

УДК 620.9:534.1

DOI 10.17513/snt.40108

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО БАЛАНСА К НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ ВИБРАЦИИ

¹Бадекин М.Ю., ²Ивахненко Н.Н.

¹ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», Донецк, e-mail: korund2002@list.ru;

²ФГБОУ ВО «Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева», Москва, e-mail: ivakhnenko_nn@rgau-msha.ru

С целью изучения возможности применения метода энергетического баланса к приближенному решению нелинейных уравнений вибрации и оценке эффективности по сравнению с методом Рунге – Кутты 4-го порядка в работе рассмотрены две колебательные системы, которые, как известно, описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. В рамках проводимого исследования к данным дифференциальным уравнениям были применены два метода: метод энергетического баланса и метод Рунге – Кутты 4-го порядка. Результаты расчетов, полученные двумя методами, точны и близки друг к другу, что подтверждает эффективность метода энергетического баланса по сравнению с другими методами. Таким образом, метод энергетического баланса является мощным математическим инструментом, который может быть легко распространен на любое нелинейное уравнение. Точность и эффективность метода продемонстрированы на примере решения уравнений. Даже низшие порядки приближений имеют высокую точность, что иллюстрирует эффективность метода по сравнению с другими. Кроме того, метод энергетического баланса позволяет анализировать сложные динамические системы, которые невозможно или трудно исследовать другими методами. Рассматриваемый метод может быть использован для разработки новых технологий, оптимизации существующих процессов и повышения эффективности работы оборудования. В целом метод энергетического баланса представляет собой мощный инструмент для исследования нелинейных систем, который может найти применение в различных областях науки и техники.

Ключевые слова: метод энергетического баланса, нелинейные колебания, периодические решения

APPLICATION OF THE ENERGY BALANCE METHOD TO NONLINEAR VIBRATION EQUATIONS

¹Badekin M.Yu., ²Ivakhnenko N.N.

¹Donetsk State University, Donetsk, e-mail: korund2002@list.ru;

²Russian State Agrarian University – Moscow Agricultural Academy named after K.A. Timiryazev, Moscow, e-mail: ivakhnenko_nn@rgau-msha.ru

To study the possibility of applying the energy balance method to the approximate solution of nonlinear vibration equations and evaluating the efficiency compared to the Runge-Kutta method of the 4th order, two oscillatory systems, which are known to be described by nonlinear differential equations, are considered in the paper. In the framework of the ongoing research, two methods were applied to these differential equations. The energy balance method and the Runge-Kutta method of the fourth order. The calculation results obtained by the two methods are accurate and close to each other, which confirms the effectiveness of the energy balance method compared to other methods. Thus, the energy balance method is a powerful mathematical tool that can be easily extended to any nonlinear equation. The accuracy and efficiency of the method are demonstrated on the example of solving equations. Even lower orders of approximation have high accuracy, which illustrates the effectiveness of the method compared to others. In addition, the energy balance method makes it possible to analyze complex dynamic systems that are impossible or difficult to study by other methods. The considered method can be used to develop new technologies, optimize existing processes, and improve the efficiency of equipment. In general, the energy balance method is a powerful tool for the study of nonlinear systems, which can be used in various fields of science and technology.

Keywords: energy balance method, nonlinear oscillations, periodic solutions

Введение

В работе рассматривали общие нелинейные осцилляторы [1–3]:

$$u'' + \omega_0^2 u + \varepsilon f(u) = 0, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(0) = A, \quad u'(0) = 0, \quad (2)$$

Здесь f – нелинейная функция от u'' , u' и u . Ограничимся простейшим случаем, ког-

да f зависит только от функции u . Если в задаче Коши, сформулированной уравнениями (1) и (2), отсутствует малый параметр, то в данном случае традиционные методы теории возмущений напрямую применяться не могут. Кроме того, методы возмущений могут привести к потере точности решения из-за необходимости работы с приближенными выражениями. В последнее время большое внимание уделяется анализу нелинейных уравнений без малых параметров.

