

УДК 519.6  
DOI 10.17513/snt.40111

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРУППОВОЙ ЗАДЕРЖКИ СИГНАЛА В ВОЗМУЩЕННОМ КАНАЛЕ С КОНЕЧНОЙ КРИВИЗНОЙ

<sup>1</sup>Ким Д.Б., <sup>2</sup>Афанасьев Н.Т., <sup>2</sup>Лукьянцев Д.С., <sup>1</sup>Ситов И.С., <sup>2</sup>Танаев А.Б.

<sup>1</sup>ФГБОУ ВО «Братский государственный университет», Братск,  
e-mail: kdech@yandex.ru;

<sup>2</sup>ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет», Иркутск,  
e-mail: spacemaklay@gmail.com

Целью данной работы является создание оперативной численной схемы расчета групповой задержки сигнала в возмущенном диэлектрическом канале с конечной кривизной. В качестве опорного математического аппарата используются нелинейные дифференциальные уравнения геометрической оптики в форме Эйлера, полученные из принципа Ферма. Интеграл по траектории для групповой задержки сигнала сведен к дифференциальному уравнению первого порядка и включен в опорную систему лучевых уравнений. Численное интегрирование расширенной системы уравнений с краевыми условиями Коши и Дирихле выполняется с применением функции `odeint` (библиотека `scipy`) на языке программирования Python. В основу функции положен классический численный метод интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений Рунге–Кутты 4-го порядка. Тестирование численной схемы расчета групповой задержки сигнала проведено путем сравнения численного и аналитического решения, полученного для простой модели диэлектрической проницаемости канала. Результаты сравнения показали высокую точность вычислений. Рассмотрены различные типы каналов просвечивания окружающей среды. Приведены результаты численного моделирования групповых задержек сигналов в каналах просвечивания земной и солнечной атмосферы. Сделана оценка частотного диапазона электромагнитных волн, когда в расчетах групповой задержки сигнала, связанного только с воздействием гравитационного поля Солнца (эффект Шапиро), можно пренебречь эффектами воздействия окружающей плазмы.

**Ключевые слова:** информационный канал, групповая задержка, дифференциальные уравнения, сигнал, математическое моделирование, аналитические расчеты

*Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проекты FZZE-2023-0004, FZZE-2024-0005).*

## MATHEMATICAL MODELING OF SIGNAL'S GROUP DELAY IN DISTURBED CHANNEL WITH FINITE CURVATURE

<sup>1</sup>Kim D.B., <sup>2</sup>Afanasiev N.T., <sup>2</sup>Lukyantsev D.S., <sup>1</sup>Sitov I.S., <sup>2</sup>Tanaev A.B.

<sup>1</sup>Bratsk State University, Bratsk, e-mail: kdech@yandex.ru;

<sup>2</sup>Irkutsk State University, Irkutsk, e-mail: spacemaklay@gmail.com

The goal of this work is to create an operational numerical scheme for calculating the group delay of a signal in a perturbed dielectric channel with finite curvature. Non-linear differential equations of geometric optics in the Euler's form obtained from the Fermat's principle are used as reference mathematical tool. Integral along trajectory for signal's group delay is reduced by the 1st order differential equation and added in reference system of light equations. Numerical integration of advanced system of equations with the Cauchy's and Dirichlet's boundary conditions is performed with help function `odeint` (library `scipy`) on programming language Python. Classical numerical method of integration of system of ordinary differential equations 4th order Runge-Kutta is taken as a basis of the function. Testing of the numerical scheme of calculation of group delay of signal is performed by comparison of numerical and analytical solutions obtained for simple model of channel's dielectric constant. Results of comparison showed high accuracy of calculation. Various channel's type of translucency of environmental medium are considered. Results of numerical modeling of signal's group delays in channels of translucency of Earth's and Sun's atmospheres are presented. Evaluation of frequency's range of electromagnetic waves is performed for case when we can neglect effects of impact of surrounding plasma at calculation of signal's group delay caused only influence of Sun's gravitation field (Shapiro's effect).

