

УДК 519.87:532.546:536.24  
 DOI 10.17513/snt.40602

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ГРЕТЦА  
 В ПОРИСТОМ ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ  
 В ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНЫХ УСЛОВИЯХ  
 С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ**

**Губарева К.В. ORCID ID 0000-0002-9845-8372,  
 Еремин А.В. ORCID ID 0000-0002-2614-6329**

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
 «Самарский государственный технический университет», Самара, Российская Федерация,  
 e-mail: r.kristina2017@mail.ru*

В работе получено полное аналитическое решение трехмерной задачи Гретца для стационарного течения в пористом прямоугольном канале в локально-неравновесных условиях между твердым каркасом и жидкостью. Моделирование основано на уравнениях конвективного теплообмена с раздельными температурами фаз и включает вклад диссипации механической энергии, описываемой моделью Дарси. Гидродинамически развитое течение описывается моделью Бринкмана. Метод решения основан на разложении безразмерных температур жидкой и твердой фаз в двойные ряды Фурье по поперечным координатам. После применения процедуры разложения исходная система уравнений в частных производных сведена к решению обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд разложения. В приближении, справедливом для умеренных и больших чисел Пекле, получены явные аналитические выражения для полей температур обеих фаз. На основе точного расчета средней объемной температуры выведено замкнутое выражение для локального числа Нуссельта, учитывающее вклад теплопроводности обеих фаз в суммарный тепловой поток на стенке канала. Проведен анализ влияния ключевых безразмерных критериев. Показано, что в локально-неравновесных условиях (малые  $Bi$ ) возникает значительная разность температур фаз, что снижает число Нуссельта на 20–25 % по сравнению с режимом локального равновесия ( $Bi \rightarrow \infty$ ). Диссипация вызывает монотонный рост температуры жидкости вдоль канала, становясь доминирующим фактором при  $Br > 0,5$ . Решение демонстрирует быструю сходимость и может служить эталоном для проверки численных методов, решающих сложные сопряженные задачи конвективного теплообмена в пористых средах.

**Ключевые слова:** задача Гретца, пористый канал, локально-неравновесный теплообмен, аналитическое решение, диссипация, число Нуссельта

**ANALYTICAL SOLUTION OF THE THREE-DIMENSIONAL  
 GRAETZ PROBLEM IN A POROUS RECTANGULAR CHANNEL  
 UNDER LOCAL THERMAL NONEQUILIBRIUM  
 CONDITIONS WITH DISSIPATION**

**Gubareva K.V. ORCID ID 0000-0002-9845-8372,  
 Eremin A.V. ORCID ID 0000-0002-2614-6329**

*Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education  
 “Samara State Technical University”, Samara, Russian Federation,  
 e-mail: r.kristina2017@mail.ru*

A complete analytical solution is obtained for the three-dimensional Graetz problem of steady-state flow in a porous rectangular channel under local thermal nonequilibrium conditions between the solid matrix and the fluid. The modeling is based on convective heat transfer equations with separate phase temperatures and includes the contribution of mechanical energy dissipation described by the Darcy model. The hydrodynamically developed flow is described by the Brinkman model. The solution method is based on expanding the dimensionless temperatures of the liquid and solid phases into double Fourier series in the transverse coordinates. After applying the expansion procedure, the original system of partial differential equations is reduced to solving ordinary differential equations for the expansion amplitudes. Under an approximation valid for moderate and high Péclet numbers, explicit analytical expressions for the temperature fields of both phases are obtained. Based on an accurate calculation of the mean bulk temperature, a closed-form expression for the local Nusselt number is derived, which accounts for the contribution of thermal conductivity from both phases to the total heat flux at the channel wall. An analysis of the influence of key dimensionless parameters is performed. It is established that under local nonequilibrium conditions (small  $Bi$ ), a significant temperature difference between the phases arises, which reduces the Nusselt number by 20–25 % compared to the local equilibrium regime ( $Bi \rightarrow \infty$ ). Dissipation causes a monotonic increase in the fluid temperature along the channel, becoming the dominant factor at  $Br > 0,5$ . The solution demonstrates rapid convergence and can serve as a benchmark for verifying numerical methods solving complex conjugated convective heat transfer problems in porous media.

