

УДК 519.61

DOI 10.17513/snt.40366

О ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ВЫЧИСЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ЛЕВЕРЬЕ С ВИДОИЗМЕНЕНИЕМ Д.К. ФАДДЕЕВА

Ромм Я.Е., Тюшнякова И.А.

*Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал)
ФГБОУ ВО «Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)»,
Таганрог, e-mail: romm@list.ru, solovyova_irina@mail.ru*

Цель работы – представить преобразование метода Лаверье решения полной проблемы собственных значений с видоизменением Д.К. Фаддеева, при котором достигается максимально параллельная форма преобразуемого метода с квадратично-логарифмической временной сложностью для одновременного определения коэффициентов характеристического полинома и всех собственных векторов матрицы. Показано, что данная оценка временной сложности сохраняется, если для поиска корней характеристического полинома применить параллельный метод их вычисления на основе устойчивой адресной сортировки. Предложенное преобразование опирается на элементарное приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях матриц в исходном алгоритме вычисления собственных векторов. В результате матрица всех собственных векторов, соответствующая отдельно взятому собственному значению, выражается в виде матричного полинома с числовыми коэффициентами. Рассматриваемые преобразования и их результаты относятся к случаю, когда все собственные числа матрицы различны. Метод распространяется на преобразование подобия, при этом обе матрицы преобразования выражаются в конструктивной форме. Аналогично представлена связь и структура матриц собственных векторов, отвечающих каждому собственному числу исходной матрицы, и диагональной матрицы, полученной в результате преобразования подобия. Все вычислительные операции допускают параллельное выполнение с сохранением квадратично-логарифмической оценки временной сложности для нахождения полной совокупности рассматриваемых алгебраических объектов в границах метода Лаверье с видоизменением Д.К. Фаддеева. Дополнительно представлены структурные соотношения между матричными полиномами, представляющими собственные векторы, конструктивно указана связь между матрицей собственных векторов и обратной матрицей. Работа включает явные формулы собственных векторов матрицы, а также их видоизменений в случае преобразования подобия. Формулы применимы для оценки возмущений в приложениях к задачам механики.

Ключевые слова: собственные значения матрицы, собственные векторы, полная проблема собственных значений, параллельные алгоритмы линейной алгебры, преобразование подобия

ON PARALLEL CALCULATION OF EIGENVECTORS BASED ON THE LEVERRIER METHOD MODIFIED BY D.K. FADDEEV

Romm Ya.E., Tyushnyakova I.A.

*Taganrog Institute named after A.P. Chekhov of the Rostov State University of Economics,
Taganrog, e-mail: romm@list.ru, solovyova_irina@mail.ru*

The purpose of the work is to show the transformation of the LeVerrier method for solving the complete eigenvalue problem modified by D.K. Faddeev. It helps to achieve the maximum parallel form of the transformed method with quadratic-logarithmic time complexity for simultaneous coefficients' determination of the characteristic polynomial and all the eigenvectors of the matrix. It is shown that this estimate of time complexity is preserved if a parallel method based on stable address sorting is used to find the roots of a characteristic polynomial. The proposed transformation is based on the elementary equalization of coefficients with the same degrees of matrices in the original algorithm for eigenvectors' calculation. As a result, the matrix of all eigenvectors corresponding to a single eigenvalue is expressed as a matrix polynomial with numerical coefficients. The transformations under consideration and their results relate to the case when all the eigenvalues of the matrix are different. The method extends to the similarity transformation, with both transformation matrices expressed in a constructive form. Similarly, the relationship and structure of the eigenvector matrices corresponding to each eigenvalue of the original matrix and the diagonal matrix resulting from the similarity transformation are given. All computational operations can be performed in parallel while maintaining a quadratic-logarithmic estimate of time complexity in order to find the complete set of algebraic objects under consideration within the boundaries of the LeVerrier method modified by D.K. Faddeev. Additionally, the structural relations between matrix polynomials representing eigenvectors are provided, and the relationship between the matrix of eigenvectors and the inverse matrix is constructively indicated. The work includes explicit formulas for the eigenvectors of the matrix, as well as their modifications in the case of a similarity transformation. The formulas are applicable to estimating disturbances in applications to problems in mechanics.

Keywords: eigenvalues of a matrix, eigenvectors, the complete eigenvalue problem, parallel linear algebra algorithms, similarity transformation

Введение

В работе рассматривается возможность параллельного решения полной проблемы собственных значений с формулами собственных векторов матрицы. Подход опирается на метод Леверье с видоизменением Д.К. Фаддеева. Параллельные алгоритмы представляются на модели неветвящихся параллельных программ, понимаемой как последовательность шагов, на каждом из которых синхронно выполняются арифметические операции над готовыми значениями данных. Временная сложность алгоритма («время выполнения») обозначается $T(R)$ и измеряется числом последовательных операций, указывается их вид, а также количество требуемых процессорных элементов R (условно – процессоров). Время и способы обмена при этом не учитываются. Известные проблемы синтеза и анализа параллельных алгоритмов излагаются в [1, с. 443; 2]. Аспекты программирования параллельных алгоритмов обсуждаются, в частности, в [3, с. 43, 183]. Особенности адаптации к архитектурам параллельных вычислительных систем детально анализируются в [3, с. 69, 96, 136; 4]. Разновидности архитектуры суперкомпьютеров и их связь с классами решаемых задач описываются в [1, с. 94; 3, с. 43]. Общие тенденции развития параллельных вычислений отмечаются в [5].

Решение полной проблемы собственных значений включает нахождение всех собственных чисел матрицы. В рамках метода Леверье решение этой проблемы принято понимать как определение всех коэффициентов характеристического полинома. В целом решение проблемы подразумевает как вычисление корней характеристического полинома, так и поиск всех собственных векторов. Проблема актуальна для многих разделов математики, механики, техники и технологии. В небесной механике решение полной проблемы собственных значений связано с оценкой возмущения вековых орбит небесных тел [6, с. 295]. Именно с этой целью Леверье создал метод, который применял для анализа отклонений от расчетных орбит планет Солнечной системы [7, с. 15]. На основе оценок возмущения орбиты Урана был открыт Нептун. Обзор работ Леверье на эту тему с доступом к их электронным копиям представлен в [8, с. 518]. В приложении к оценкам возмущений метод применяется к матрице постоянных коэффициентов после линеаризации систем дифференциальных уравнений, описывающих движение небесных тел [9, с. 286]. Видоизменения классического метода используются в со-

временных исследованиях в области планетной астрономии и движения космических тел [10].

Решение проблемы собственных значений принципиально для задач теоретической и прикладной механики. В квантовой механике при описании стационарных квантовых состояний решение уравнения Шредингера сводится к нахождению собственных функций и собственных значений гамильтониана:

$$H\psi = E\psi,$$

где E – нижний уровень энергии, ψ – волновая функция, H – гамильтониан [11].

Приложение задач на собственные значения к расчету вибраций в механических структурах описано, в частности, в [12, с. 202]. Применение решения полной проблемы собственных значений в теории пластичности материалов показано в [13, с. 42].

Среди разнообразных математических приложений полной проблемы собственных значений можно отметить непосредственное использование в теории и практике решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. На этой основе строится фундаментальная система решений. По виду и структуре собственных чисел матрицы коэффициентов формулируется критерий устойчивости линейной дифференциальной системы с важными применениями. В аналитической и дифференциальной геометрии с помощью решения полной проблемы собственных значений определяется канонический вид кривых и поверхностей. В алгебре на данной основе выполняется построение канонической формы Жордана для представления линейных операторов.

Значение полной проблемы собственных значений общеизвестно и отмеченными применениями не исчерпывается. Необходимо, однако, принять во внимание, что ее практическое решение связано с большим объемом вычислений, с проблемой вычислительной устойчивости, со значительным накоплением вычислительной погрешности [14, с. 110, 243, 384]. В известной мере это относится к методу Леверье, характеризующемуся объемом вычислений порядка $O(n^4)$. Поэтому в вычислительных приложениях предпочтением пользуются другие методы. В частности, используется метод вращений Якоби [14, с. 426]. Наиболее часто указывается на применение устойчивых разновидностей QR -алгоритма [15; 16]. Тем же отличается и [14, с. 426], где метод Леверье рассматривается в критическом аспекте [14, с. 384]. Метод Леверье подробно представлен преимущественно

в учебных изданиях, например в [17, с. 311]. Тем не менее выбор этого метода в качестве предмета исследования обусловлен хорошо известными объективными отличиями. Во-первых, это единственный универсальный метод решения полной проблемы собственных значений, который не требует ограничений на вид матрицы. Во-вторых, это прямой (точный), а не итерационный метод, который за конечное число шагов дает решение. Аналогичным качеством обладает видоизменение Д.К. Фаддеева этого метода. В-третьих, в отличие от аналогов этот метод универсально дает дополнительные объекты алгебры, включая обратную матрицу (на основе соотношения Гамильтона – Кели), и тем самым решение системы линейных алгебраических уравнений. В-четвертых, что ценно для реализации на параллельных вычислительных системах, метод Леверье обладает максимально параллельной формой, позволяя на основе схемы Ксанки параллельно решить систему линейных алгебраических уравнений за конечное число шагов $O(\log_2^2 n)$ [18].