**Keywords:** informational channel, group delay, differential equations, signal, mathematical modeling, analytical calculations

*The work was carried out with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (projects FZZE-2023-0004, FZZE-2024-0005).*

### Введение

Для оценки оптимальных условий прохождения сигналов в информационных каналах различного назначения важен про-

гноз степени воздействия возмущающих факторов канала на характеристики сигнала [1–3]. В то же время измерения вариаций характеристик сигнала, вызванных возмуще-

ниями канала, можно использовать для контроля и идентификации возмущающих факторов. Среди множества измеряемых характеристик принятого сигнала его групповая задержка содержит важную интегральную информацию о состоянии канала. Поэтому представляет значительный практический интерес разработка оперативных методов и алгоритмов расчета групповой задержки сигнала в каналах, наиболее приближенных к реальным. Для оценки групповой задержки сигнала в ряде случаев используется упрощенная модель канала с бесконечной кривизной, однако такая модель не всегда соответствует геометрии задачи. В работе [4] была предложена численная схема расчета направления распространения и рефракционного ослабления потока энергии сигнала в возмущенном информационном канале с конечной кривизной. В настоящей работе эта схема развита и использована для расчета групповых задержек сигналов в каналах просвечивания космической среды.

**Цель исследования** заключается в создании оперативной численной схемы расчета групповой задержки сигнала в возмущенном диэлектрическом канале с конечной кривизной.

*Основные математические соотношения*

Для расчета групповой задержки сигнала при распространении в канале с регулярными возмущениями диэлектрической проницаемости в качестве опорного математического аппарата использовались нелинейные дифференциальные уравнения геометрической оптики в форме Эйлера, полученные из принципа Ферма [5, с. 21]. С учетом конечной кривизны канала в полярной системе координат имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\varphi} &= R \operatorname{ctg}\beta; \\ \frac{d\beta}{d\varphi} &= \frac{1}{2\varepsilon} \left( \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi} \operatorname{ctg}\beta - R \frac{\partial\varepsilon}{\partial R} \right) - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $R(\varphi)$ ,  $\varphi$  – радиальная и угловая координаты луча;  $\beta(\varphi)$  – угол рефракции луча,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость канала. В приближении геометрической оптики групповая задержка сигнала определяется как интеграл по траектории:

$$\tau = \frac{1}{c} \int \frac{dS^{(S)}}{\sqrt{\varepsilon(S)}}, \quad (2)$$

где  $c$  – скорость света;  $dS$  – элемент дуги.

Непосредственный численный расчет интеграла (2) с использованием широко

известных квадратурных формул Ньютона–Котеса, Гаусса и иных [6, с. 86] требует значительных временных затрат, поскольку для пошагового вычисления подынтегральной функции  $\varepsilon(S)$  в (2) необходимо многократное численное интегрирование системы уравнений (1). Однако сведение интеграла (2) к дифференциальному уравнению первого порядка позволяет сделать численную схему расчета групповой задержки более оперативной. Дифференцируя (2) по переменному верхнему пределу, имеем:

$$\frac{d\tau}{dS} = \frac{1}{c\sqrt{\varepsilon}}. \quad (3)$$

Представляя элемент дуги  $dS$  в полярной системе координат, уравнение для групповой задержки сигнала запишем в виде:

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \frac{R}{c\sqrt{\varepsilon} \sin\beta}. \quad (4)$$

Объединяя формулы (1) и (4), имеем систему дифференциальных уравнений для одновременного расчета траекторных характеристик и групповой задержки сигнала в канале с конечной кривизной:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\varphi} &= R \operatorname{ctg}\beta; \\ \frac{d\beta}{d\varphi} &= \frac{1}{2\varepsilon} \left( \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi} \operatorname{ctg}\beta - R \frac{\partial\varepsilon}{\partial R} \right) - 1; \\ \frac{d\tau}{d\varphi} &= \frac{R}{c\sqrt{\varepsilon} \sin\beta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Следует заметить, что временные затраты, необходимые для вычисления групповой задержки сигнала с помощью системы (5), значительно меньше, чем в случае непосредственного вычисления (2), когда требуется предварительный расчет системы уравнений (1) на каждом шаге интегрирования. Выигрыш во времени расчета  $\tau$  с использованием численной схемы на основе (5) составляет  $\approx m\Delta t$ , где  $\Delta t$  – время расчета системы (1) для определения подынтегральной функции на одном шаге при непосредственном численном расчете интеграла (2);  $m$  – количество шагов.