**Keywords:** Graetz problem, porous channel, local thermal nonequilibrium, dissipation, analytical solution, Nusselt number

## Введение

Исследование конвективного теплообмена в каналах, заполненных пористыми средами, имеет фундаментальное и прикладное значение для множества передовых технологий, таких как системы аварийного охлаждения активных зон ядерных реакторов, высокоэффективные компактные теплообменники, каталитические реакторы, системы рекуперации тепла и терморегулирования электронной аппаратуры [1]. Особый интерес для создания таких устройств представляют современные структурированные пористые материалы на основе трижды периодических минимальных поверхностей (ТПМП), обладающие оптимальным сочетанием прочности, проницаемости и развитой площади поверхности теплообмена [2]. Классическая задача Гретца о развитии температурного поля в канале при заданной температуре стенки служит краеугольным камнем в теории конвективного теплообмена и многократно обобщалась для учета специфики течений в насыщенных пористых средах [3, 4].

В ранних исследованиях, опиравшихся на модель однотемпературной среды, обычно предполагалось состояние локального термического равновесия (ЛТР), при котором температуры твердого каркаса и жидкости в каждой точке пространства совпадают [5]. Однако в реальных условиях, например при высоких скоростях течения, низкой теплопроводности каркаса или малом коэффициенте межфазного теплообмена, это допущение часто не выполняется. В таких режимах возникает существенная разность температур между фазами, что требует перехода к двухтемпературным моделям или моделям локально-термического неравновесия (ЛТН) [6]. Игнорирование этого эффекта может привести к значительным погрешностям в расчете тепловых потоков.

Важным физическим эффектом, сопровождающим фильтрацию жидкости в пористой матрице, является также вязкая диссипация механической энергии, превращающая работу сил трения в тепло. Ее вклад становится определяющим в высокоскоростных течениях, в высоковязких жидкостях или в средах с малой проницаемостью. Влияние диссипации на теплообмен в условиях локального неравновесия изучено недостаточно полно, особенно для трехмерных течений в каналах некруглого сечения, где геометрия поперечного сечения существенно усложняет картину теплопереноса [7].

Аналитические решения подобных со-пряженных задач представляют особую

ценность, так как позволяют не только получить точные зависимости для ключевых параметров, но и выявить фундаментальные физические закономерности, служа надежным эталоном для верификации и тестирования численных методов [8, 9]. Теоретические основы теплопроводности, заложенные в классических и обобщенных моделях [10, 11], остаются актуальным инструментом для таких исследований. При моделировании сложных пористых структур, подобных поверхности Фишера – Коха S, особое значение приобретают современные методы численного анализа, разработанные в работах [12–14]. Подробное исследование топологии и свойств ТПМП представлено в [15].

Несмотря на значительное количество работ по каждому из указанных аспектов в отдельности, в литературе отсутствует комплексное трехмерное аналитическое решение, которое одновременно и строго учитывало бы как локально-неравновесные условия теплопереноса между фазами, так и вклад вязкой диссипации энергии, с последующим детальным анализом динамики локального числа Нуссельта. Восполнение этого пробела позволит более адекватно описывать теплообмен в широком классе практических устройств с пористыми вставками.

**Цель исследования** – получение полного аналитического решения трехмерной задачи Гретца для пористого прямоугольного канала в локально-неравновесных условиях с учетом диссипации и анализ влияния определяющих безразмерных критерии на тепловые характеристики.

## Материал и методы исследования

Рассматривается стационарная вынужденная конвекция в пористом прямоугольном канале с поперечными размерами  $-H \leq y \leq H$ ,  $-H \leq z \leq H$  и продольной координатой  $0 \leq x < \infty$  (рис. 1). Параметр  $H$  представляет собой половину ширины и половину высоты канала (м). Среда состоит из твердого каркаса и жидкой фазы, заполняющей поровое пространство. Физическая модель предполагает, что пористая среда является однородной, изотропной, жесткой и неподвижной, а течение – ламинарным и гидродинамически стабилизированным.