До настоящего времени результат Ксанки не распространен на нахождение собственных векторов матрицы. В излагаемой ниже работе ставится задача построить параллельное решение полной проблемы собственных значений на основе метода Леверье с видоизменением Д.К. Фаддеева, которое включает параллельное вычисление матрицы собственных векторов. С этой целью указываются формулы представления собственных векторов в явном виде. Требуется по возможности уменьшить объем вычислений, снизить оценку временной сложности за счет максимально параллельной формы, при этом ограничить накопление вычислительной погрешности.

Цель исследования. Первая цель – выполнить преобразование метода Леверье решения полной проблемы собственных значений с видоизменением Д.К. Фаддеева, при котором достигается максимально параллельная форма преобразуемого метода с сохранением временной сложности $O(\log_2^2 n)$ для определения коэффициентов характеристического полинома и одновременно всех собственных векторов матрицы. Вторая цель – показать, что корни характеристического полинома можно найти также по параллельной схеме, сохранив по величине порядка указанную временную оценку.

Материалы и методы исследования

Исследование опирается на методы синтеза и анализа параллельных алгоритмов в приложении к вычислительной линейной алгебре.

Результаты исследования и их обсуждение

Предложено преобразование метода Леверье с видоизменением Д.К. Фаддеева, которое позволяет параллельно выполнять численное решение полной проблемы собственных значений. Преобразование отличается тем, что исключает последовательность шагов вычисления вспомогательных величин, представляя матрицу собственных векторов как матричный полином с числовыми коэффициентами. Отсюда формируется параллельное решение полной проблемы собственных значений с применением известной схемы Ксанки параллельного вычисления коэффициентов характеристического полинома и решения системы линейных алгебраических уравнений. От итерационных методов решения рассматриваемой проблемы предложенная разновидность отличается универсальностью, изначально присущей методу Леверье. Предложенное преобразование реализует прямой метод решения проблемы за конечное число шагов. В целом метод допускает максимальное распараллеливание с временной сложностью $O(\log_2^2 n)$ для всей совокупности искомым объектов полной проблемы собственных значений. Попутно конструктивно вычисляется преобразование подобия и определяется структура матриц собственных векторов. Параллельное вычисление необходимо для сокращения времени численного моделирования многих процессов механики, опирающихся на решение полной проблемы собственных значений.

Исходные соотношения для решения полной проблемы собственных значений на основе метода Леверье.

Рассматривается однородная система линейных алгебраических уравнений (вектовое уравнение)

$$Ax = \lambda x, \quad (1)$$

где $A = (a_{ij})$ – квадратная матрица, $n \times n$, x – искомый собственный вектор. Требуется указать все значения λ , при которых решения (1) являются нетривиальными, требуется, иными словами, найти все собственные числа матрицы A . Условием для их определения является равенство нулю определителя системы (1):

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (2)$$

где E – единичная матрица. Уравнение (2) – характеристическое уравнение матрицы A . Развертывание (2) влечет полиномиальное уравнение с неопределенными коэффициентами.

или

$$Q_k = \left. \begin{aligned} &= (\lambda_k^{n-1} - \lambda_k^{n-2} p_1 - \lambda_k^{n-3} p_2 - \dots - \lambda_k^{n-\ell-1} p_\ell - \dots - \lambda_k^2 p_{n-3} - \lambda_k^1 p_{n-2} - p_{n-1}) E + \\ &+ (\lambda_k^{n-2} - \lambda_k^{n-3} p_1 - \lambda_k^{n-4} p_2 - \dots - \lambda_k^{n-\ell-2} p_\ell - \dots - \lambda_k^2 p_{n-4} - \lambda_k^1 p_{n-3} - p_{n-2}) A + \dots + \\ &+ (\lambda_k^{n-r} - \lambda_k^{n-r-1} p_1 - \lambda_k^{n-r-2} p_2 - \dots - \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell - \dots - \lambda_k^2 p_{n-r-2} - \lambda_k^1 p_{n-r-1} - p_{n-r}) A^{r-1} + \\ &\dots\dots\dots \\ &+ (\lambda_k - p_1) A^{n-2} + \\ &+ A^{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Отсюда

$$Q_k = \sum_{r=1}^n \left(\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell \right) A^{r-1}. \quad (24)$$

В краткой записи

$$Q_k = \sum_{r=1}^n q_{kr} A^{r-1}, \quad (25)$$

где

$$q_{kr} = \lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell. \quad (26)$$

Обоснование того, что матрица (25) с коэффициентами (26) является матрицей собственных векторов матрицы A , соответствующих собственному числу λ_k , следует из сопоставления (20) с (24). Подробнее такое сопоставление будет развернуто в дальнейшем.

В (24)–(26) каждый коэффициент p_ℓ является коэффициентом из (8) с таким же индексом и совпадает с коэффициентом $P_n(\lambda)$ из (4) с индексом численно равным ℓ , то есть с коэффициентом характеристического полинома при степени $\lambda^{n-\ell}$. Коэффициенты (26) образуют убывающую по степеням с показателем $n-r$ последовательность полиномов, взятых при значении $\lambda = \lambda_k$.

Последовательность начинается сразу после значения характеристического полинома

$$P_n(\lambda_k) = \lambda_k^n - \sum_{\ell=1}^n \lambda_k^{n-\ell} p_\ell, \quad (27)$$

но собственно полином (27) в эту последовательность не входит, он абстрактно соответствует (26) при $r = 0$. Вид полиномов (26) аналогичен по структуре (27) в смысле соответствия убывающих показателей степени λ и возрастающих индексов коэффициентов.

В результате матрица собственных векторов Q_k матрицы A в явной форме выражена через линейную комбинацию последовательных степеней матрицы A^ℓ , $\ell = 0, 1, \dots, n-1$, в виде матричного полинома с числовыми коэффициентами из (24), что эквивалентно (25), (26). При использовании данного представления матрицы Q_k нет необходимости предварительно вычислять матрицы B_k , $k \in 1, n-1$, из (17), так как все степени для (25), (26) уже априори найдены при вычислении (7), в частности, по схеме (14). Априори также найдены все коэффициенты характеристического полинома (4), используемые в (24)–(26). Они вычислены из (8) или, что эквивалентно, из (9), (10). Собственные числа λ_k , $k \in 1, n$, также предполагаются априори найденными и различными.

В итоге матрица Q_k представлена явной формулой, позволяющей вычислить ее параллельно, исключая последовательные шаги (17).