Моделирование групповой задержки сигнала в канале с регулярными возмущениями диэлектрической проницаемости проводилось на основе системы (5) для краевых задач Коши и Дирихле. Численные расчеты (5) выполнялись с использованием функции `odeint` (библиотека `scipy`) на языке программирования Python. В основу функ-

ции положен классический численный метод интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений Рунге–Кутта 4-го порядка.

*Тестирование алгоритма расчета*

Для правильной физической интерпретации результатов моделирования групповой задержки сигналов в каналах различного назначения требуется тестирование предложенной вычислительной схемы. С этой целью было получено аналитическое решение системы (5) для простой слоистой модели диэлектрической проницаемости канала. Переходя в (5) от независимой переменной  $\varphi$  к переменной  $R$ , для расчета групповой задержки имеем:

$$\frac{d\tau}{dR} = \frac{1}{c\sqrt{\varepsilon} \cos \beta}. \quad (6)$$

При замене в (6) переменной

$$R = R_{Earth} + z,$$

где  $R_{Earth}$  – радиус кривизны канала, и выполняя предельный переход  $R_{Earth} \rightarrow \infty$ , уравнение (6) преобразуется к виду:

$$d\tau = \frac{dz}{c\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \beta_n}}, \quad (7)$$

где  $\beta_n$  – начальный угол излучения, и учтен закон Снеллиуса [5, с. 126]:

$$\varepsilon \sin^2 \beta = \sin^2 \beta_n. \quad (8)$$

В качестве модели диэлектрической проницаемости канала используем зависимость:

$$\varepsilon(z) = 1 - \left(\frac{f_{cr}}{f}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{z - z_m}{y_m}\right)^2\right), \quad (9)$$

где  $f_{cr}$  – критическая частота;  $z_m$  – высота минимума диэлектрической проницаемости;  $y_m = z_m - z_n$  – полутолщина канала;  $z_n$  – координата входа сигнала в канал. Интегрируя уравнение (7) с учетом (9), для групповой задержки сигнала получаем:

$$\tau(z) = -\frac{M}{c} \ln \left| \frac{\sqrt{(z_m - z)^2 + p^2} + (z_m - z)}{\sqrt{y_m^2 + p^2} + y_m} \right|, \quad (10)$$

где

$$M = y_m (f / f_{cr});$$

$$p = y_m \sqrt{(f / f_{cr})^2 \cos^2 \beta_n - 1}.$$

Решение (10) было использовано для проверки предложенной численной схемы расчета на основе системы (5).

Задавались следующие начальные условия:  $R(\varphi = 0) = R_n = R_{Earth}$ ;  $\beta(\varphi = 0) = \beta_n$ , значения прицельного углового параметра  $\beta_n$  находились в секторе  $[0.15; 1.05]rad$ , высота минимума диэлектрической проницаемости  $R = (R_{Earth} + 350)$  км, критическая частота  $f_{cr}^m = 9$  МГц. Результаты моделирования групповой задержки сигнала при двух значениях прицельного параметра  $\beta_n$  представлены на рисунке 1.