Принята ключевая гипотеза локально-неравновесных условий теплообмена, поэтому температуры жидкой  $T_f$  и твердой  $T_s$  фаз различны и описываются независимыми уравнениями энергии. Стенки канала поддерживаются при постоянной температуре  $T_w$ , на входе ( $x = 0$ ) температура жидкости постоянна и равна  $T_{in} \neq T_w$ .

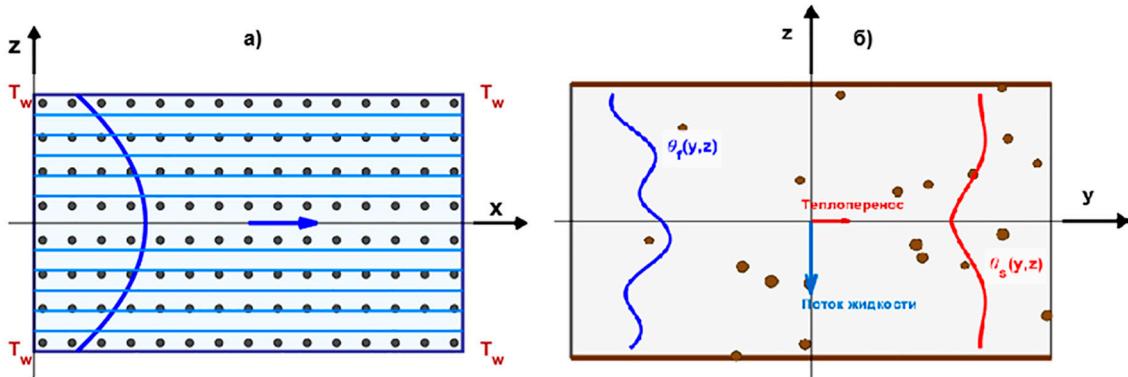


Рис. 1. Схема теплообмена в пористом прямоугольном канале: а) вид сверху, б) поперечный разрез  
Примечание: составлен авторами по результатам данного исследования

Гидродинамически развитое течение описывается моделью Бринкмана. Поле скорости имеет одну продольную компоненту  $u = u(y, z)$ , определяемую уравнением [1]:

$$\mu_{\text{eff}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{\mu}{K} u + G = 0, \quad (1)$$

где  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости (Па·с),  $\mu_{\text{eff}}$  – эффективная вязкость (Па·с),  $K$  – проницаемость ( $\text{м}^2$ ),  $G = -dp / dx = \text{const}$  – постоянный градиент давления (Па/м). Границные условия  $u = 0$  при  $y = \pm H$ ,  $z = \pm H$  соответствуют условию прилипания, а условия симметрии  $\partial u / \partial y = 0$  при  $y = 0$ ,  $\partial u / \partial z = 0$  при  $z = 0$  отражают геометрическую симметрию задачи.

Решение уравнения (1) дает профиль скорости в виде произведения функций [1]:

$$u(y, z) = U \left[ 1 - \frac{\cosh(Sy/H)}{\cosh S} \right] \left[ 1 - \frac{\cosh(Sz/H)}{\cosh S} \right], \quad (2)$$

где  $U$  – средняя скорость (м/с), а параметр  $S$  определяется как

$$S = \frac{1}{\sqrt{M \text{Da}}} = \frac{H}{\sqrt{KM}}, \quad M = \frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu}, \quad \text{Da} = \frac{K}{H^2}.$$

Здесь Da – число Дарси, а параметр  $S$  характеризует соотношение между сопротивлением пористой матрицы и вязкими силами; при  $S \rightarrow 0$  течение описывается моделью Дарси с плоским профилем, а при больших  $S$  профиль приближается к параболическому.