Оценки временной сложности параллельного вычисления матриц собственных векторов. Пусть параллельно вычислены все A^ℓ , $\ell = 0, 1, \dots, n$, по схеме (14) с оценкой (15), обратная матрица (13), а также все коэффициенты характеристического полинома $P_n(\lambda)$ с оценкой (11). Пусть, кроме того, некоторым способом найдены все корни полинома $P_n(\lambda)$ (требуемый способ обсуждается в дальнейшем вместе с оценкой временной сложности), и все они оказались различными. В этих предположениях для нахождения матрицы Q_k соб-

ственных векторов матрицы A оказываются известными все компоненты выражений (25), (26). Требуемыми вычисления оказываются коэффициенты q_{kr} из (26). Для их определения понадобится вычислить все степени собственного числа λ_k : $\lambda_k^2, \lambda_k^3, \dots, \lambda_k^{n-1}$. По схеме Стоуна это можно сделать параллельно на n процессорах (с помощью синхронного вычисления всех двоичных степеней и соединения из таких комбинаций степени с любым требуемым показателем) за время $t(n) = O(\log_2 n)$. Если это сделать одновременно для всех априори найденных собственных чисел, то число процессоров возрастет в n раз:

$$t(n^2) = O(\log_2 n). \quad (28)$$

Дальнейшее вычисление q_{kr} по формуле (26) потребует нахождения суммы парных произведений найденных таким образом степеней собственного числа на коэффициенты характеристического полинома, отдельно в сумму войдет слагаемое λ_k^{n-r} . Для каждого фиксированного значения r из (26) с использованием схемы сдваивания это займет время

$$t(n-r) = t_y + \lceil \log_2(n-r+1) \rceil t_c \sim t_y + \log_2(n-r+1) t_c. \quad (29)$$

Для вычисления с сохранением оценки времени (29) одновременно всех q_{kr} из (25) требуется количество процессоров $R = \sum_{r=1}^n (n-r) = \frac{(n-1)n}{2} \sim \frac{n^2}{2}$. Так что оценку временной сложности вычисления всех искомым q_{kr} можно записать в виде

$$t(n^2/2) \leq t_y + \lceil \log_2 n \rceil t_c \sim \log_2 n t_c = O(\log_2 n). \quad (30)$$

Если такое вычисление проделать одновременно для всех собственных чисел $\lambda_k, k \in \overline{1, n}$, то количество процессоров возрастет в n раз, и оценка (30) перейдет в оценку

$$t(n^3/2) \leq t_y + \lceil \log_2 n \rceil t_c \sim \log_2 n t_c = O(\log_2 n). \quad (31)$$

Локально, при вычислении значения полинома, число процессоров по сравнению с (28)–(31) можно сократить, если использовать следующую схему. Пусть рассматривается полином общего вида

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Непосредственным умножением матриц слева направо оправдывается разложение

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} & P_n(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \dots \times \begin{pmatrix} x & a_{n-2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & a_{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Значение полинома получается в верхней правой клетке левой части (32). Применение к правой части схемы сдваивания влечет следующую оценку параллельного вычисления значения полинома

$$t\left(\lceil n/2 \rceil\right) \leq 2t_y + \lceil \log_2 n \rceil t_c \sim \log_2 n t_c = O(\log_2 n),$$

где учитывается, что каждое умножение данных матриц сохраняет их структуру, так что две нижние клетки заполнять не нужно. Помимо экономии процессоров схема удобна тем, что позволяет перемножать матрицы слева направо и справа налево. Кроме того, она реализуема и последовательно. В отличие, в частности, от схемы Горнера схема (32) двунаправленна, то есть позволяет вести умножение от младших коэффициентов к старшим (слева направо) и от старших к младшим (справа налево), в таком варианте коэффициенты могут поступать динамически по ходу их вычисления без априорного хранения в памяти. При последовательном вычислении коэффициентов (26) схема (32) позволяет за n шагов получить сразу все коэффициенты формулы (25), поскольку каждый последующий коэффициент получается из предыдущего на каждом шаге умножения матриц справа налево (что очевидно из (23)).

Остается найти значение матричного полинома (25) с учетом того, что все степени матриц априори найдены. Одновременное их умножение на вычисленные коэффициенты q_{kr} параллельно выполняется за время t_y при количестве процессоров $R \leq n^3$. С половиной такого количества процессоров полученные после умножения на коэффициенты степени матриц можно сложить по схеме сдваивания с оценкой $t(n^3/2) = \lceil \log_2 n \rceil t_c$. Объединение

рассмотренных оценок влечет следующую оценку временной сложности вычисления матрицы собственных векторов Q_k , представленную в (25), (26), –

$$T(n^3) \leq 2(t_y + \lceil \log_2 n \rceil t_c) \sim 2 \log_2 n t_c = O(\log_2 n). \quad (33)$$

Если такие вычисления выполнить одновременно для всех матриц Q_k , $k \in \overline{1, n}$, то число процессоров увеличится в n раз, оценка (33) перейдет в оценку $T(n^4) = O(\log_2 n)$.

Из изложенного вытекает

Теорема 1. Пусть $\det A \neq 0$ и $\det(A - \lambda E) = 0$. Пусть по методу Леверье с применением тождества Гамильтона – Кели и схемы Ксанки параллельно выполнено вычисление всех степеней матриц (14), параллельно решена треугольная система (9), (10), согласно которой получены все коэффициенты характеристического полинома (4) и параллельно найдена обратная матрица A^{-1} из (13) с суммарной оценкой временной сложности (15). Если, кроме того, найдены все собственные числа λ_k , $k \in \overline{1, n}$, матрицы A и при этом все они оказались различными, то имеет место следующее утверждение. Все собственные векторы матрицы A , соответствующие отдельно взятому собственному числу λ_k , могут быть найдены из соотношений (25), (26) по описанной выше параллельной схеме с временной сложностью $T(n^3) = O(\log_2 n)$. Одновременно все собственные векторы, соответствующие всем собственным числам λ_k , $k \in \overline{1, n}$, матрицы A , могут быть найдены параллельно из соотношений (25), (26), примененных ко всем $k = 1, 2, \dots, n$, с временной сложностью $T(n^4) = O(\log_2 n)$.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 все вычисления по схеме Ксанки и вычисление матриц всех собственных векторов в совокупности выполняются параллельно с временной сложностью $T(R) = O(\log_2^2 n + \log_2 n)$, или, $T(R) = O(\log_2^2 n)$, где $R = n^4$.

Замечание 1. Исключение согласно условию теоремы составляют операции нахождения корней характеристического полинома, которые обсуждаются непосредственно ниже. С точностью до этой принципиальной оговорки операции по параллельному вычислению собственных векторов по величине порядка сохраняют оценку временной сложности (15) известной схемы Ксанки. Ниже оценивается возможность сохранить порядок оценки (15) с учетом временной сложности нахождения всех корней характеристического полинома, то есть всех собственных чисел матрицы A .

Оценка временной сложности параллельного вычисления всех собственных чисел матрицы A . В [21, с. 268] изложен метод вычисления всех корней характеристического полинома матрицы с учетом кратности, основанный на применении устойчивой адресной сортировки, которая допускает максимально параллельную форму. В этой работе приводится программа [21, с. 269] и описывается схема ее максимального распараллеливания. Формально такая схема позволяет все корни характеристического полинома найти с оценкой временной сложности следующего вида [21, с. 275]:

$$T\left(\max\left(n^4, 32 \times 10^3 \times \frac{(x_{11} - x_{00})^3}{3\varepsilon_0^3}\right)\right) = O(\log_2^2 n) + O(\log_d \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}), \quad (34)$$

где в скобках левой части – число процессоров. В (34) n – порядок матрицы, ε – априори заданная граница абсолютной погрешности вычислений, ε_0 – априори заданный радиус локализации каждого корня, $x_{11} - x_{00}$ – длина стороны квадрата, ограничивающего область корней характеристического полинома, $d > 1$ – априори заданный постоянный числовой параметр. Согласно [6, с. 132, 133] все собственные числа матрицы A лежат в объединении кругов Гершгорина

$$\left\{ z \in C : \left| z - a_{ii} \right| \leq r_i \right\}, \quad r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (35)$$

где r_i – сумма модулей внедиагональных элементов i -й строки матрицы. Из (35) для корней характеристического полинома λ_k , $k \in \overline{1, n}$, верна оценка $|\lambda_k - a_{ii}| \leq r_i$. Отсюда $|\lambda_k| \leq r_i + |a_{ii}|$. Подстановка r_i из (35) влечет

$$|\lambda_k| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| + |a_{ii}| = \sum_{\substack{j=1 \\ i=\text{const}}}^n |a_{ij}|.$$

С применением первой канонической нормы матрицы получится

$$|\lambda_k| \leq \|A\|, \forall k \in \overline{1, n}, \text{ где } \|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad [6, \text{ с. 133}].$$

Рассматриваемая программа сама находит уточненные границы расположения корней [21, с. 259], если априори границы сверху указать в произвольно фиксированном приближении. В качестве стороны квадрата, ограничивающего область корней, можно взять $x_{11} - x_{00} = \|A\|$. Подстановка в (34) влечет

$$T \left(\max \left(n^4, 32 \times 10^3 \times \frac{\|A\|^3}{3\varepsilon_0^3} \right) \right) = O(\log_2^2 n) + O(\log_d \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}). \quad (36)$$