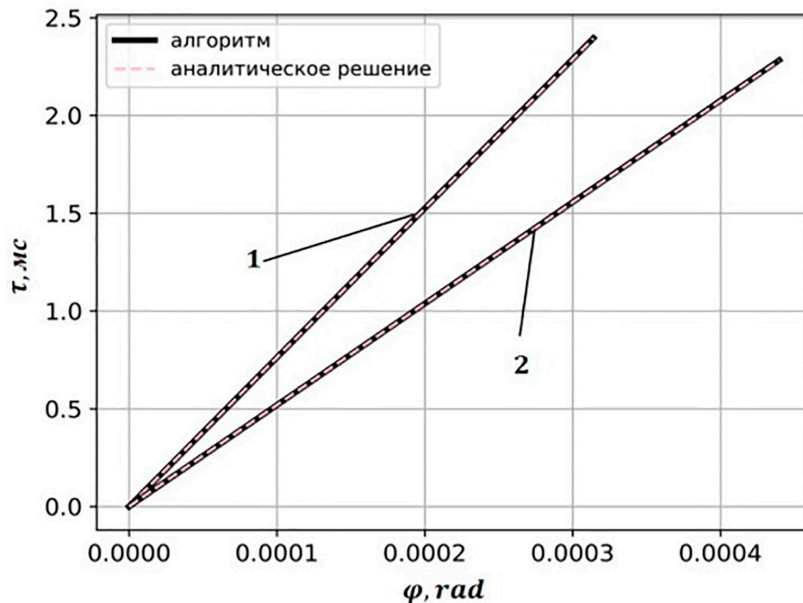


Рис. 1. Сравнение численных и аналитических расчетов групповой задержки сигнала  $\tau(\varphi)$  при различных значениях прицельного параметра  $\beta_n$ : 0.314rad (1) и 0.473rad (2)

Нетрудно заметить высокую точность совпадения численных и аналитических расчетов. Порядок расхождения кривых составил в среднем 2 мкс. Такие малые отличия позволяют заключить, что предложенная численная схема расчета достаточно надежна и может быть использована для оценки групповой задержки сигналов в каналах с конечной кривизной.

### Численные эксперименты

Для демонстрации численной схемы расчета групповой задержки сигнала в возмущенном канале были поставлены численные эксперименты. Рассматривались каналы просвечивания земной и солнечной атмосферы.

Модель диэлектрической проницаемости верхней атмосферы (ионосферы) в присутствии волнового возмущения задана в виде:

$$\varepsilon = 1 - \left( \frac{f_{cr}}{f} \right)^2 \exp \left[ - \left( \frac{R - R_L}{a_R} \right)^2 \right] \left( 1 + \chi \sin \left( \frac{2\pi}{\eta_R} (R - R_L) \right) \right), \quad (11)$$

где  $R_L$  – радиальная координата максимума ионосферной ионизации;  $a_R$  – полутолщина ионосферного слоя;  $\chi$ ,  $\eta_R$  – интенсивность и длина волны возмущения соответственно. Расчеты на основе системы (5) с краевыми условиями Дирихле позволяют оперативно оценить степень воздействия волнового возмущения на состояние трансионосферного канала в режиме многочастотной передачи с космического аппарата.

