УДК 378.1:372.8
DOI 10.17513/snt.40639

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ШКОЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: ДИАГНОСТИКА ПРИЧИН ТРУДНОСТЕЙ У ПЕРВОКУРСНИКОВ ТЕХНИЧЕСКОГО ВУЗА

Туктамышов Н.К. ORCID ID 0000-0002-4679-0701,
Горская Т.Ю. ORCID ID 0000-0001-7136-8388

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский государственный архитектурно-строительный университет», Казань, Российская Федерация, e-mail: gorskaya0304@mail.ru

Проблема разрыва в успешности первых тем математического анализа – пределов и производных – часто связывается с «новизной» определения предела, однако эмпирические признаки указывают на иные причины. Цель статьи – показать, что различия успеха обусловлены сочетанием двух системных недостатков школьной подготовки: слабой отработанности алгебраических преобразований (включая логарифмы) и фрагментарными представлениями о функции (область определения, свойства, графики, поведение на бесконечности). Исследование проведено на выборке из 103 первокурсников; применены входной 0-тест на остаточные школьные знания и два тематических; основным индикатором служила доля «успеха» (балл ≥ 3) с 95 % доверительными интервалами Уилсона. Установлено, что задания на предел системно труднее процедурных задач на производные; доля «успеха» по пределам ниже, чем по производным. Показано, что трудности с пределом связаны не с формальным определением как таковым, а с необходимостью распознавать тип неопределенности и обоснованно выбирать метод. Проведенное исследование показало, что целесообразны более раннее введение логарифмов в школе и углубленная отработка понятий функции и предела. Практическая значимость исследования состоит в том, что предложенные меры облегчают переход от школьной математики к изучению математического анализа в вузе.

Ключевые слова: математика, функция, пределы, производные, математическое образование

DIFFERENTIAL CALCULUS AND SCHOOL PREPARATION: DIAGNOSTICS OF DIFFICULTIES IN FIRST-YEAR STUDENTS OF A TECHNICAL UNIVERSITY

Tuktamyshov N.K. ORCID ID 0000-0002-4679-0701,
Gorskaya T.Yu. ORCID ID 0000-0001-7136-8388

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Kazan State University of Architecture and Civil Engineering”, Kazan, Russian Federation, e-mail: gorskaya0304@mail.ru

The problem of the gap in the success of the first topics of mathematical analysis – limits and derivatives – is often associated with the “novelty” of the definition of a limit, but empirical evidence points to other reasons. The purpose of this article is to show that the differences in success are caused by a combination of two systemic flaws in schooling: a lack of proficiency in algebraic transformations (including logarithms) and a fragmented understanding of functions (domain, properties, graphs, and behavior at infinity). The study was conducted on a sample of 103 first-year students; an entrance 0-test on residual school knowledge and two thematic tests were applied; the main indicator was the proportion of “success” (score ≥3) with 95 % Wilson confidence intervals. It has been established that limit problems are systematically more difficult than procedural problems involving derivatives; the success rate for limits is lower than for derivatives, and it has been shown that the difficulties with limits are not related to the formal definition itself, but rather to the need to recognize the type of uncertainty and choose the appropriate method. The study has shown that it is advisable to introduce logarithms earlier in school and to provide in-depth training in the concepts of functions and limits. The practical significance of the study lies in the fact that the proposed measures facilitate the transition from school mathematics to the study of mathematical analysis in higher education.