Теплообмен описывается системой уравнений энергии для каждой фазы с учетом вязкой диссипации по модели Дарси, где источник тепла пропорционален квадрату скорости. Для жидкости:

$$\rho_f c_{p,f} u \frac{\partial T_f}{\partial x} = k_f \left( \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} \right) + h_{fs} (T_s - T_f) + \Phi_{\text{visc}}, \quad (3)$$

для твердого каркаса, который считается неподвижным:

$$0 = k_s \left( \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} \right) + h_{fs} (T_f - T_s), \quad (4)$$

где  $\rho_f$  – плотность жидкости ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ),  $c_{p,f}$  – удельная теплоемкость жидкости ( $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ),  $k_f$  – теплопроводность жидкости ( $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ );  $k_s$  – теплопроводность каркаса ( $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ );  $h_{fs}$  – объемный коэффициент межфазного теплообмена ( $\text{Вт}/(\text{м}^3\cdot\text{К})$ ). Источник диссипации задается моделью Дарси:  $\Phi_{\text{visc}} = \mu u^2 / K$  ( $\text{Вт}/\text{м}^3$ ), что адекватно при малых числах Дарси ( $Da \ll 1$ ), когда доминирует сопротивление пористой среды.

Границные и начальные условия формулируются следующим образом:

$$\begin{aligned} T_f &= T_s = T_w \text{ при } y = \pm H \text{ или } z = \pm H, \\ \frac{\partial T_f}{\partial y} &= \frac{\partial T_s}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, \frac{\partial T_f}{\partial z} = \frac{\partial T_s}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0, \\ T_f(x=0, y, z) &= T_{in}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для перехода к безразмерному виду вводятся следующие переменные и параметры подобия:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{H \text{Pe}}, y = \frac{y^*}{H}, z = \frac{z^*}{H}, \theta_f = \frac{T_f - T_w}{T_{in} - T_w}, \theta_s = \frac{T_s - T_w}{T_{in} - T_w}, \\ \text{Pe} &= \frac{\rho_f c_{p,f} U H}{k_f}, \text{Br} = \frac{\mu U^2 H^2}{k_f (T_{in} - T_w) K}, k_r = \frac{k_s}{k_f}, \text{Bi} = \frac{h_{fs} H^2}{k_f}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $x^*, y^*, z^*$  – размерные координаты (м), Pe – число Пекле, Br – число Бринкмана,  $k_r$  – отношение теплопроводностей, Bi – число Био (параметр межфазного теплообмена).

Безразмерная система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{u} \frac{\partial \theta_f}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Pe}^2} \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial z^2} + \text{Br} \cdot D(y, z) + \text{Bi}(\theta_s - \theta_f), \\ 0 &= \frac{k_r}{\text{Pe}^2} \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial z^2} + \text{Bi}(\theta_f - \theta_s), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\hat{u} = u / U$ ,  $D(y, z) = \hat{u}^2$ . Границные условия:  $\theta_f = \theta_s = 0$  при  $y = \pm 1$  или  $z = \pm 1$ ; условия симметрии аналогичны (5); начальное условие:  $\theta_f = 1$  при  $x = 0$ .

Метод решения основан на разложении безразмерных температур в двойные ряды Фурье по полной системе собственных функций, удовлетворяющих граничным условиям на стенках:

$$\begin{aligned} \theta_f(x, y, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{mn}(x) \cos(\lambda_m y) \cos(\mu_n z), \\ \theta_s(x, y, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{mn}(x) \cos(\lambda_m y) \cos(\mu_n z), \end{aligned} \quad (8)$$

где собственные значения  $\lambda_m = (2m + 1)\pi/2$ ,  $\mu_n = (2n + 1)\pi/2$  обеспечивают выполнение граничных условий.

Подстановка (8) в (7) и применение процедуры разложения приводят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд  $\Theta_{mn}(x)$  и  $\Psi_{mn}(x)$ . Для случая  $\text{Pe} \gtrsim 1$  продольной теплопроводностью в твердой фазе можно пренебречь, что дает алгебраическую связь:

$$\Psi_{mn}(x) = \frac{\text{Bi}}{\text{Bi} + k_r \alpha_{mn}^2} \Theta_{mn}(x), \quad \alpha_{mn}^2 = \lambda_m^2 + \mu_n^2. \quad (9)$$

Тогда уравнение для  $\Theta_{mn}(x)$  принимает вид

$$\frac{1}{\text{Pe}^2} \Theta_{mn}'' - \hat{u}_{mn} \Theta_{mn}' - K_{mn} \Theta_{mn} = -\text{Br} \cdot D_{mn}, \quad (10)$$

где  $K_{mn} = \alpha_{mn}^2 + \frac{\text{Bi} \cdot k_r \alpha_{mn}^2}{\text{Bi} + k_r \alpha_{mn}^2} > 0$ , а коэффициенты Фурье  $\hat{u}_{mn}$  и  $D_{mn}$  вычисляются через интегралы от профиля скорости (2).