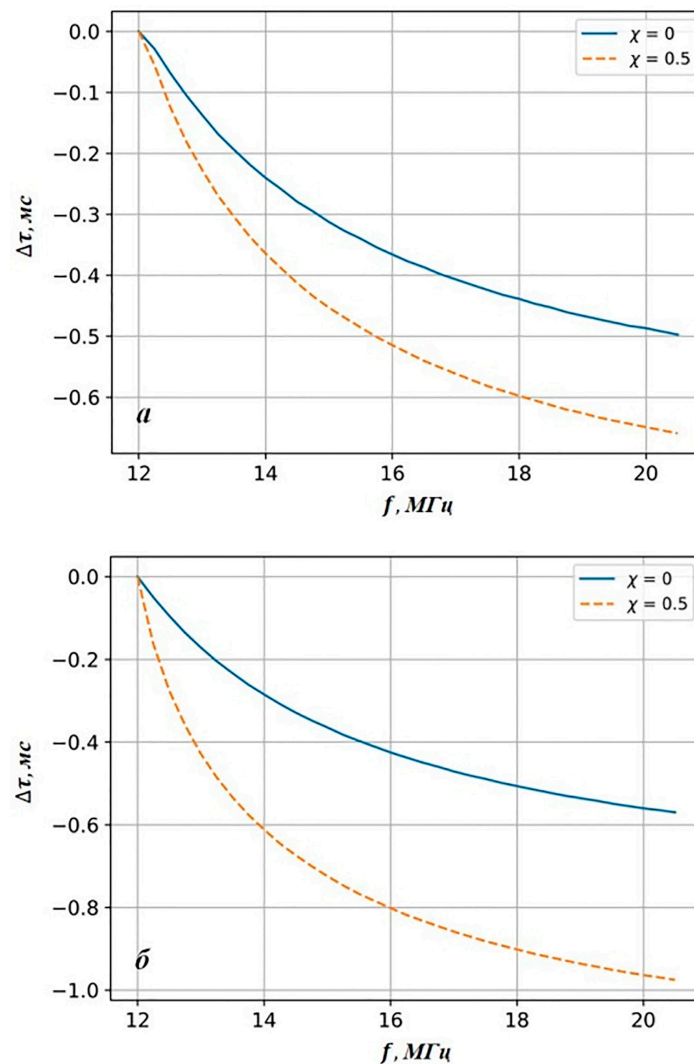


Рис. 2. Относительные групповые задержки сигналов на различных частотах:  
 $a - \varphi_k = 0.031 \text{ rad}$ ;  $b - \varphi_k = 0.053 \text{ rad}$   
 $f [12; 20] \text{ МГц}$ ;  $f_{cr} = 9 \text{ МГц}$ ;  $R_L = 6721 \text{ км}$ ;  $a_R = 290 \text{ км}$ ;  $\eta_R = 50 \text{ км}$

В качестве примера на рисунке 2 приведены рассчитанные зависимости разностей групповых задержек сигналов на различных рабочих частотах и групповой задержки сигнала на опорной частоте для двух разнесенных приемников, расположенных на Земле.

Далее рассматривался канал просвечивания околосолнечной плазмы радиоизлучением залимбаового коронального источника в присутствии коронального выброса массы (КВМ) [4, 7]. Задавалась модель диэлектрической проницаемости возмущенного околосолнечного канала в виде:

$$\varepsilon = 1 - \left( \frac{f_{pl}}{f} \right)^2 \left( \frac{R_m}{R} \right)^2 \left[ 1 - \mu \exp \left[ - \left( \frac{R - R_L}{a_R} \right)^2 - \left( \frac{\phi - \phi_L}{a_\phi} \right)^2 \right] \right]; \quad (12)$$

где  $f_{pl}$  – плазменная частота на некотором расстоянии  $R = 5R_s$  от центра Солнца;  $R_s$  – радиус Солнца;  $\mu$  – безразмерный параметр полости КВМ;  $R_m$ ,  $\phi_L$  – радиальная и угловая координаты центра КВМ;  $a_R$ ,  $a_\phi$  – радиальный и угловой масштабы коронального возмущения соответственно. На рисунке 3 представлены рассчитанные на основе (5) относительные групповые задержки сигналов на различных рабочих частотах для двух разнесенных приемников, расположенных на орбите Земли.