В (36) величины $32 \times 10^3 \times \frac{\|A\|^3}{3\varepsilon_0^3}$, а также $\log_d \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$ – априори задаваемые постоянные числовые параметры. За исключением $\|A\|$ эти параметры от n не зависят. Следовательно, оценку (36) можно переписать в виде $T \left(\max \left(n^4, O(\|A\|^3) \right) \right) = O(\log_2^2 n) + O(1)$, или

$$T \left(\max \left(n^4, O(\|A\|^3) \right) \right) = O(\log_2^2 n). \quad (37)$$

$$\text{Очевидно, } \|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq n \times \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

$$\text{Отсюда (37) переходит в оценку } T \left(\max \left(n^4, \max_{i,j} |a_{ij}| \times O(n^3) \right) \right) = O(\log_2^2 n).$$

Если элементы матрицы считать априори равномерно ограниченными, $\max_{i,j} |a_{ij}| \leq C$, где $C = \text{const}$, то $T \left(\max \left(n^4, C \times O(n^3) \right) \right) = O(\log_2^2 n)$, следовательно,

$$T \left(O(n^4) \right) = O(\log_2^2 n), \quad (38)$$

где число процессоров $R = O(n^4)$ практически весьма велико, но при этом имеет порядок роста n^4 , как в оценке Ксанки (15). Таким образом, имеет место

Предложение 1. Пусть матрица A , $n \times n$, удовлетворяет условиям $\det A \neq 0$ и $\max_{i,j} |a_{ij}| \leq C$, где $C = \text{const}$. Тогда все корни характеристического полинома этой матрицы могут быть параллельно вычислены с априори заданной границей абсолютной погрешности ε с временной сложностью (38). В условиях теоремы 1 оценка (38) сохраняется для одновременного вычисления всех собственных чисел и всех собственных векторов, соответствующих всем собственным числам матрицы A .

Некоторые следствия явного выражения собственных векторов через степени матрицы. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Из того, что

$$AQ_k = \lambda_k Q_k, \quad (39)$$

следует, что $A^2 Q_k = \lambda_k A Q_k$. Отсюда и из (39) $A^2 Q_k = \lambda_k^2 Q_k$. По индукции,

$$A^m Q_k = \lambda_k^m Q_k, \quad m = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots \quad (40)$$

Подстановка (25) влечет $A^m \sum_{r=1}^n q_{kr} A^{r-1} = \lambda_k^m \sum_{r=1}^n q_{kr} A^{r-1}$, $m = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots$, или,

$$\sum_{r=1}^n q_{kr} A^{m+r-1} = \lambda_k^m \sum_{r=1}^n q_{kr} A^{r-1}, \quad m = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots \quad (41)$$

С учетом (26)

$$\sum_{r=1}^n (\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell) A^{m+r-1} = \sum_{r=1}^n (\lambda_k^{m+n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{m+n-r-\ell} p_\ell) A^{r-1}, \quad m = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots \quad (42)$$

Следствие 2. Для любой матрицы A и любого ее собственного числа λ_k в условиях теоремы 1 выполнены равенства (41), (42), где p_ℓ совпадают с коэффициентами характеристического полинома $P_n(\lambda)$ из (4) при равных значениях индексов. Эквивалентной формой (42) является равенство

$$\sum_{r=1}^n \left((\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell) A^{m+r-1} - (\lambda_k^{m+n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{m+n-r-\ell} p_\ell) A^{r-1} \right) = O, \quad m=1, 2, \dots, n, n+1, \dots,$$

которое означает, что в условиях теоремы 1 любая матрица A является корнем матричного полинома из левой части равенства при любом значении m .

В тех же условиях из (40), (25), (26) получается еще одно представление матрицы собственных векторов: $Q_k = \lambda_k^{-m} A^m \sum_{r=1}^n q_{kr} A^{r-1}$, $\forall m=1, 2, \dots, n, n+1, \dots$, или,

$$Q_k = \lambda_k^{-m} \sum_{r=1}^n (\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell) A^{r+m-1}, \quad \forall m=1, 2, \dots, n, n+1, \dots$$

Далее, из (39) следует $A \frac{1}{\lambda_k} Q_k = Q_k$ и $\frac{1}{\lambda_k} Q_k = A^{-1} Q_k$, или,

$$A^{-1} Q_k = \lambda_k^{-1} Q_k. \quad (43)$$

Из (43), по аналогии с (40),

$$(A^{-1})^m Q_k = \lambda_k^{-m} Q_k, \quad m=1, 2, \dots, n, n+1, \dots \quad (44)$$

Подстановка (25) влечет

$$(A^{-1})^m \sum_{r=1}^n q_{kr} A^{r-1} = \lambda_k^{-m} \sum_{r=1}^n q_{kr} A^{r-1}, \quad m=1, 2, \dots, n, n+1, \dots \quad (45)$$

С учетом (26)

$$(A^{-1})^m \sum_{r=1}^n (\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell) A^{r-1} = \lambda_k^{-m} \sum_{r=1}^n (\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell) A^{r-1}, \quad m=1, 2, \dots, n, n+1, \dots \quad (46)$$

Следствие 3. Для любой матрицы A и ее собственного числа λ_k , а также для обратной к ней матрицы A^{-1} и ее собственного числа λ_k^{-1} в условиях теоремы 1 выполнены равенства (45), (46), где p_ℓ совпадают с коэффициентами характеристического полинома $P_n(\lambda)$ из (4) при равных значениях индексов. Эквивалентной формой (46) является равенство

$$\left((A^{-1})^m - \lambda_k^{-m} E \right) \sum_{r=1}^n (\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell) A^{r-1} = O, \quad m=1, 2, \dots, n, n+1, \dots,$$

означающее, что в условиях теоремы 1 любая матрица A является корнем матричной функции из левой части равенства при любом натуральном m . Кроме того, замена в левой части (44) Q_k из (25), (26) влечет еще одно представление матрицы собственных векторов:

$$Q_k = \lambda_k^m (A^{-1})^m \sum_{r=1}^n q_{kr} A^{r-1}, \quad \forall m=1, 2, \dots, n, n+1, \dots,$$

или

$$Q_k = \lambda_k^m (A^{-1})^m \sum_{r=1}^n (\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell) A^{r-1}, \quad \forall m=1, 2, \dots, n, n+1, \dots$$

В другой форме связь матрицы собственных векторов с обратной матрицей вытекает непосредственно из (21). Последняя строка этого разложения совпадает с выражением в скобках (13), то есть с обратной матрицей, умноженной на p_n . Поэтому разложение можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
Q_k = & \\
& = \lambda_k^{n-1}E + \lambda_k^{n-2}(A - p_1E) + \lambda_k^{n-3}(A^2 - p_1A - p_2E) + \dots + \\
& + \lambda_k^{n-r}(A^{r-1} - p_1A^{r-2} - p_2A^{r-3} - \dots - p_{r-3}A^2 - p_{r-2}A - p_{r-1}E) + \dots + \\
& + \lambda_k^1(A^{n-2} - p_1A^{n-3} - p_2A^{n-4} - \dots - p_{n-4}A^2 - p_{n-3}A - p_{n-2}E) + \\
& + p_nA^{-1}
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
Q_k = & \\
& = \lambda_k^{n-1}E - \lambda_k^{n-2}p_1E - \lambda_k^{n-3}p_2E - \dots - \lambda_k^{n-\ell-1}p_\ell E - \dots - \lambda_k^2p_{n-3}E - \lambda_k^1p_{n-2}E + \\
& + \lambda_k^{n-2}A - \lambda_k^{n-3}p_1A - \lambda_k^{n-4}p_2A - \dots - \lambda_k^{n-\ell-2}p_\ell A - \dots - \lambda_k^2p_{n-4}A - \lambda_k^1p_{n-3}A + \dots + \\
& + \lambda_k^{n-r}A^{r-1} - \lambda_k^{n-r-1}p_1A^{r-1} - \lambda_k^{n-r-2}p_2A^{r-1} - \dots - \lambda_k^{n-r-\ell}p_\ell A^{r-1} - \dots - \\
& - \lambda_k^2p_{n-r-2}A^{r-1} - \lambda_k^1p_{n-r-1}A^{r-1} + \dots + \\
& + \lambda_k^1A^{n-2} + \\
& + p_nA^{-1}
\end{aligned}$$

Отсюда

$$Q_k = \sum_{r=1}^{n-1} (\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r-1} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell) A^{r-1} + p_n A^{-1}, \quad (47)$$

или

$$A^{-1} = \frac{1}{p_n} \left(Q_k - \sum_{r=1}^{n-1} (\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r-1} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell) A^{r-1} \right). \quad (48)$$

Следствие 4. В условиях теоремы 1 матрица собственных векторов Q_k матрицы A и обратная матрица A^{-1} связаны соотношениями (47) и (48).