С целью преодоления описанного выше ограничения разработано множество новых методов. Среди них вариационные методы [4, 5] и метод гомотопического возмущения [6].

Более детальную информацию по упомянутым выше методам можно найти в работах [7, 8]. Также следует отметить работу [9], в которой для линеаризованной системы применен принцип максимума Понтрягина. В методе же энергетического баланса применяется вариационный принцип нелинейных колебаний. В работе [10] показано, что даже аппроксимации низшего порядка обеспечивают высокую точность.

Целью исследования является изучение возможности применения метода энергетического баланса к приближенному решению нелинейных уравнений вибраций и оценке эффективности данного метода по сравнению с методом Рунге – Кутты 4-го порядка.

Материалы и методы исследования

В работе рассматривается общий нелинейный осциллятор вида [4, 5]:

$$u'' + f(u(t)) = 0, \tag{3}$$

поскольку u и t – обобщенные безразмерные переменные смещения и времени.

$$R(t) = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 \sin^2 \omega t + F(A \cos \omega t) - F(A) = 0. \tag{9}$$

Если бы случайно в качестве пробной функции было выбрано точное решение, то можно было бы сделать R равным нулю для всех значений t путем соответствующего выбора x . Поскольку (7) является лишь приближением к точному решению, R нельзя везде обнулить. Используя $\omega t = \pi/4$, получим

$$\omega = \sqrt{\frac{2(F(A) - F(A \cos \omega t))}{A^2 \sin^2 \omega t}}, \tag{10}$$

где $T = 2\pi/\omega$ – период нелинейного осциллятора. Его период можно записать в виде

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2(F(A) - F(A \cos \omega t))}{A^2 \sin^2 \omega t}}}. \tag{11}$$

Результаты исследования и их обсуждение

Для оценки точности метода энергетического баланса, рассмотрим примеры.

Пример 1.

Известно, что свободные колебания автономного консервативного осциллятора с инерционным и статическим типом нелинейностей 5-го порядка описываются уравнением

$$\ddot{u} + \lambda u + \varepsilon_1 u \dot{u}^2 + \varepsilon_2 u^4 \ddot{u} + 2\varepsilon_2 u^3 \dot{u}^2 + \varepsilon_3 u^3 + \varepsilon_4 u^5 = 0, \quad u(0) = A, \quad \dot{u}(0) = 0. \tag{12}$$

Предполагается, что движение начинается из положения максимального перемещения с нулевой начальной скоростью; λ – целое число, принимающее значения 1, 0, -1; а ε_1 ; ε_2 ; ε_3 и ε_4 – положительные параметры, связанные с режимами расчета (таблица).

Вариационный принцип легко получить следующим образом:

$$J(u) = \int_0^t \left(-\frac{1}{2} u'^2 + F(u) \right) dt, \tag{4}$$

где $F(u) = \int f(u) du$.

Он является гамильтоновым, поэтому его можно записать в виде

$$H = \frac{1}{2} u'^2 + F(u) = F(A). \tag{5}$$

или

$$R(r) = \frac{1}{2} u'^2 + F(u) - F(A) = 0. \tag{6}$$

Колебательные системы содержат два важных физических параметра: частоту ω и амплитуду колебаний A . Рассмотрим начальные условия:

$$u(0) = A, \quad u'(0) = 0. \tag{7}$$

В первом приближении смещение будем искать в следующем виде:

$$u(t) = A \cos \omega t. \tag{8}$$

Подставив уравнение (8) в уравнение (6), получим

Значения безразмерных параметров ε_i в уравнении (12)

Режим	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
1	0,326744	0,129456	0,232555	0,087553
2	1,642078	0,913067	0,313656	0,204765
3	4,051875	1,665565	0,281222	0,149667