Решение (10), ограниченное при  $x \rightarrow \infty$ , имеет вид

$$\Theta_{mn}(x) = C_{mn} e^{-\kappa_{mn} x} + \Theta_{mn}^{(\text{part})}, \quad \Theta_{mn}^{(\text{part})} = \frac{\text{Br} \cdot D_{mn}}{K_{mn}}, \quad (11)$$

где  $\kappa_{mn} > 0$  – корень характеристического уравнения, а постоянная  $C_{mn}$  находится из начального условия.

На основе полученного решения определяется локальное число Нуссельта, характеризующее интенсивность теплообмена на стенке канала. С учетом вклада обеих фаз:

$$\text{Nu}(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\sum_{m,n} [\Theta_{mn}(x) + k_r \Psi_{mn}(x)] \left( -\frac{1}{\lambda_m \mu_n} \right)}{\theta_b(x)}, \quad (12)$$

где  $\theta_b(x)$  – средняя объемная температура жидкости.

### Результаты исследования и их обсуждение

На основе аналитического решения (8), (9), (11) и (12) выполнены расчеты тепловых и гидродинамических характеристик течения. Приняты следующие базовые параметры, если не указано иное: пористость  $\varepsilon = 0,5$ ,  $k_r = 10$ ,  $\text{Br} = 0,1$ ,  $\text{Bi} = 1$ .

На рис. 2 представлены профили скорости. Как видно на рис. 2, а, с уменьшением числа Дарси (Da) профиль скорости приближается к параболическому (профилю Пуазейля в непористом канале). Для  $\text{Da} = 10^{-4}$  течение практически полностью описывается законом Дарси, профиль скорости выравнивается. Трехмерная структура поля скорости (рис. 2, б) и распределение его модуля в поперечном сечении (рис. 2, в) демонстрируют симметрию, характерную для геометрии прямоугольного канала.