Keywords: mathematics, function, limits, derivatives, mathematical education

Введение

Переход от школьного курса математики к анализу в вузе стабильно выявляет рассогласование между процедурными навыками и концептуальным пониманием. Исследования показали, что у обучающихся часто возникает разрыв между «образом понятия» и его формальным определением: так, у D. Tall и S. Vinner [1] продемонстрировано, что интуитивные представления о пределе часто не совпадают с ε–δ-определением и систематически порождают ошибки. A. Orton [2] выявил, что дифференцирование нередко осваивается процедурно (по правилам и таблицам) при слабой связке с концептуальной основой. M. Oehrtman в [3] описал типичные ученические метафоры предела («подползание», «бесконечность как большое число»). Отчет [4], опирающийся на крупномасштабные данные, рекомендует вводные диагностические процедуры, адресную поддержку «узких мест» и усиление компонентов, обеспечивающих понимание. В отечественной методической науке также описаны источники трудностей. Так, Г.Е. Полехина [5] систематизирует характерные ошибки при вычислении пределов (подмена «стремится к» на «равно», игнорирование области определения, механические сокращения). Т.Ю. Паршина [6] и Е.В. Пичугина [7] анализируют ошибки при формировании понятия логарифма. В работе [8] М.Г. Токмачев обобщает типичные ошибки по математическому анализу, авторы [9] указывают на проблемы школьного математического образования, связанные со смещением фокуса. Для корректной оценки долей «успеха» в образовательных исследованиях по бинарным исходам целесообразно использовать интервальные оценки с предсказуемым покрытием; сравнительный обзор показывает преимущества интервала Уилсона.

В этой работе авторы помещают эмпирические данные (входной 0-тест на остаточные школьные знания; тематические тесты по пределам и производным) в описанную теоретико-методическую рамку и обосновываем, что устойчивый разрыв «пределы < производные» обусловлен не только «новизной» определения предела, но прежде всего сочетанием факторов школьной подготовки – недостаточной отработанностью алгебраических преобразований (включая логарифмы и преобразование выражений) и фрагментарными знаниями о функции (область определения, свойства, график, поведение на бесконечности).

Цель исследования – обосновать, что более низкая успешность в теме «предел» по сравнению с «производной» проистекает из неумения проводить алгебраические преобразования и поверхностного понимания понятия функции и ее свойств.

Гипотеза исследования – низкая успешность по «пределам» обусловлена недостатками школьной базы – слабыми алгебраическими преобразованиями и фрагментарностью в понимании функции.

Задачи исследования:

– провести 0-тест и тематические тесты по пределам и производным;

– описать распределения результатов и доли «успеха» (≥ 3) с 95 % доверительные интервалы (ДИ) Уилсона;

– сопоставить темы и интерпретировать различия через школьные предпосылки;

– дать рекомендации: школе – логарифмы, преобразования, переводы между представлениями; вузу – концептуальное понимание предела, «каталог» неопределенностей и задачи на выбор метода.

Материалы и методы исследования

В эксперименте участвовало 103 студента-первокурсника Казанского государственного архитектурно-строительного университета. В работе использовался 95 %-й доверительный интервал Уилсона [10] – это score-интервал для доли успеха из биномиальной выборки. В настоящей работе он применен к доле «≥ 3», чтобы корректно отразить неопределенность оценок и сопоставить темы. Эмпирическая база: три последовательных теста – 0-тест (остаточные школьные знания: логарифмы/показательные, квадратные уравнения, неравенства, преобразование дроби), затем тематические по пределам и по производным. Оценивание по шкале 0; 1–2; 3; 4; 5. Основной индикатор – доля «успеха» (балл ≥ 3), согласованная с пятибалльной системой и удобная для практики (выделение зон риска/успешности).

Для каждой доли «≥ 3» рассчитывались 95 % ДИ Уилсона (score-интервал с стабильным покрытием и границами в [0; 1]), что позволяет корректно отражать неопределенность оценки. Дополнительно для наглядности считали «средний аппроксимационный балл» («средний аппроксимационный балл» получают, кодируя категории 0; 1–2; 3; 4; 5 как 0; 1.5; 3; 4; 5 и считая взвешенное среднее. Это компактный индекс уровня (не «средняя отметка»)) – как вспомогательный визуальный показатель.