Можно указать дополнительные разложения матрицы собственных векторов Q_k по степеням матрицы A . Именно, в (22) каждую строчку с фиксированной степенью матрицы можно преобразовать так, что коэффициент примет вид характеристического полинома. С учетом того, что значение характеристического полинома $P(\lambda)$ из (4) берется при значении корня, $P_n(\lambda) = P_n(\lambda_k) = 0$, преобразование первой строчки (22) примет вид

$$\begin{aligned}
& \lambda_k^{n-1}E - \lambda_k^{n-2}p_1E - \lambda_k^{n-3}p_2E - \dots - \lambda_k^{n-\ell-1}p_\ell E - \dots - \lambda_k^2p_{n-3}E - \lambda_k^1p_{n-2}E - p_{n-1}E = \\
& = \lambda_k \times (\lambda_k^{n-1}E - \lambda_k^{n-2}p_1E - \lambda_k^{n-3}p_2E - \dots - \lambda_k^{n-\ell-1}p_\ell E - \dots - \lambda_k^2p_{n-3}E - \lambda_k^1p_{n-2}E - p_{n-1}E) / \lambda_k = \\
& = (\lambda_k^n E - \lambda_k^{n-1}p_1E - \lambda_k^{n-2}p_2E - \dots - \lambda_k^{n-\ell}p_\ell E - \dots - \lambda_k^3p_{n-3}E - \lambda_k^2p_{n-2}E - \lambda_k^1p_{n-1}E - p_nE + p_nE) / \lambda_k = \\
& = (\lambda_k^n - \lambda_k^{n-1}p_1 - \lambda_k^{n-2}p_2 - \dots - \lambda_k^{n-\ell}p_\ell - \dots - \lambda_k^3p_{n-3} - \lambda_k^2p_{n-2} - \lambda_k^1p_{n-1} - p_n) / \lambda_k E + p_n / \lambda_k E = \\
& = 0 \times E + p_n / \lambda_k E = \lambda_k^{-1} p_n E.
\end{aligned}$$

Аналогично, для второй строчки (22) получится

$$\begin{aligned}
& \lambda_k^{n-2}A - \lambda_k^{n-3}p_1A - \lambda_k^{n-4}p_2A - \dots - \lambda_k^{n-\ell-2}p_\ell A - \dots - \lambda_k^2p_{n-4}A - \lambda_k^1p_{n-3}A - p_{n-2}A = \\
& = \lambda_k^2 \times (\lambda_k^{n-2}A - \lambda_k^{n-3}p_1A - \lambda_k^{n-4}p_2A - \dots - \lambda_k^{n-\ell-2}p_\ell A - \dots - \lambda_k^2p_{n-4}A - \lambda_k^1p_{n-3}A - p_{n-2}A) / \lambda_k^2 = \\
& = (\lambda_k^n - \lambda_k^{n-1}p_1 - \lambda_k^{n-2}p_2 - \dots - \lambda_k^{n-\ell}p_\ell - \dots - \lambda_k^4p_{n-4} - \lambda_k^3p_{n-3} - \lambda_k^2p_{n-2} - \lambda_k^1p_{n-1} - p_n)A + \\
& + \lambda_k^1p_{n-1}A + p_nA) / \lambda_k^2 = (\lambda_k^{-1}p_{n-1} + \lambda_k^{-2}p_n)A,
\end{aligned}$$

для r -й строки –

$$\begin{aligned} & \lambda_k^{n-r} A^{r-1} - \lambda_k^{n-r-1} p_1 A^{r-1} - \lambda_k^{n-r-2} p_2 A^{r-1} - \dots - \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell A^{r-1} - \dots - \\ & - \lambda_k^2 p_{n-r-2} A^{r-1} - \lambda_k^1 p_{n-r-1} A^{r-1} - p_{n-r} A^{r-1} = \\ & = \lambda_k^r (\lambda_k^{n-r} A^{r-1} - \lambda_k^{n-r-1} p_1 A^{r-1} - \lambda_k^{n-r-2} p_2 A^{r-1} - \dots - \\ & - \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell A^{r-1} - \dots - \lambda_k^2 p_{n-r-2} A^{r-1} - \lambda_k^1 p_{n-r-1} A^{r-1} - p_{n-r} A^{r-1}) / \lambda_k^r = \\ & = (\lambda_k^n - \lambda_k^{n-1} p_1 - \lambda_k^{n-2} p_2 - \dots - \lambda_k^{n-\ell} p_\ell - \dots - \lambda_k^{r+2} p_{n-r-2} - \lambda_k^{r+1} p_{n-r-1} - \lambda_k^r p_{n-r} - \lambda_k^{r-1} p_{n-r+1} - \\ & - \lambda_k^{r-2} p_{n-r+2} - \dots - \lambda_k^1 p_{n-1} - p_n + \lambda_k^{r-1} p_{n-r+1} + \lambda_k^{r-2} p_{n-r+2} + \dots + \lambda_k^1 p_{n-1} + p_n) / \lambda_k^r A^{r-1} = \\ & = (\lambda_k^{-1} p_{n-r+1} + \lambda_k^{-2} p_{n-r+2} + \dots + \lambda_k^{-r+1} p_{n-1} + \lambda_k^{-r} p_n) A^{r-1}. \end{aligned}$$

Здесь $r = 3, 4, \dots, n-1, n$.

В результате

$$\begin{aligned} Q_k &= \\ &= \lambda_k^{-1} p_n E + \\ &+ (\lambda_k^{-1} p_{n-1} + \lambda_k^{-2} p_n) A + \dots + \\ &+ (\lambda_k^{-1} p_{n-r+1} + \lambda_k^{-2} p_{n-r+2} + \dots + \lambda_k^{-r+1} p_{n-1} + p_n \lambda_k^{-r}) A^{r-1} + \dots + \\ &+ (\lambda_k^{-1} p_2 + \dots + \lambda_k^{-\ell+1} p_\ell + \dots + \lambda_k^{-n+4} p_{n-3} + \lambda_k^{-n+3} p_{n-2} + \lambda_k^{-n+2} p_{n-1} + \lambda_k^{-n+1} p_n) A^{n-2} + \\ &+ (\lambda_k^{-1} p_1 + \lambda_k^{-2} p_2 + \dots + \lambda_k^{-\ell} p_\ell + \dots + \lambda_k^{-n+3} p_{n-3} + \lambda_k^{-n+2} p_{n-2} + \lambda_k^{-n+1} p_{n-1} + \lambda_k^{-n} p_n) A^{n-1}, \end{aligned}$$

или

$$Q_k = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{\ell=1}^r \lambda_k^{-\ell} p_{n-r+\ell} \right) A^{r-1}. \quad (49)$$

Из (24) и (49) следует равенство правых частей,

$$\sum_{r=1}^n \left(\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell \right) A^{r-1} = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{\ell=1}^r \lambda_k^{-\ell} p_{n-r+\ell} \right) A^{r-1}, \quad (50)$$

а по построению (49) получается равенство коэффициентов в правых частях:

$$\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell = \sum_{\ell=1}^r \lambda_k^{-\ell} p_{n-r+\ell}, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (51)$$

Следствие 5. В условиях теоремы 1 для любой матрицы A матрица Q_k собственных векторов, соответствующих отдельно взятому собственному числу λ_k , представима в виде (49), матрица A удовлетворяет равенству (50), коэффициенты удовлетворяют уравнениям (51).