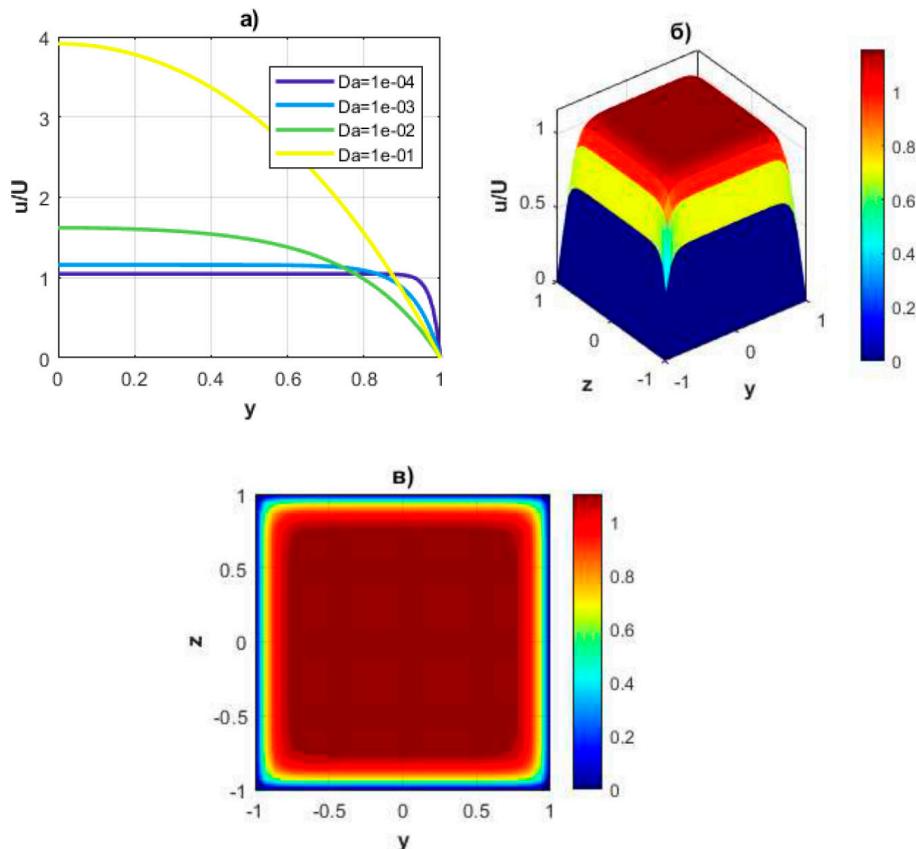


Рис. 2. Профили скорости течения: а) влияние числа Дарси (Da) на безразмерный профиль  $u/U$  (сечение  $z = 0$ ); б) трехмерное распределение скорости; в) контуры скорости в поперечном сечении (вид сверху)

Примечание: составлен авторами по результатам данного исследования

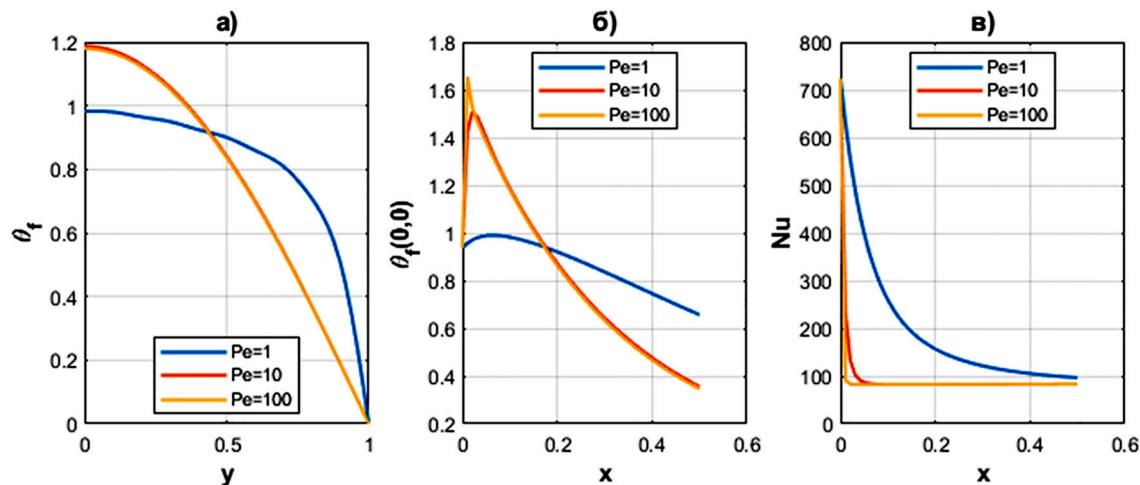


Рис. 3. Результаты решения трехмерной задачи Гретца в локально-неравновесных условиях ( $Bi = 1$ ,  $Br = 0,1$ ): а) профили безразмерной температуры жидкости  $\theta_f$  в сечении  $x = 0,1$  при различных числах Пекле; б) изменение температуры  $\theta_f(0,0)$  вдоль канала; в) изменение локального числа  $Nu(x)$

Примечание: составлен авторами по результатам данного исследования

Профили безразмерной температуры жидкости  $\theta_f$  в сечении  $x = 0,1$  (рис. 3, а) показывают классическую для задачи Гретца картину: с ростом числа  $Pe$  тепловой пограничный слой у стенок становится тоньше. Это связано с усилением роли конвективного переноса вдоль канала по сравнению с поперечным кондуктивным переносом. При малых  $Pe$  ( $Pe = 1$ ) температура успевает выравниваться по сечению уже на небольшом расстоянии от входа.