Предварительное сопоставление тем выполняли графически и при необходимости через χ^2-критерий однородности на агрегированных частотах. Надежность обеспечена свойствами интервала Уилсона и согласованностью индикаторов: доли «≥ 3» и аппроксимационный средний балл, удобный для наглядного ранжирования тестов дают одну картину (пределы системно ниже производных). При $n \approx 100$ и долях ~0,5–0,6 ожидаемая полуширина ДИ – ≈ 9–10 процентных пункта.

Результаты исследования и их обсуждение

По каждому из трех последовательно выполнявшихся тестов получена согласованная картина, указывающая на специфическую трудность темы «предел» и поддерживающая выдвинутую гипотезу. На 0-тесте (диагностика остаточных школьных знаний) ниже порога «тройки» оказался 41 студент (39,8 %), «ровно 3» – 42 (40,8 %), «4–5» – 20 (19,4 %); следовательно, баллы ≥ 3 набрали 62 из 103 (60,2 %), а 95 % ДИ Уилсона для доли «≥ 3» составил [0,505; 0,691]. На тематическом тесте по пределам ниже 3 баллов – 52 (50,5 %), «ровно 3» – 15 (14,6 %), «4–5» – 36 (35,0 %); итого ≥ 3 набрали 51 из 103 (49,5 %), 95 % ДИ Уилсона [0,401; 0,590]. На тесте по производным ниже 3 – 39 (37,9 %), «ровно 3» – 12 (11,7 %), «4–5» – 52 (50,5%); итого ≥ 3 – 64 из 103 (62,1 %), 95 % ДИ Уилсона [0,525; 0,709]. По этим интервалам видно, что блок «Пределы» устойчиво слабее «Производных»: центральные оценки различаются (~49,5 % против ~62,1 %), а границы интервалов у «Пределов» заметно смещены вниз; при этом различие между «0-тестом» и «Производными» невелико и по интервалам неочевидно (что согласуется с процедурной «поддержкой» задач на дифференцирование).

На диаграмме долей «≥ 3» с 95 % ДИ Уилсона (рис. 1) видно, что столбец «Пределы» расположен ниже «Производных», а его «вилочка» целиком лежит в области меньших значений. Это означает: если бы при исследовании авторы многократно повторяли измерение на схожих наборах первокурсников, доля успешных по пределам почти всегда была бы заметно ниже доли успешных по производным. Ширина «вилочек» (~±9–10 п.п.) соответствует ожидаемой точности при n ≈ 100 и долях около 0,5–0,6; она не отменяет различия паттернов, а достоверно показывает неопределенность оценки [10].

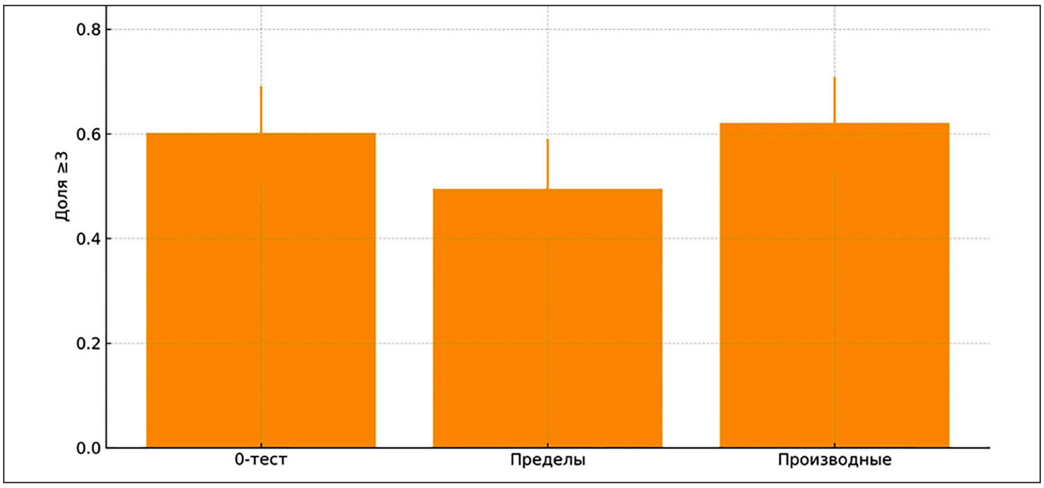

Рис. 1. Доля ≥ 3 с 95 % ДИ Уилсона по тестам
Примечание: составлен авторами на основании данного исследования