Численное решение (методом Рунге – Кутты 4-го порядка) нелинейного уравнения имеет вид

$$\dot{u}_1 = u_2, \quad u_1(0) = A, \quad (13)$$

$$\dot{u}_2 = -\frac{1}{1 + \varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_1^4} (\lambda u_1 + \varepsilon_1 u_1 u_2^2 + 2\varepsilon_2 u_1^3 u_2^2 + \varepsilon_3 u_1^3 + \varepsilon_4 u_1^5), \quad u_2(0) = 0. \quad (14)$$

Решение нелинейного уравнения методом энергетического баланса:

$$\ddot{u} + \lambda u + \varepsilon_1 u^2 \dot{u} + \varepsilon_1 u \dot{u}^2 + \varepsilon_2 u^4 \dot{u} + 2\varepsilon_2 u^3 \dot{u}^2 + \varepsilon_3 u^3 + \varepsilon_4 u^5 = 0, \quad u(0) = A, \quad \dot{u}(0) = 0. \quad (15)$$

где u и t – обобщенные безразмерные переменные смещения и времени соответственно. Вариационный принцип описывается следующим уравнением:

$$J(u) = \int_0^t \left(-\frac{1}{2} \dot{u}^2 (1 + \varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2 u^4) + \frac{\lambda}{2} u^2 + \frac{\varepsilon_3}{4} u^4 + \frac{\varepsilon_4}{6} u^6 \right) dt. \quad (16)$$

Поэтому его гамильтониан можно записать в виде

$$H = \frac{1}{2} \dot{u}^2 (1 + \varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2 u^4) + \frac{\lambda}{2} u^2 + \frac{\varepsilon_3}{4} u^4 + \frac{\varepsilon_4}{6} u^6 = \frac{\lambda}{2} A^2 + \frac{\varepsilon_3}{4} A^4 + \frac{\varepsilon_4}{6} A^6 \quad (17)$$

или

$$R(t) = \frac{1}{2} \dot{u}^2 (1 + \varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2 u^4) + \frac{\lambda}{2} u^2 + \frac{\varepsilon_3}{4} u^4 + \frac{\varepsilon_4}{6} u^6 - \frac{\lambda}{2} A^2 - \frac{\varepsilon_3}{4} A^4 - \frac{\varepsilon_4}{6} A^6 = 0. \quad (18)$$

Колебательные системы содержат два важных физических параметра: частоту ω и амплитуду колебаний A . Итак, рассмотрим такие начальные условия:

$$u(0) = A, \quad \dot{u}(0) = 0. \quad (19)$$

Первоначальное приближение будем искать в следующем виде:

$$u(t) = A \cos \omega t. \quad (20)$$

Подставив уравнение (20) в уравнение (18), в результате получим

$$R(t) = \frac{1}{2} (-A \sin \omega t)^2 \left(1 + \varepsilon_1 (A \cos \omega t)^2 + \varepsilon_2 (A \cos \omega t)^4 \right) + \frac{\lambda}{2} (A \cos \omega t)^2 + \frac{\varepsilon_3}{4} (A \cos \omega t)^4 + \frac{\varepsilon_4}{6} (A \cos \omega t)^6 - \frac{\lambda}{2} A^2 - \frac{\varepsilon_3}{4} A^4 - \frac{\varepsilon_4}{6} A^6 = 0. \quad (21)$$

Что приводит к следующим результатам:

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{A \sin \omega t} \sqrt{\frac{\frac{\lambda}{2} (A^2 - (A \cos \omega t)^2) + \frac{\varepsilon_3}{4} (A^4 - (A \cos \omega t)^4) + \frac{\varepsilon_4}{6} (A^6 - (A \cos \omega t)^6)}{1 + \varepsilon_1 (A \cos \omega t)^2 + \varepsilon_2 (A \cos \omega t)^4}}. \quad (22)$$

Кроме того, сравнение этих методологий можно найти на рис. 1.