Изменение температуры на оси канала  $\theta_f(0,0,x)$  (рис. 3, б) подтверждает вывод: для  $Pe = 100$  температура в центре падает очень медленно, что свидетельствует о большом расстоянии, необходимом для полного прогрева. При  $Pe = 1$  температура быстро стремится к нулю.

В начальной точке ( $x \rightarrow 0$ ) число  $Nu$  стремится к бесконечности, что соответствует условию I рода на стенке при скачке температуры (рис. 3, в). Далее наблюдается монотонное уменьшение  $Nu$  по мере прогрева потока и выхода на термически развитый режим. Анализ показывает, что величина числа  $Pe$  существенно влияет на динамику числа  $Nu$  в начальной области, но слабо сказывается на его асимптотическом значении вдали от входа.

### Заключение

В работе разработан аналитический метод решения, основанный на применении двойных рядов Фурье. Данный метод позволил получить в замкнутой форме решение для трехмерных полей температур жидкой и твердой фаз в пористом прямоугольном

канале в рамках локально-неравновесной модели переноса тепла с учетом вязкой диссипации механической энергии.

Проведенный параметрический анализ на основе полученного аналитического решения позволил количественно оценить влияние ключевых безразмерных критериев, в первую очередь интенсивности межфазного теплообмена. Установлено, что переход от условий локального термического равновесия ( $Bi \rightarrow \infty$ ) к выраженному неравновесию (малые числа Био) приводит к значительному снижению – на 20–25% – расчетного коэффициента теплоотдачи (числа Нуссельта) по сравнению с равновесным режимом. Показано также, что вклад вязкой диссипации в энергетический баланс становится сравнимым с конвективным переносом и определяет неадиабатический рост температуры жидкости вдоль канала при числах Бринкмана  $Br > 0,5$ .

Полученное решение обладает экспоненциальной сходимостью рядов и формирует строгий аналитический эталон. Эта работа вносит вклад в теорию сопряженного теплообмена и может служить для тестирования и верификации вычислительных алгоритмов, моделирующих сложные процессы теплопереноса в насыщенных пористых средах.

### Список литературы

1. Nield D.A., Bejan A. Convection in Porous Media. 5th ed. New York: Springer, 2017. 640 p. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-49562-0> (дата обращения: 09.12.2025). DOI: 10.1007/978-3-319-49562-0. ISBN 978-3-319-49562-0.
2. Губарева К.В., Еремин А.В. Исследование теплопроводности пористых материалов со структурой типа Фишера

