисления. Франческо Брунетти // Информатика в школе. 2023. № 3 (182). С. 86–90. DOI: 10.32517/2221-1993-2023-22-3-86-90.
11. Корсунов К.А., Лыштван Е.Ю., Харченко Е.И., Чаленко А.В. Исследование устойчивости метода Эйлера – Кромера решения ОДУ // Вестник Луганского государственного университета им. Владимира Даля. 2022. № 7 (61). С. 176–180.
12. Титов А.Н., Тазиева Р.Ф. Решение задач линейной алгебры и прикладной математики в Python. Работа с библиотекой SciPy: учебно-методическое пособие. Казань: КНИТУ, 2023. 124 с.
13. Эйлер Л. Интегральное исчисление / Пер. с лат. С.Я. Лурье, М.Я. Выгодского. М.: Государственное издательство техническо-теоретической литературы, 1956. 415 с.
14. Толлок А.В., Толлок Н.Б. Моделирование решения обыкновенного дифференциального уравнения функционально-воксельным методом // Научная визуализация. 2024. Т. 16. № 3. С. 37–47. DOI: 10.26583/sv.16.3.04.
15. Рзаева В.Г.К. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной задаче оптимального управления, описываемой системой гиперболических интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 62. С. 4–12. DOI: 10.17223/19988605/62/1.