Если положить $\omega t = \pi/4$, то в результате получим

$$\omega_{EVM} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{12\lambda + 9\varepsilon_3 A^2 + 7\varepsilon_4 A^4}{4 + 2\varepsilon_1 A^2 + \varepsilon_2 A^4}}. \quad (23)$$

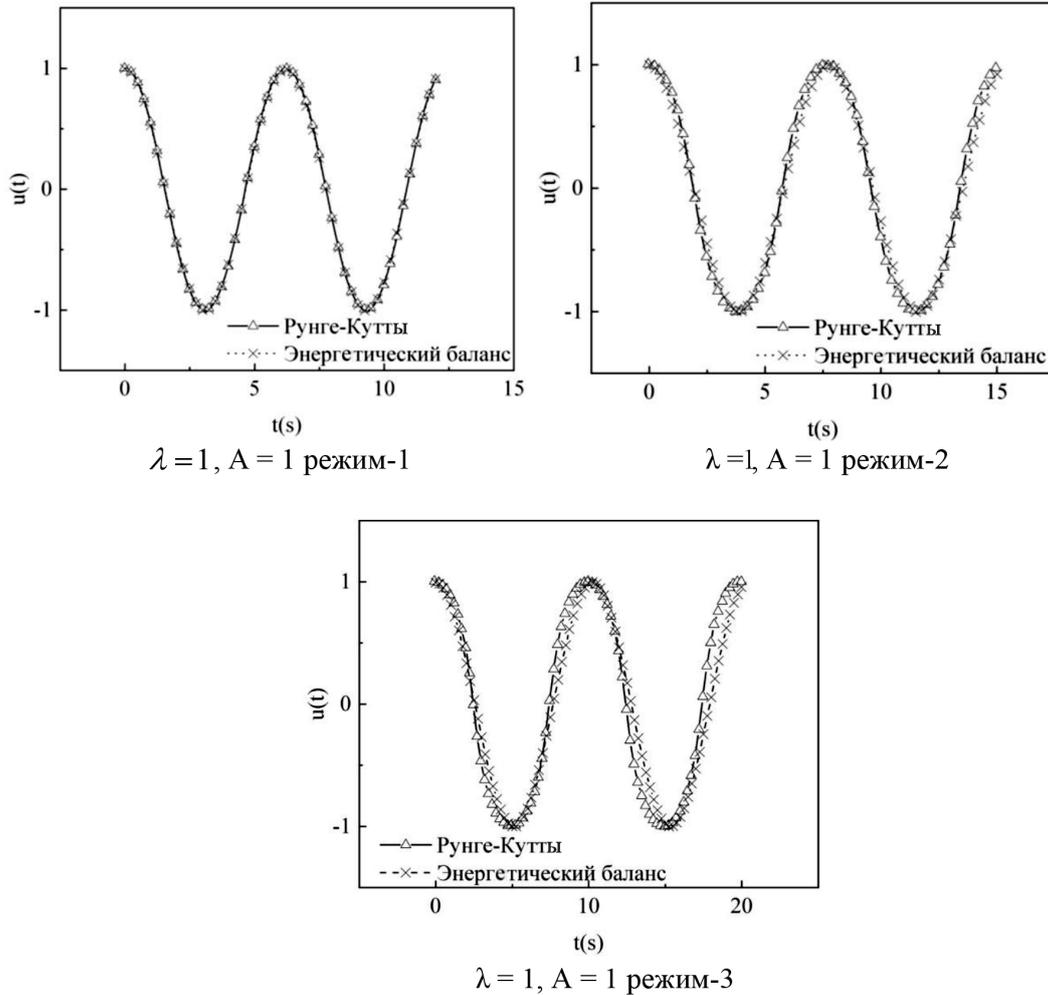


Рис. 1. Сравнение решения метода энергетического баланса и численного решения, решенного методом Рунге – Кутты 4-го порядка, сплошная линия – численное решение и пунктирная линия – решение энергетического баланса.