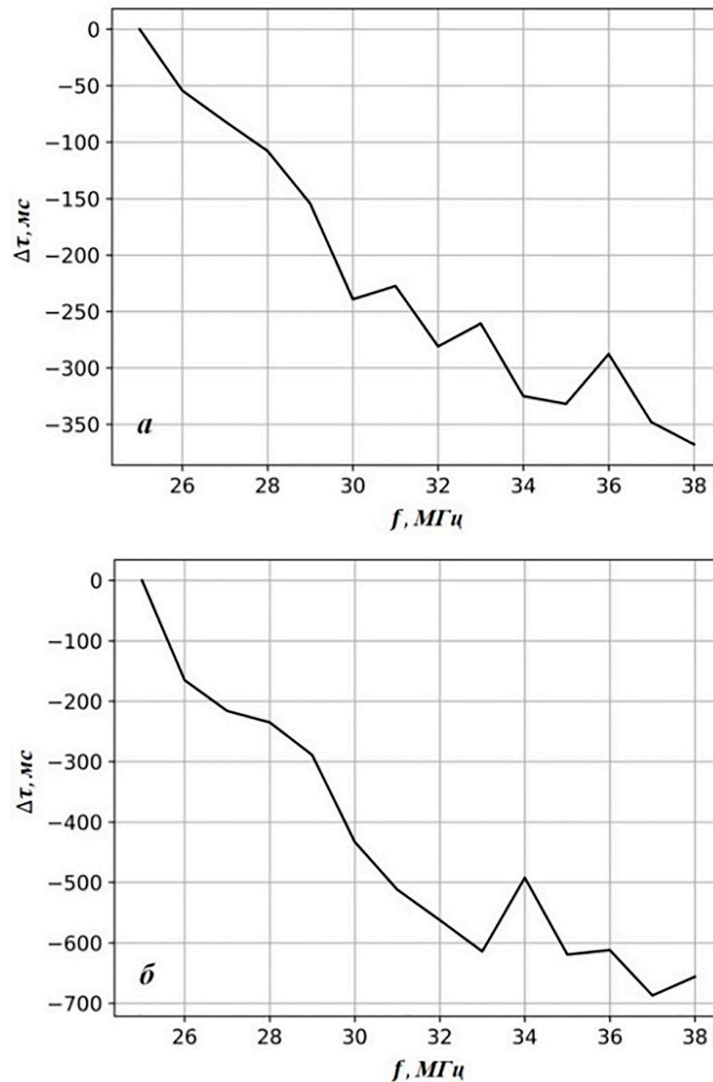


Рис. 3. Частотно-временные характеристики радиовсплесков при различных положениях приемной антенны: а –  $\varphi_k = 2.74 \text{ rad}$ ; б –  $\varphi_k = 2.84 \text{ rad}$   
 $f [25;39] \text{ МГц}$ ;  $f_{pl} = 19 \text{ МГц}$ ;  $\mu = 1.7$ ;  $R_L = 5 R_s$ ;  $\phi_L = 0.4 \text{ rad}$ ;  $a_R = 0.15 R_s$ ;  $a_\phi = 0.63 \text{ rad}$



В частности, из рисунка 3б следует, что при расположении источника коронального радиовсплеска в более глубокой залимбовой области разность групповых задержек между соседними частотами значительно возрастает. Этот рост вызван увеличением времени распространения сигнала через полость КВМ вследствие волноводного механизма распространения [4]. Следует заметить, что для диагностики параметров КВМ по измеренным групповым задержкам принятых радиовсплесков частотный диапазон излучения [25;33] МГц является важным, поскольку на частотах, больших 33 МГц, относительные групповые задержки стремятся к постоянному значению и становятся неинформативными.

Универсальность предложенной численной схемы расчета групповой задержки сигнала позволяет решать и более сложные задачи. В частности, был поставлен численный эксперимент для оценки задержки сигнала в гравитационном поле массивного объекта с учетом окружающей его плазмы. Одним из следствий общей теории относительности (ОТО) является замедление времени распространения электромагнитного сигнала под воздействием поля тяготения астрофизического объекта (эффект Шапиро) [8, с. 172]. Окружающая плазма также влияет на процесс распространения, в особенности на сигналы радиодиапазона. Более высокочастотные диапазоны электромагнитной шкалы в меньшей степени подвержены влиянию плазмы, что приводит к более явному проявлению эффектов гра-

витационного линзирования. В качестве примера рассматривалась задача распространения электромагнитного излучения вблизи Солнца. Для оценки групповой задержки сигнала в околосолнечной среде использовалась модель диэлектрической проницаемости в виде:

$$\varepsilon = 1 + \frac{2R_g}{R} - \left(\frac{f_{pl}}{f}\right)^2 \left(\frac{R_m}{R}\right)^2, \quad (13)$$

где  $R$  – гравитационный радиус Солнца ( $R_g \approx 3$  км). Источник излучения и приемная антенна находились на земной орбите с радиусом 1 а.е. ( $\approx 1.5 \cdot 10^8$  км). Параметры невозмущенной околосолнечной плазмы были взяты те же самые, что и в предыдущем численном эксперименте. На рисунке 4 представлены рассчитанные на основе (5) дистанционно-временные характеристики сигналов просвечивания Солнца на различных рабочих частотах. По оси абсцисс отложены конечные значения угловых координат лучей, пришедших на земную орбиту, а по оси ординат – разности групповых задержек сигналов в среде (13) и в вакууме ( $\varepsilon = 1$ ). Расчеты выполнены с учетом крайних условий Дирихле.

Из рисунка 4 следует, что кривая 3, рассчитанная для высокочастотного сигнала, отображает главным образом эффект гравитационного воздействия Солнца в широком диапазоне координат приемника на орбите Земли. Однако влияние плазмы в этом случае слабо выражено вследствие ее прозрачности.