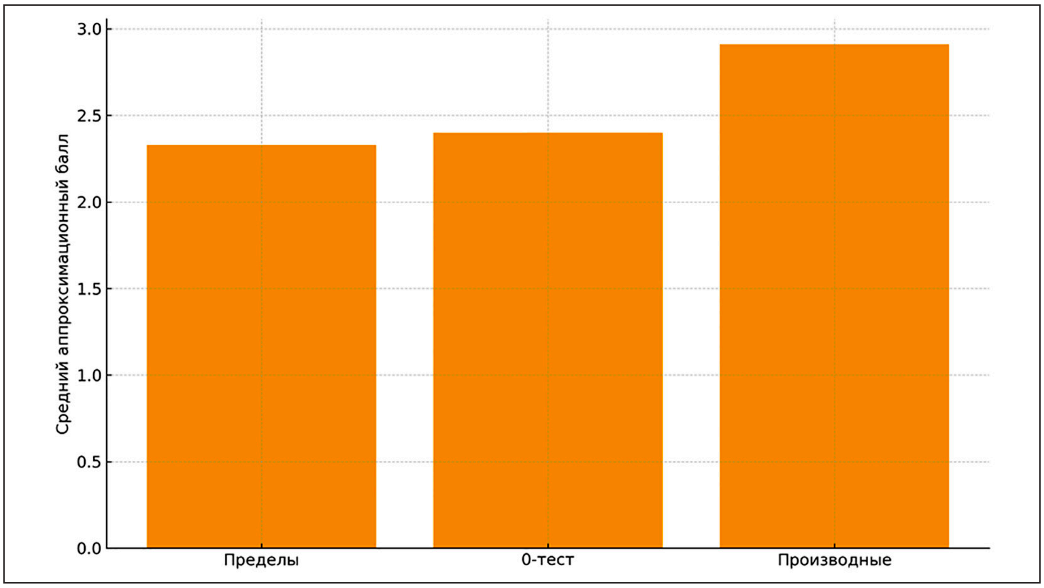

Рис. 2. Средний аппроксимационный балл по тестам
Примечание: составлен авторами на основании данного исследования

Смысловое усиление через «средние» аппроксимационные баллы. Для порядковой шкалы 0; 1–2; 3; 4; 5 был вычислен иллюстративный показатель – «средний аппроксимационный балл» (0; 1,5; 3; 4; 5). Он дает компактное ранжирование: Пределы – 2,33 (самый низкий), 0-тест – 2,40 (промежуточный), Производные – 2,91 (самый высокий). Этот индикатор, хотя и аппроксимационный, воспроизводит тот же порядок трудности и подчеркивает, что проседание возникает именно на «пределах», а не представляет собой общий провал.

Входной 0-тест показывает, что школьные недочеты сосредоточены прежде всего в алгебраических преобразованиях и логарифмах (см. распределение «0», «1–2» в 0-тесте): это операции, которые необходимы для понимания предельного перехода, согласно [11]. На «Пределах» доля «≥ 3» падает относительно и 0-теста, и «Производных», а интервал Уилсона смещается вниз – что согласуется с идеей, что без преобразований и целостных представлений о функции (область определения, свойства, график, поведение на бесконечности) студент не распознает тип неопределенности и выбирает не тот метод. На «Производных» картина лучше именно потому, что ранние задачи решаемы по процедурам (правила и таблицы), то есть при слабом концептуальном компоненте [12] возможна «процедурная компенсация».