Подстановка уравнения (23) в уравнение (20) приводит к следующему результату:

$$u(t) = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{12\lambda + 9\varepsilon_3 A^2 + 7\varepsilon_4 A^4}{4 + 2\varepsilon_1 A^2 + \varepsilon_2 A^4}}. \quad (24)$$

Предполагается, что движение начинается из положения максимального перемещения с нулевой начальной скоростью.

Пример 2.

Рассмотрим уравнение движения маятника с гармонической точкой стрингера на рис. 2. Уравнение движения маятника с гармонической точкой стрингера:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} - \frac{\omega_0^2}{l} \cos \omega_0 t \right) \sin \theta = 0, \quad \theta(0) = A, \quad \dot{\theta}(0) = 0. \quad (25)$$

Это уравнение известно как система с коэффициентами, зависящими от времени.

Численное решение (методом Рунге – Кутты 4-го порядка) маятника с гармонической точкой стрингера:

$$\dot{\theta}_1 = \theta_2, \quad \theta_1(0) = A, \quad (26)$$

$$\dot{\theta}_2 = - \left(\frac{g}{l} - \frac{\omega_0^2 Y}{l} \cos \omega_0 t \right) \sin \theta_1, \quad \theta_2(0) = 0. \quad (27)$$

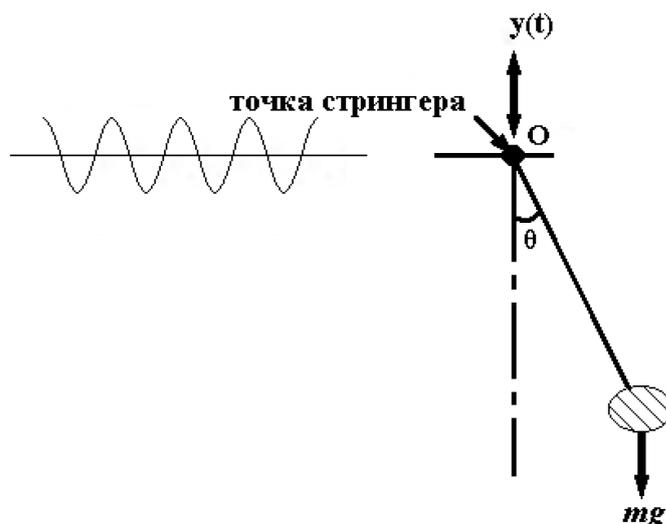


Рис. 2. Маятник с точкой гармонического стрингера: $y(t) = Y \cos \omega_0 t$

Решение уравнения маятника с гармонической точкой стрингера по методу энергетического баланса имеет вид

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{q}{l} - \frac{\omega_0^2 Y}{l} \cos \omega_0 t \right) \sin \theta, \quad \theta(0) = A, \quad \dot{\theta}(0) = 0. \quad (28)$$

В котором θ и t – обобщенные безразмерные перемещения и переменные времени соответственно. Его вариационный принцип легко получить как

$$J(\theta) = \int_0^t \left(-\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \left(\frac{q}{l} - \frac{\omega_0^2 Y}{l} \cos \omega_0 t \right) \cos \theta \right) dt. \quad (29)$$

Поэтому его гамильтониан можно записать в виде

$$H = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \left(\frac{q}{l} - \frac{\omega_0^2 Y}{l} \cos \omega_0 t \right) \cos \theta = - \left(\frac{q}{l} - \frac{\omega_0^2 Y}{l} \cos \omega_0 t \right) \cos A \quad (30)$$

или

$$R(t) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \left(\frac{q}{l} - \frac{\omega_0^2 Y}{l} \cos \omega_0 t \right) \cos \theta + \left(\frac{q}{l} - \frac{\omega_0^2 Y}{l} \cos \omega_0 t \right) \cos A = 0. \quad (31)$$