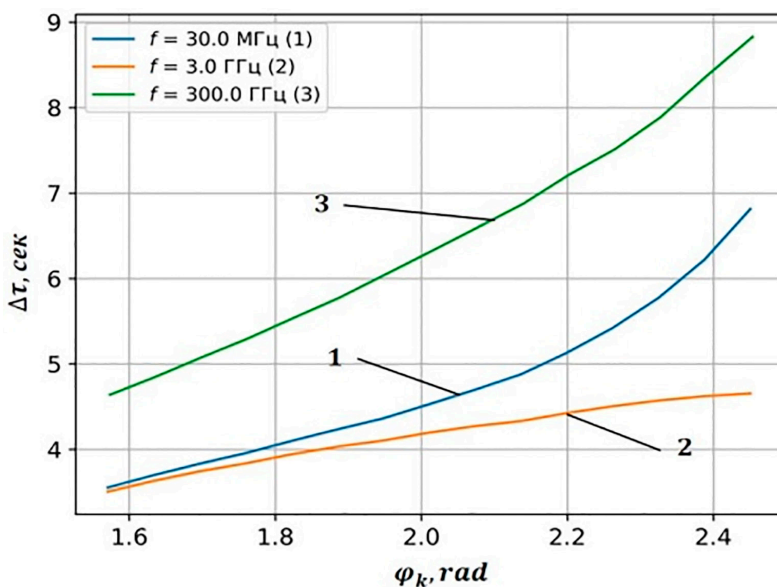


Рис. 4. Дистанционно-временные характеристики сигналов просвечивания Солнца на различных рабочих частотах:  $R_g = 3$  км;  $\beta n [-0.76; -0.32]$  рад;  $f_{pl} = 15$  МГц;  $R_m = 5 R_s$

Кривая 1 соответствует процессу распространения низкочастотного сигнала, когда эффекты плазмы становятся определяющими по сравнению с воздействием поля тяготения Солнца. В поведении кривой 2 прослеживается эффект частичной компенсации воздействия плазмы и гравитационного поля на распространение электромагнитного сигнала промежуточных рабочих частот. Таким образом, численное моделирование на основе (5) позволяет оценить частотный диапазон электромагнитных волн, когда при интерпретации результатов измерений групповой задержки сигнала, связанной с воздействием поля тяготения астрофизического объекта, можно пренебречь эффектами влияния окружающей плазмы.

### Заключение

Предложена оперативная численная схема расчета групповой задержки сигнала в диэлектрическом канале конечной кривизны. Интеграл по траектории для групповой задержки сигнала вычисляется совместно с опорной системой дифференциальных уравнений в форме Эйлера, полученных из принципа Ферма. Численное интегрирование расширенной системы уравнений с краевыми условиями Коши и Дирихле выполняется с применением функции `odeint` (библиотека `scipy`) на языке программиро-

вания Python. Проведено тестирование численной схемы расчета групповой задержки сигнала. Приведены примеры моделирования групповых задержек сигналов в возмущенных каналах просвечивания земной и солнечной атмосферы.

### Список литературы

1. Алешин В.С., Догаев С.Г. Задержки распространения сигналов в сетях спутниковой связи // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2019. Т. 13, № 5. С. 4-11.
2. Борисова Т.Д., Благовещенская Н.Ф., Калишин А.С. Прогнозирование условий распространения декаметровых радиоволн в арктическом регионе // Проблемы Арктики и Антарктики. 2017. № 3 (113). С. 78-86.
3. Ким Д.Б., Афанасьев Н.Т., Танаев А.Б., Чудаев С.О. Экспресс-диагностика характеристик сигнала в условиях неопределенности параметров канала связи // Современные наукоемкие технологии. 2023. № 8. С. 33-38. DOI: 10.17513/snt.39727.
4. Ким Д.Б., Афанасьев Н.Т., Лукьянцев Д.С., Ситов И.С., Танаев А.Б., Чудаев С.О. Рефракционные искажения характеристик сигнала в возмущенном информационном канале с конечной кривизной // Современные наукоемкие технологии. 2023. № 12 (2). С. 203-209. DOI: 10.17513/snt.39882.
5. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.Г. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Лаборатория знаний, 2020. 636 с.
7. Stanislavsky A.A., Konovalenko A.A., Koval A.A., Volvach Y.E., Zarka Ph. CME and frequency cutoff of solar bursts // Sun and Geosphere. 2016. Vol. 11, Is. 2. P. 91-95.
8. Алексеев С.О., Памятных Е.А., Урсулов А.В., Третьякова Д.А., Ранну К.А. Введение в общую теорию относительности, ее современное развитие и приложения. Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2015. 382 с.