Как отмечалось, обоснование того, что матрица (25) с коэффициентами (26) является матрицей собственных векторов матрицы A , соответствующих собственному числу λ_k , следует из (16)–(23). Ниже прилагается структурное дополнение к обоснованию. Условие (39) эквивалентно условию

$$(A - \lambda_k E) Q_k = O. \quad (52)$$

Подстановка в (52) Q_k из (25) влечет

$$(A - \lambda_k E) \sum_{r=1}^n q_{kr} A^{r-1} = O, \quad (53)$$

или

$$\sum_{r=1}^n (\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell) A^r - \sum_{r=1}^n (\lambda_k^{n-r+1} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell+1} p_\ell) A^{r-1} = O. \quad (54)$$

Для раскрытия связи выражений с парой соседних индексов в (54) рассматривается сумма двух соседних строк (22) –

$$\begin{aligned} & \dots + \lambda_k^{n-r} A^{r-1} - \lambda_k^{n-r-1} p_1 A^{r-1} - \lambda_k^{n-r-2} p_2 A^{r-1} - \dots - \\ & - \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell A^{r-1} - \dots - \lambda_k^2 p_{n-r-2} A^{r-1} - \lambda_k^1 p_{n-r-1} A^{r-1} - \\ & p_{n-r} A^{r-1} + \lambda_k^{n-r-1} A^r - \lambda_k^{n-r-2} p_1 A^r - \lambda_k^{n-r-3} p_2 A^r - \dots - \\ & - \lambda_k^{n-r-\ell-1} p_\ell A^r - \dots - \lambda_k^1 p_{n-r-2} A^r - p_{n-r-1} A^r + \dots \end{aligned}$$

Первая из этих двух строк совпадет со второй при умножении первой строки на A , а второй строки – на λ_k , если дополнительно вычесть из умноженной на λ_k второй строки выражение $p_{n-r} A^r$. Именно так связаны слагаемые с одноименными соседними индексами в (54). Выражение в скобках второго слагаемого, содержащего A^{r-1} , получается из слагаемого, содержащего A^r , умножением на λ_k , и при этом первое слагаемое априори уже включало умножение на A согласно (52), (53). Если первое слагаемое умножить на λ_k , а второе на A и вычесть из него $p_{n-r} A^r$, то оба слагаемых совпадут. Рассматриваемые операции в точности соответствуют индексу r первого слагаемого и индексу $r+1$ второго слагаемого для допустимых значений $r=1, 2, \dots, n-1$. При этом они имеют противоположный знак. Таким образом,

$$\begin{aligned} & (\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell) A^r - (\lambda_k^{n-(r+1)+1} - \sum_{\ell=1}^{n-(r+1)} \lambda_k^{n-(r+1)-\ell+1} p_\ell) A^{(r+1)-1} + p_{n-r} A^r = O, \\ & r = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (55)$$

Из (54) и (55) следует, что с вычитанием добавленных слагаемых, а также с учетом слагаемых, не вошедших при сдвиге по r начальных и конечных индексов, получится

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^n (\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell) A^r - \sum_{r=1}^n (\lambda_k^{n-r+1} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell+1} p_\ell) A^{r-1} + \sum_{r=1}^{n-1} p_{n-r} A^r - \\ & - \sum_{r=1}^{n-1} p_{n-r} A^r - (\lambda_k^{n-1+1} - \sum_{\ell=1}^{n-1} \lambda_k^{n-1-\ell+1} p_\ell) A^{1-1} + \lambda_k^{n-n} A^n = O. \end{aligned}$$

Если к левой части этого равенства добавить $-p_n E + p_n E$, равенство преобразуется к виду

$$A^n - \sum_{r=1}^{n-1} p_{n-r} A^r - (\lambda_k^n - \sum_{\ell=1}^{n-1} \lambda_k^{n-\ell} p_\ell) E - p_n E + p_n E = O,$$

или,

$$A^n - \sum_{r=1}^{n-1} p_{n-r} A^r - p_n E - (\lambda_k^n - \sum_{\ell=1}^{n-1} \lambda_k^{n-\ell} p_\ell - p_n) E = O.$$

Окончательно,

$$(A^n - \sum_{r=0}^{n-1} p_{n-r} A^r) - (\lambda_k^n - \sum_{\ell=0}^{n-1} p_{n-\ell} \lambda_k^\ell) E = O. \quad (56)$$

Равенство (56) оправдано по соотношению Гамильтона – Кели применительно к первой паре скобок и по определению характеристического полинома, взятого в корне этого полинома, применительно ко второй паре скобок.

В силу обратимости изложенных преобразований имеет место

Предложение 2. В условиях теоремы 1 подстановка в левую часть (52) Q_k из (25) влечет преобразование левой части к виду

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n (\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_{\ell}) A^r - \sum_{r=1}^n (\lambda_k^{n-r+1} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell+1} p_{\ell}) A^{r-1} = \\ = (A^n - \sum_{r=0}^{n-1} p_{n-r} A^r) - (\lambda_k^n - \sum_{\ell=0}^{n-1} p_{n-\ell} \lambda_k^{\ell}) E \end{aligned} \quad (57)$$

С учетом (56) это равенство эквивалентно равенству (54), которое означает, что любая матрица A в рассматриваемых условиях является корнем матричного полинома левой части (54). Каждое из равенств (57) и (54) показывает, что Q_k из (25) удовлетворяет характеристическому уравнению (52), и, таким образом, Q_k является матрицей, столбцы которой совпадают с собственными векторами матрицы A , соответствующими ее характеристическому значению λ_k при любом фиксированном $k \in \overline{1, n}$.

Структура матриц собственных векторов в случае преобразования подобия. Преобразование подобия $H^{-1}AH$, где H – невырожденная матрица, $n \times n$, не меняет собственных значений матрицы A , а собственные векторы подобной матрицы $H^{-1}AH$ получаются из собственных векторов матрицы A их умножением на матрицу H^{-1} [14, с. 24]. Рассматриваемая матрица A невырожденная, все ее собственные значения различны, поэтому существует преобразование подобия, которое преобразует эту матрицу к канонической форме Жордана, такой, что на диагонали матрицы расположены собственные числа, остальные ее элементы – нули. Ниже диагональная форма матрицы, полученной в результате преобразования подобия матрицы A , обозначается $\text{diag } A(\lambda)$. Если $H^{-1}AH = \text{diag } A(\lambda)$, то на диагонали матрицы $\text{diag } A(\lambda)$ расположены все собственные числа λ_k , $k \in \overline{1, n}$, при этом матрица H состоит из n столбцов, каждый из которых совпадает с собственным вектором матрицы A , соответствующим одному и только одному из данных собственных чисел λ_k [14, с. 24]. Столбцы матрицы H линейно независимы [14, с. 22], поэтому $\det H \neq 0$ и существует H^{-1} . Таким образом, в рассматриваемом случае, когда все λ_k , $k \in \overline{1, n}$, различны, преобразование подобия $H^{-1}AH$ заведомо существует. Ниже детализируются структуры матриц собственных векторов в случае выполнения этого преобразования. Пусть согласно (24)–(26) вычислены матрицы собственных векторов Q_k , соответствующих каждому собственному числу λ_k , $k \in \overline{1, n}$. Из n матриц Q_k можно выбрать по одному столбцу и составить из них столбцы матрицы H . Столбцы отвечают n различным собственным числам, так что $\det H \neq 0$, и сформированная матрица H удовлетворяет требованиям искомого преобразования (можно из каждой матрицы Q_k выбирать по одному первому слева направо столбцу). Для преобразования подобия нужна, кроме того, обратная матрица H^{-1} . Поскольку H уже сформирована, то H^{-1} можно найти по формуле (13), заменив в ней A на H , если только предварительно по схеме (8) найти соответственные этой матрице коэффициенты. С изменением обозначений коэффициентов получится

$$H^{-1} = \frac{1}{p_{hn}} (H^{n-1} - p_{h1}H^{n-2} - \dots - p_{h(n-1)}E),$$

где $p_{hn} = (-1)^{n+1} \det H \neq 0$. В результате окончательно сформируется $H^{-1}AH = \text{diag } A(\lambda)$. Для преобразованной матрицы в полной аналогии (24)–(26) получится

$$Q_{\lambda k} = \sum_{r=1}^n \left(\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_{\lambda \ell} \right) A_{\lambda}^{r-1}, \quad (58)$$

где для компактности записи обозначено

$$A_{\lambda} = \text{diag } A(\lambda). \quad (59)$$

Для дальнейшего соответственная (59) матрица H преобразования подобия обозначается H_{λ} , так что

$$H_{\lambda}^{-1}AH_{\lambda} = A_{\lambda}. \quad (60)$$

В силу диагональной структуры матрицы (59), (60)

$$A_{\lambda}^{r-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{r-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{r-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1}^{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n^{r-1} \end{pmatrix}, \quad r=1, 2, \dots, n. \quad (61)$$

Из (61) $\text{Sp}(A_{\lambda}^{r-1}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{r-1}$, $r=1, 2, \dots, n$. Поэтому $\text{Sp}(A_{\lambda}^{r-1}) = \text{Sp}(A^{r-1})$, и поскольку в (6) $S_k = \text{Sp}(A^k)$, то решение уравнений (6) в виде (8) дает одинаковые значения коэффициентов $p_1, p_2, \dots, p_n$ характеристического полинома (4) матрицы A и характеристического полинома

$$P_n(\lambda) = \lambda^n - p_{\lambda 1} \lambda^{n-1} - p_{\lambda 2} \lambda^{n-2} - \dots - p_{\lambda(n-1)} \lambda - p_{\lambda n}$$