- ра – Кожа С // Современные научноемкие технологии. 2024. № 10. С. 38–43. URL: <https://top-technologies.ru/article/view?id=40169&ysclid=miyao9q2n150248049> (дата обращения: 09.12.2025). DOI: 10.17513/snt.40169. EDN: FICKUA.
3. Кручен В.А., Дворкин П.В. Моделирование процессов тепловой диагностики тепловозной выпрямительной установки // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2023. № 1. С. 52–59. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/modelirovaniye-protsessov-teplovoy-diagnostiki-teplovoznoy-vyprugamitelnoy-ustanovki> (дата обращения: 09.12.2025). DOI: 10.20295/1815-588X-2023-1-52-59.
4. Рыдальна Н.В., Аксенов Б.Г., Степанов О.А., Антонова Е.О. Применение пористых материалов в теплообменных аппаратах системы теплоснабжения // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2020. Т. 22. № 3. С. 3–13. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primenie-poristyh-materialov-v-teploobmennyh-apparatah-sistemy-teplosnabzheniya> (дата обращения: 09.12.2025). DOI: 10.30724/1998-9903-2020-22-3-3-13.
5. Соловьева О.В., Соловьев С.А., Талипова А.Р., Шакурова Р.З., Гилязов А.И. Исследование влияния пористости волокнистого материала на значение энергетической эффективности // Вестник КГЭУ. 2022. № 1 (53). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-vliyaniya-poristosti-volknistogo-materiala-na-znachenie-energeticheskoy-effektivnosti> (дата обращения: 09.12.2025).
6. Попов В.И. Погранслойный тепломассоперенос в средах локально-неравновесной релаксационной микроструктуры // Международный научно-исследовательский журнал. 2022. № 7–1 (121). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/pogransloynyy-teplomassoperenos-v-sredah-lokalnoneravnovesnoy-relaksatsionnoy-mikrostruktury> (дата обращения: 09.12.2025).
7. Горулева Л.С., Просвиряков Е.Ю. Новый класс точных решений уравнений Навье – Стокса с учетом внутреннего тепловыделения // Химическая физика и мезоскопия. 2022. № 1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/novyy-klass-tochnyh-resheniy-uravneniy/navie-stoksa-s-uchetom-vnuttrennego-teplovydeleniya> (дата обращения: 09.12.2025).
8. Хабин М.Р., Марышев Б.С. Возникновение концентрационной конвекции в длинной прямоугольной области пористой среды // Вестник ПГУ. Физика. 2023. № 4. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/vozniknovenie-kontsentratsionnoy-konvektsii-v-dlinnoy-pryamougolnoy-oblasti-poristoy-sredy> (дата обращения: 09.12.2025).
9. Колчанова Е.А., Колчанов Н.В. Влияние размера воздушной области на порог тепловой конвекции в системе «воздух – тепловыделяющая пористая среда – воздух» // Вестник ПГУ. Физика. 2022. № 1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/vliyanie-razmera-vozdushnoy-oblasti-na-porog-teplovoy-konvektsii-v-sisteme-vozduh-teplovydelyayuschayay-poristaya-sreda-vozduh> (дата обращения: 09.12.2025).
10. Орехов А.А., Рабинский Л.Н., Федотенков Г.В. Фундаментальные решения уравнений классической и обобщенной моделей теплопроводности // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. № 4. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/fundamentalnye-resheniya-uravneniy-klassicheskoy-i-obobschennoy-modeley-teploprovodnosti> (дата обращения: 09.12.2025).
11. Эткин В.А. Синтез равновесной и неравновесной термодинамики // Научный журнал. 2021. № 2 (57). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/sintez-ravnovesnoy-i-neravnovesnoy-termodinamiki> (дата обращения: 09.12.2025).
12. Губарева К.В., Еремин А.В. Исследование процесса теплопереноса в пористой среде со структурой ТПМП Фишера – Кожа С // Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures. 2024. № 4. С. 70–82. URL: [https://dream-journal.org/DREAM\\_Issue\\_4\\_2024\\_Gubareva\\_K.V.\\_et\\_al.\\_070\\_082.pdf](https://dream-journal.org/DREAM_Issue_4_2024_Gubareva_K.V._et_al._070_082.pdf) (дата обращения: 09.12.2025). DOI: 10.17804/2410-9908.2024.4.070-082.
13. Губарева К.В., Еремин А.В. Моделирование процесса теплопроводности в пористой среде с переменными во времени граничными условиями // Тепловые процессы в технике. 2025. Т. 17. № 4. С. 151–160. URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=185063&ysclid=miyakh17e4887306415> (дата обращения: 09.12.2025). EDN: IMXMCX.
14. Губарева К.В., Еремин А.В. Численное решение задачи теплопроводности в пористой пластине с топологией трижды периодических минимальных поверхностей // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). 2025. Т. 25. № 1. С. 23–31. URL: <https://www.vestnik-donstu.ru/jour/article/view/2345> (дата обращения: 09.12.2025). DOI: 10.23947/2687-1653-2025-25-1-23-31.
15. Goruleva L.S., Obabkov I.I., Prosviryakov E.Yu. Exact Solutions to the Oberbeck–boussinesq Equations for Convective Stokes Flows // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. 2024. Is. 2. P. 36–49. URL: [http://dream-journal.org/issues/2024-2/2024-2\\_437.html](http://dream-journal.org/issues/2024-2/2024-2_437.html) (дата обращения: 09.12.2025). DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2.036-049.

**Конфликт интересов:** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Conflict of interest:** The authors declare that there is no conflict of interest.

**Финансирование:** Финансовая поддержка осуществлена Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSSE-2025-0006) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета (создание новых молодежных лабораторий).

**Financing:** Financial support was provided by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. FSSE-2025-0006) as part of the state task of the Samara State Technical University (creation of new youth laboratories).