Полученные результаты согласуются с известным тезисом о разрыве между «образом понятия» и определением предела [1]: результаты авторов показывают, что без понимания понятия функции студент не распознает ситуацию предельного перехода. Конкретные ученические метафоры предела, описанные у Oehrtman [3] («подползание», «∞ как большое число»), в данных авторов проявляются как систематические ошибки распознавания неопределенностей и неверный выбор метода. Вывод Orton [2] о процедурной освоенности дифференцирования и слабой связке с определением производной согласуется с тем, что по теме «Производные» результаты лучше, чем по теме «Пределы», что подтверждается интервальными оценками, а не только частотами. Рекомендации MAA-отчета [4] о необходимости входной диагностики и адресной поддержки «узких мест» подкрепляются и анализом авторов. В отечественной литературе Г.Е. Полехина [5] выделяет типичные ошибки по пределам (подмена «стремится к» на «равно», игнорирование ОДЗ, механические сокращения). А Т.Ю. Паршина [6] и Е.В. Пичугина [7] – ошибки при работе с логарифмами и алгебраическими преобразованиями в школе; распределения, полученные авторами, и интервалы указывают на тот же механизм. В отличие от большинства описательных отчетов, авторы используют 95 % ДИ Уилсона для долей «≥ 3», что позволяет достоверно отразить неопределенность и корректно сопоставлять блоки при n ≈ 100. Научная новизна состоит в количественном подтверждении (на единой выборке первокурсников с использованием доли «≥ 3» и 95 % ДИ Уилсона, дополняемой аппроксимационным индексом) ключевой роли алгебраических преобразований и целостных представлений о функции в провалах по теме «Предел».

Результаты показывают системную природу трудностей с темой «Предел» и подтверждают гипотезу о решающей роли алгебраических преобразований и пониманием понятия функции. По всем индикаторам («распределения», доли ≥ 3 с ДИ, аппрокс. средние) «пределы» стабильно ниже «производных» при сопоставимой стартовой базе. Это согласуется с идеей разрыва между «образом понятия» и ε–δ-определением и с наблюдаемыми метафорами, ведущими к ошибкам распознавания предельных ситуаций [1] (см. также [3]). Более высокие результаты по производным объясняются процедурной опорой (правила/таблицы), а не лучшей концептуальной базой.

Содержательно «предел» требует: а) приведения выражения к форме предельного перехода (ОДЗ, свойства, выделение множителей); б) распознавания неопределенности и выбора соответствующего метода согласно [13]. Эти операции повышают когнитивную нагрузку, поэтому школьные недоработки (логарифмы, преобразования, свойства/графики) закономерно «роняют» раздел «Предел». Выявленная цепочка «слабая база → провал на пределах → относительное улучшение на производных» отражает отсутствие указанного перехода [4].

Сопоставление с прежними работами подтверждает как общность, так и специфику: к известным механизмам трудностей с пределом [1] (см. также [3]). добавляется вклад школьных практик – позднее/формальное введение логарифмов и слабая тренировка алгебраических преобразований/ОДЗ [14].

На школьном уровне целесообразно обеспечить более раннее и содержательное введение логарифмов, систематически отрабатывать алгебраические преобразования и прояснить смысл и свойства функции [15]. В университетском курсе полезно последовательно разъяснять и демонстрировать понятие предела (в том числе через контрпримеры), вводить явный «каталог» неопределенностей с диагностическими признаками выбора метода.

Таким образом, низкая успешность по «пределам» обусловлена не «новизной» определения, а неумением проводить алгебраические преобразования и слабым понимания понятия функции, необходимых для распознавания ситуации и обоснованного выбора метода.

Выводы

1. Причина провала на «пределах». Более низкая успешность по сравнению с «производными» обусловлена не «новизной» темы, а пробелами школьной базы: слабые алгебраические преобразования (в том числе логарифмы, рационализация) и фрагментарные представления о функции (ОДЗ, свойства, графики). Совпадение трех индикаторов – распределений, долей «≥ 3» с 95 % ДИ Уилсона и аппроксимационных средних – подтверждает вывод и согласуется с идеями о разрыве между образом понятия и ε–δ-определением, а также с типичными метафорами/ошибками распознавания предельных ситуаций.