матрицы A_{λ} . Отсюда $p_1 = p_{\lambda 1}, p_2 = p_{\lambda 2}, \dots, p_n = p_{\lambda n}$, и соотношение (58) можно переписать в виде

$$Q_{\lambda k} = \sum_{r=1}^n \left(\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_{\ell} \right) A_{\lambda}^{r-1}. \quad (62)$$

Согласно (62) для вычисления матрицы собственных векторов $Q_{\lambda k}$, соответствующих собственному числу λ_k матрицы (59), вычислять коэффициенты $p_{\lambda \ell}$ заново не потребуется. Не требуется также заново вычислять степени матрицы A_{λ}^{r-1} , поскольку рассматриваемый поиск собственных векторов предполагает априори найденными все λ_k , $k \in \overline{1, n}$. Степени диагональных элементов (61) также уже вычислены при нахождении коэффициентов (26). В рассматриваемом преобразовании подобия (60) матрица собственных векторов $Q_{\lambda k}$ матрицы A_{λ} получается из матрицы собственных векторов Q_k матрицы A путем умножения на H_{λ}^{-1} , то есть

$$Q_{\lambda k} = H_{\lambda}^{-1} Q_k, \quad \forall k = \text{const}, \quad k \in \overline{1, n}, \quad (63)$$

поэтому

$$\sum_{r=1}^n \left(\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_{\ell} \right) A_{\lambda}^{r-1} = H_{\lambda}^{-1} \sum_{r=1}^n \left(\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_{\ell} \right) A^{r-1} \quad \forall k = \text{const}, \quad k \in \overline{1, n}, \quad (64)$$

что эквивалентно

$$H_{\lambda} \sum_{r=1}^n \left(\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_{\ell} \right) A_{\lambda}^{r-1} = \sum_{r=1}^n \left(\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_{\ell} \right) A^{r-1} \quad \forall k = \text{const}, \quad k \in \overline{1, n}. \quad (65)$$

Матрицу собственных векторов (63) можно определить непосредственно. Именно, матрица умножается на число поэлементно и матрицы складываются поэлементно. Поэтому в левой части (64) все множители можно внести под знак степени матрицы,

$$\sum_{r=1}^n \left(\left(\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_{\ell} \right) \times A_{\lambda}^{r-1} \right),$$

и после суммирования полученных матриц, с учетом структуры матрицы (61), вся левая часть (64) преобразуется в одну матрицу вида

$$\begin{pmatrix}
 \sum_{r=1}^n \left(\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell \right) \lambda_1^{r-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & \sum_{r=1}^n \left(\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell \right) \lambda_2^{r-1} & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & \sum_{r=1}^n \left(\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell \right) \lambda_{n-1}^{r-1} & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_{r=1}^n \left(\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell \right) \lambda_n^{r-1}
 \end{pmatrix} \quad (66)$$

Матрица (66) является диагональной. Поскольку равные матрицы равны поэлементно, то правая часть (64) также является диагональной матрицей. Имеет место

Предложение 3. В условиях теоремы 1 для любой матрицы A выполняется равенство (64), где в левой части располагается матрица собственных векторов матрицы A_λ , полученной в результате преобразования подобия (60). При этом матрица собственных векторов левой части соответствует собственному числу λ_k матрицы A , которое равно собственному числу матрицы A_λ . Данная матрица имеет диагональную структуру и записывается в виде (66), где собственное число λ_k матрицы A присутствует с различными показателями степени в скобках выражений на диагонали. В правой части равенства (64) располагается матрица Q_k собственных векторов матрицы A из (24), соответствующих тому же собственному числу λ_k , которая умножается на H_λ^{-1} из (60). Матрица правой части также становится диагональной, элементы ее диагонали совпадают с элементами диагонали (66). Данная структура рассматриваемых подобных матриц имеет место для каждого собственного числа λ_k , $\forall k = \text{const}$, $k \in 1, n$.

Следствие 6. Все различные собственные векторы матрицы A_λ из (59), (60), соответствующие собственному числу λ_k этой матрицы (или, что то же, матрицы A), совпадают со всеми различными столбцами матрицы (66) в порядке их расположения.

Следствие 7. В силу обратимости матрицы (66) с сохранением диагональной структуры матрица правой части (64) также обратима с сохранением диагональной структуры. В случае обращения обе части равенства будут определяться из (66) путем деления единицы на элемент диагонали в каждой строке:

$$1 / \sum_{r=1}^n \left(\lambda_k^{n-r} - \sum_{\ell=1}^{n-r} \lambda_k^{n-r-\ell} p_\ell \right) \lambda_m^{r-1}, \\
 m = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, в условиях теоремы 1 могут быть найдены не только все собственные векторы матрицы A , соответственные каждому собственному числу λ_k этой матрицы, но одновременно с тем могут быть определены все соответственные тому же собственному значению собственные векторы матрицы A_λ , являющейся результатом преобразования подобия (60). При этом собственные векторы соответствуют каждому собственному числу λ_k матрицы A_λ и вычисляются как столбцы матрицы $Q_{\lambda k}$ по схеме (58), которая эквивалентна (62). Все вычислительные компоненты схемы (62) становятся известными на стадии вычисления собственных векторов матрицы A . Как отмечалось, все степени на диагонали в (61) уже вычислены на этапе определения коэффициентов (26) для матрицы Q_k из (24). Тогда же найдены все значения коэффициентов в скобках (62). Остается только их умножить на диагональные элементы матриц (61), затем сложить по схеме сдвигания полученные матрицы. В результате дополнительное вычисление матрицы $Q_{\lambda k}$ из (62) можно выполнить параллельно с логарифмической оценкой времени, что не изменит порядка оценки теоремы 1. Порядок оценки не изменится и по количеству процессоров, включая случай одновременного вычисления всех таких матриц $Q_{\lambda k}$ для всех собственных чисел λ_k , $k \in 1, n$.

Из изложенного вытекает

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для любой матрицы A наряду с матрицей собственных векторов Q_k из (24), соответствующих ее собственному числу λ_k , по схеме (62) можно параллельно вычислить матрицу собственных векторов $Q_{\lambda k}$ соответствующих тому же собственному числу λ_k матрицы A_λ , полученной в результате преобразования подобия (60). При этом порядок оценки временной сложности (38) не изменится ни по времени, ни по количеству процессоров, включая случай одновременного вычисления всех таких матриц $Q_{\lambda k}$ для всех собственных чисел λ_k , $k \in 1, n$.

Следствие 8. Утверждение теоремы 2 распространяется на одновременное параллельное вычисление матриц преобразования подобия H_λ , H_λ^{-1} . Кроме того, утверждение теоремы 2 сохраняется и конкретизируется при выполнении (63)–(65) и (66).

Следствие 9. Вычисления теоремы 2 можно выполнять непосредственно из (66) без изменения отмеченного порядка временной сложности.

Следствие 10. Согласно (65), (66) матрица Q_k собственных векторов матрицы A , соответственных собственному числу λ_k этой матрицы, будет диагональной, если существует преобразование подобия (60), при котором матрица H_λ является диагональной, и именно в такой диагональной форме эта матрица использована в левой части (65).