Рассмотрим начальные условия:

$$\theta(0) = A, \quad \dot{\theta}(0) = 0. \quad (32)$$

Предположим, что его первоначальное приближенное предположение можно выразить как

$$\theta(t) = A \cos \omega t. \quad (33)$$

Подставив уравнение (33) в уравнение (31), получим

$$R(t) = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \sin^2 \omega t - \left(\frac{g}{l} - \frac{\omega_0^2 Y}{l} \cos \omega_0 t \right) \cos(A \cos \omega t) + \left(\frac{g}{l} - \frac{\omega_0^2 Y}{l} \cos \omega_0 t \right) \cos A = 0 \quad (34)$$

Что приводит к следующему результату:

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{A \sin \omega t} \sqrt{\left(\frac{g}{l} - \frac{\omega_0^2 Y}{l} \cos \omega_0 t \right) (\cos(A \cos \omega t) - \cos A)}. \quad (35)$$

Примеры показывают, что даже низшие порядки приближений, полученные с помощью настоящей теории, имеют высокую точность 4-го порядка, можно сказать, что оба результата, полученные этими методами, точны и близки друг к другу. Эти примеры иллюстрируют эффективность метода энергетического баланса по сравнению с другими методами.

Список литературы

1. Luan V.T., Michels D.L. Efficient exponential time integration for simulating nonlinear coupled oscillators // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2021. Vol. 391. P. 113429. DOI: 10.1016/j.cam.2021.113429.
2. Тюрюкина Л.В. Параметрическое взаимодействие колебательных мод в присутствии квадратичной или кубической нелинейности // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2024. Т. 32, № 1. С. 11–30. DOI: 10.18500/0869-6632-003082.
3. Modi A., Faradonbeh M.K.S., Tewari A., Michailidis G. Joint learning of linear time-invariant dynamical systems // *Automatica*. 2024. Vol. 164. P. 111635. DOI: 10.1016/j.automatica.2024.111635.
4. Xu T., Liu D., Hao P., Wang B., Variational operator learning: A unified paradigm marrying training neural operators and solving partial differential equations // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2024. Vol. 190. P. 105714. DOI: 10.1016/j.jmps.2024.105714.
5. Torsu P. On variational iterative methods for semilinear problems // *Computers & Mathematics with Applications*. 2020. Vol. 80. № 5. P. 1164–1175. DOI: 10.1016/j.camwa.2020.06.008.
6. Qureshi S., Argyros I.K., Jafari H., Soomro A., Gdawiec K. A highly accurate family of stable and convergent numerical solvers based on Daftardar-Gejji and Jafari decomposition technique for systems of nonlinear equations // *MethodsX*. 2024. Vol. 13. P. 102865. DOI: 10.1016/j.mex.2024.102865.
7. Шаташвили А.Д., Фомина Т.А., Ивахненко Н.Н., Папазова Е.Н. О плотностях вероятностных мер, порожденных решениями нелинейных уравнений с неограниченными операторами и со случайным параметром, возмущенных гауссовскими процессами в гильбертовом пространстве // *Вестник Донецкого национального университета*. Серия А: Естественные науки. 2020. № 2. С. 104–124.
8. Шаташвили Т.А., Бадекин М.Ю., Ивахненко Н.Н., Коноплин Н.А. Прогноз параметра «Мутность» на выходе из песчаных фильтров, питаемых сточными водами // *Природообустройство*. 2023. № 5. С. 60–65. DOI: 10.26897/1997601120235-60-65.
9. Потапов А.П., Галяев А.А. Задача быстрогодействия по остановке двузвенного маятника на подвижном подвесе // *Дифференциальные уравнения и процессы управления*. Серия: Математика. 2023. № 2. С. 54–85. DOI: 10.21638/11701/spbu35.2023.204.
10. Karaağaçlı T., Çelik F.K., Modal analysis of non-conservative systems with friction-induced strong nonlinear damping by using response-controlled testing // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2024. Vol. 221. P. 111718. DOI: 10.1016/j.ymsp.2024.111718.