2. Представляется, что в школе необходимы раннее и содержательное введение логарифмов, системная проработка по теме «Алгебраические преобразования», тщательное разъяснение понятия функции, а в вузах нужно обратить внимание на поэтапное введение понятия предела и его концептуальное разъяснение.

3. Практическая значимость исследования состоит в том, что предложенные меры делают более плавным переход от школьного курса к университетскому математическому анализу.

Список литературы

1. Tall D., Vinner S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity // Educational Studies in Mathematics. 1981. Vol. 12. Is. 2. P. 151–169. DOI: 10.1007/BF00305619.

2. Orton A. Students' Understanding of Differentiation // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 1983. Vol. 14. Is. 3. P. 235–240. DOI: 10.1007/BF00410540.

3. Oehrtman M. Collapsing Dimensions, Physical Limitation, and Other Student Metaphors for Limit Concepts // Journal for Research in Mathematics Education. 2009. Vol. 40. Is. 4. P. 396–426. DOI: 10.5951/jresematheduc.40.4.0396.

4. Bressoud D., Mesa V., Rasmussen C. Insights from the MAA National Study of College Calculus. Washington, DC: MAA, 2015. 180 s. NSBN 978-0-88385-194-4.

5. Полехина Г.Е. Характерные ошибки по теме «Пределы» // Преподаватель XXI век. 2019. № 2. С. 45–51. EDN: NQXFCA.

6. Паршина Т.Ю. О формировании понятия «логарифм числа» в школе // Наука и перспективы. 2018. № 3. С. 1–5. URL: nip.esrae.ru/19-144 (дата обращения: 12.11.2025).

7. Пичугина Е.В. Проблемы изучения логарифмической функции в школе // Актуальные исследования. 2023. № 46 (176). Ч. III. С. 78–81. ISSN 2778–8113.

8. Токмачев М.Г. Типичные ошибки при решении задач математического анализа. М.: МГУ, 2011. URL: https://math.phys.msu.ru>data>Mistakes (дата обращения: 30.11.2025).

9. Вакилов Ш.М., Лахикова З.Г. Современные проблемы преподавания математики в школе // Инновационные технологии в образовании. 2019. № 1. С. 36–42. EDN: NYTRIQ.

10. Brown L.D., Cai T.T., DasGupta A. Interval Estimation for a Binomial Proportion // Statistical Science. 2001. Vol. 16. Is. 2. P. 101–133. DOI: 10.1214/ss/1009213286.

11. ФИПИ. Аналитический отчет по результатам ЕГЭ по математике 2023: типичные затруднения (логарифмы, преобразования). М.: ФИПИ, 2023. 43 с. URL: https://doc.fipi.ru/ege/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy/2023/ma_mr_2023.pdf (дата обращения: 20.11.2025).

12. Туктамышов Н.К., Горская Т.Ю. Методика сбора и анализа остаточных знаний // Современные наукоемкие технологии. 2024. № 12. С. 232–237. EDN: EYUHMV.

13. Московский политех. Математический анализ (методические указания/рабочая программа: предел, неопределенности, выбор метода). М.: Московский политех, 2023. 32 с. mospolytech.ru›sveden/files/B1.1.30.2_MatAn.pdf (дата обращения: 07.10.2025).

14. Кавинов А.В. О проблемах изучения методов вычисления пределов функций многих переменных // Modern European Researches. 2021. Vol. 1. Is. 2. P. 95–102. EDN: XGGERA.

15. Методические аспекты изучения элементов дифференциального исчисления в старшей школе с использованием цифровых ресурсов // Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании. 2023. URL: https://infed.ru/articles/10203/ (дата обращения 07.10.2025).

Конфликт интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest: The authors declare that there is no conflict of interest.