Предложенное преобразование метода Леверье с видоизменением Д.К. Фаддеева позволяет параллельно выполнять численное решение полной проблемы собственных значений. При этом принимается стандартное ограничение исходного метода – предположение о том, что все собственные числа различны. Непосредственно от прототипа преобразование отличается тем, что исключает последовательность из n шагов (17) по вычислению вспомогательных величин и матриц, как результат представляет матрицу собственных векторов, соответствующую отдельно взятому собственному значению, в виде матричного полинома с числовыми коэффициентами. Параллельное решение полной проблемы собственных значений включает известную схему Ксанки, по которой параллельно находятся собственные числа и решение системы линейных алгебраических уравнений. К этой известной схеме добавляется предложенная схема параллельного вычисления собственных векторов. От других известных методов решения рассматриваемой проблемы предложенная разновидность отличается свойством универсальности, которым изначально обладает метод Леверье. Существенно, что метод Леверье, как и видоизменение Д.К. Фаддеева, представляет собой прямой (точный) метод, применение которого дает искомое решение за конечное число шагов вычислительного алгоритма. Дополнительно можно заметить, что известные аналоги, как правило, не предполагают априорного вычисления собственных значений, в то время как предложенное преобразование опирается на приближенное вычисление корней характеристического полинома с помощью устойчивой адресной сорти-

ровки. Вычисление корней выполняется с точностью до формата представления данных в языке программирования для полиномов высокой степени [22], при этом программа допускает максимальное распараллеливание, что позволяет сохранить оценку временной сложности $O(\log_2^2 n)$ для всей совокупности искомых объектов, включая вычисление собственных чисел и собственных векторов. Попутно с сохранением той же временной оценки в рамках предложенного подхода конструктивно вычисляется преобразование подобия. Кроме того, в рамках предложенного преобразования получается ряд структурных соотношений между матричными полиномами, представляющими собственные векторы, и конструктивно указывается связь между собственными векторами и обратной матрицей. Недостатком обсуждаемого метода является большой объем вычислений в случае последовательного выполнения, хотя возможна естественная рационализация предложенного алгоритма. Параллельное вычисление необходимо для сокращения времени численного моделирования многих процессов механики, опирающихся на решение полной проблемы собственных значений. Рассматриваемые преобразования и их результаты не относятся к случаю, когда среди собственных чисел матрицы имеются кратные. Работа включает явные формулы собственных векторов матрицы, а также их видоизменений в случае преобразования подобия. Это может оказаться целесообразным для оценок возмущений в приложениях к задачам механики.

Заключение

В работе представлено преобразование метода Леверье решения полной проблемы собственных значений с видоизменением Д.К. Фаддеева, при котором достигается максимально параллельная форма численного решения этой проблемы с сохранением временной сложности $O(\log_2^2 n)$ для определения коэффициентов характеристического полинома и одновременно всех собственных векторов матрицы. Показано, что корни характеристического полинома можно с высокой точностью приближения определять по параллельной схеме, при этом по величине порядка сохраняется указанная временная оценка для всей совокупности вычисляемых объектов. Работа включает явные формулы собственных векторов матрицы, а также их видоизменений в случае преобразования подобия, что применимо для оценок возмущений в приложениях к задачам механики.

Список литературы

1. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2015. 608 с. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.ibooks.ru/bookshelf/18522/reading> (дата обращения: 22.02.2025).
2. Goda Akihiro, Miyasaka Yukio, Gharehbaghi Amir Masoud, Fujita Masahiro. Synthesis and Generalization of Parallel Algorithms Considering Communication Constraints / Conference: 2020 21st International Symposium on Quality Electronic Design (ISQED). Tokyo. March 2020. P. 123–128. [Электронный ресурс]. URL: https://www.researchgate.net/publication/342826383_Synthesis_and_Generalization_of_Parallel_Algorithms_Considering_Communication_Constraints (дата обращения: 22.02.2025). DOI: 10.1109/ISQED48828.2020.9137022.
3. Горобец А.В. Параллельные методы решения задач. Учебный курс для студентов магистратуры факультета Вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. 232 с. [Электронный ресурс]. URL: https://keldysh.ru/math-center/prj-reports/EPrij-04_lectures.pdf (дата обращения: 29.01.2025).
4. Кулагин В.П. Проблемы параллельных вычислений // Перспективы науки и образования. 2016. № 1 (19). P. 7–11. URL: https://psyjournals.ru/journals/science_and_education/archive/2016_n1/kulagin (дата обращения: 22.02.2025).
5. Horne J. Supercomputers: A Philosophical Perspective. January 2015. P. 378–410. URL: https://www.researchgate.net/publication/284917728_Supercomputers:_A_Philosophical_Perspective_Article (дата обращения: 22.02.2025). DOI: 10.4018/978-1-4666-7461-5.ch016.
6. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1960. 656 с.
7. U.J.J. Le Verrier. Sur les variations séculaires des éléments elliptiques des sept planètes principales: Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus // J. Math. Pures Appl. 1840. No 1. Sér. 5. P. 220–254. URL: https://books.google.ru/books?hl=ru&lr=&id=szNYAAAAAJ&oi=fnd&pg=PA1&ots=riYsmhPriJ&sig=Z4L8IBWaRwhKWG6jE7t7VH6N_a0&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false (дата обращения: 23.02.2025).
8. Laskar J. Des premiers travaux de Le Verrier à la découverte de Neptune // Comptes Rendus Physique. 2017. Vol. 18, Is. 9–10. P. 504–519. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631070517300919> (дата обращения: 23.02.2025). DOI: 10.1016/J.CRHY.2017.10.011.
9. Шарлье К. Небесная механика. М.: Наука, 1966. 628 с. [Электронный ресурс]. URL: <https://astrobooks.ru/files/original/e761114020a094613caa8ad93d8dce93.pdf> (дата обращения: 24.02.2025).
10. Кондратьев Б.П. Вехи в развитии небесной механики // Астрономический журнал. 2023. Т. 100. № 7. С. 630–646. URL: <https://journals.eco-vector.com/0004-6299/article/view/647558> (дата обращения: 24.02.2025). DOI: 10.31857/S0004629923070046.
11. Уфимский государственный авиационный технический университет. Лекции по оптике и ядерной физике / Уравнение Шредингера. [Электронный ресурс]. URL: <https://studfile.net/preview/1014801/> (дата обращения: 25.02.2025).
12. Вульфсон И.И. Краткий курс теории механических колебаний. М.: ВНТП, 2017. 241 с. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.vntr.ru/lib/VulfsonII.pdf> (дата обращения: 29.03.2025). DOI: 10.18411/a-2017-012.
13. Зубчанинов В.Г. Общая математическая теория пластичности и постулаты макроскопической определенности и изотропии А.А. Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2018. № 5. С. 29–46. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vmumm&paperid=572&option_lang=rus (дата обращения: 29.03.2025). DOI: 10.3103/S0027133018050011.
14. Уилкинсон Д.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с. [Электронный ресурс]. URL: <https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Wilkinson1970ru.pdf> (дата обращения: 09.03.2025).
15. Georgios Tzounas, Ioannis Dassios, Muyang Liu, Federico Milano. Comparison of Numerical Methods and Open-Source Libraries for Eigenvalue Analysis of Large-Scale Power Systems // Appl. Sci. 2020. No 10 (21): 7592. URL: <https://www.mdpi.com/2076-3417/10/21/7592> (дата обращения: 05.03.2025). DOI: 10.3390/AP10217592.
16. Kostić A. Eigenvalue Problems // Applied Linear Algebra in Action. InTech. 2016. Available at: [Электронный ресурс]. URL: <https://www.intechopen.com/chapters/50675> (дата обращения: 05.03.2025). DOI: 10.5772/62267.
17. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. (Учебники для вузов. Специальная литература). СПб.: Лань, 2021. 736 с. [Электронный ресурс]. URL: https://lib.tusur.ru/irbis-new/i64r_15/cgi_bis_64.exe?Z21ID=&P21DBN=LIB&I21DBN=LIB&S21FMT=fullwebr&C21COM=S&2_S21P02=0&2_S21P03=1=&2_S21STR=512/%D0%A4%20151-129312669 (дата обращения: 26.02.2025).
18. Csanky L. Fast parallel matrix inversion algorithms // SIAM Journal on Computers. 1976. Т. 5. No 4. P. 618–623. URL: <https://www.proquest.com/docview/918506138?source-type=Scholarly%20Journals> (дата обращения: 26.02.2025). DOI: 10.1137/0205040.
19. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Физматгиз, 1966. 665 с. [Электронный ресурс]. URL: <https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/DemidovichMaron1966ru.pdf> (дата обращения: 27.02.2025).
20. Tomonori Kouya. Performance evaluation of multiple precision matrix multiplications using parallelized Strassen and Winograd algorithms // JSIAM Letters. 2016. Vol. 8. P. 21–24. URL: <https://arxiv.org/abs/1510.08642v1> (дата обращения: 27.02.2025). DOI: 10.14495/jsiaml.8.21.
21. Ромм Я.Е. Идентификация нулей и экстремумов функций на основе сортировки с приложением к анализу устойчивости. II. Случай двух действительных и одной комплексной переменной // Современные наукоемкие технологии. 2020. № 6-2. С. 254–282. DOI: 10.17513/snt.38101.
22. Ромм Я.Е. О границах идентификации корней полиномов на основе устойчивой адресной сортировки // Современные наукоемкие технологии. 2021. № 12-1. С. 84–108. DOI: 10.17513/snt.38959.