

УДК 621.833.51  
DOI 10.17513/snt.40105

## ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ПОЛОЖЕНИЯ ДВУХРЯДНОГО ПЛАНЕТАРНОГО МЕХАНИЗМА ВНУТРЕННЕГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ШЕСТЕРНЯМИ НА САТЕЛЛИТЕ

Приходько А.А., Поливода Н.А., Щетинин М.М.

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», Краснодар,  
e-mail: sannic92@gmail.com

Механизмы с некруглыми зубчатыми колесами вызывают интерес изобретателей и инженеров вследствие высокой компактности таких механизмов, а также реализации широкого спектра передаточных функций. В последние годы значительно увеличилось количество работ в данном направлении благодаря развитию систем компьютерного моделирования и снижению стоимости изготовления некруглых зубчатых колес. Целью работы является математическое моделирование кинематики планетарной передачи внутреннего зацепления с эллиптическими зубчатыми колесами, позволяющей реализовать возвратно-вращательное движение выходного вала. Построена кинематическая модель механизма с помощью плана скоростей его звеньев, определен закон движения в виде аналога скорости и функции положения выходного звена. Разработан экспериментальный стенд предлагаемой планетарной передачи, на базе которого исследованы три варианта механизма с различными кинематическими параметрами. Построена функция положения с помощью измерения углов поворота входного и выходного валов механизма, что позволило провести валидацию кинематической модели механизма. Статистический анализ ошибок измерения показал адекватность построенной модели кинематики, что позволяет ее использовать при динамических и силовых исследованиях.

**Ключевые слова:** планетарный механизм, эллиптические зубчатые колеса, кинематический анализ, функция положения, статистический анализ, неопределенность измерения, доверительный интервал

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Кубанского научного фонда в рамках научно-инновационного проекта № НИП-20.1/135.*

## STUDY OF THE POSITION FUNCTION OF A DOUBLE-ROW PLANETARY INTERNAL GEAR MECHANISM WITH ELLIPTICAL GEARS ON A SATELLITE

Prihodko A.A., Polivoda N.A., Schetin M.M.

Kuban State Technological University, Krasnodar, e-mail: sannic92@gmail.com

Mechanisms with non-circular gears are of interest to inventors and engineers due to the high compactness of such mechanisms, as well as the implementation of a wide range of transmission functions. In recent years, the number of works in this direction has increased significantly due to the development of computer modeling systems and the reduction in the cost of manufacturing non-circular gears. The purpose of this paper is mathematical modeling of the kinematics of an internal planetary gear with elliptical gears, which allows for the reciprocating rotational motion of the output shaft. A kinematic model of the mechanism was constructed using the speed plan of its links, and the law of motion was determined in the form of an analogue of the speed and position function of the output link. An experimental stand for the proposed planetary gear has been developed, on the basis of which three variants of the mechanism with different kinematic parameters have been studied. A position function is constructed by measuring the rotation angles of the input and output shafts of the mechanism, which made it possible to validate the kinematic model of the mechanism. Statistical analysis of measurement errors showed the adequacy of the constructed kinematic model, which allows it to be used in the future in dynamic, power studies and design of machines based on the proposed planetary gear.

**Keywords:** planetary mechanism, elliptical gears, kinematic analysis, position function, statistical analysis, measurement uncertainty, confidence interval

*The study was carried out with financial support from the Kuban Science Foundation within the framework of scientific and innovative project No. NIP-20.1/135.*

Механические передачи с некруглыми зубчатыми колесами издавна привлекают внимание исследователей и изобретателей [1–3], однако их практическое применение было затруднено из-за недостаточного развития высокоточного металлообрабатывающего оборудования и слабой теоретической базы в области промышленного производства. В настоящее время повышается интерес исследователей к разработке различных

схем механизмов с некруглыми зубчатыми колесами именно благодаря значительным успехам и изготовлению различных типов некруглых передач: цилиндрических передач с внешним [4, 5] и внутренним [6, 7] зацеплением, а также косозубых [8] и конических передач [9, 10].

Одним из перспективных практических применений некруглых зубчатых колес является создание приводов возвратно-враща-

тельного движения, построенных на базе планетарных передач с одной [11] или несколькими парами [3, 7] некруглых шестерен. Преимуществами такой схемы по сравнению с традиционными рычажными механизмами являются более широкие кинематические характеристики, высокая точность и скорость работы, компактная и надежная конструкция передачи.

Как показывает литературный обзор, самыми распространенными на сегодняшний день являются некруглые зубчатые колеса с эллиптической центроидой [12, 13]. Разработано большое количество устройств на базе эллиптических зубчатых колес [14, 15], проанализирована геометрия и кинематика [11, 12, 16], решены задачи промышленного производства [17, 18].

**Целью настоящего исследования** является кинематический анализ двухрядного планетарного механизма внутреннего зацепления с эллиптическими шестернями на сателлите, а также его экспериментальная верификация путем анализа функций положения прототипов механизма с различными кинематическими параметрами.

#### Материалы и методы исследования

Построим кинематическую модель предлагаемой передачи. Рассмотрим план скоростей планетарного механизма внутреннего зацепления с эллиптическими шестернями на сателлите (рис. 1).

Согласно построенному плану скоростей, математическая модель кинематики механизма может быть выражена через ана-

лог угловой скорости выходного вала определится [19]:

$$\varphi'_3 = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{V_D \cdot AC}{V_C \cdot DE} = \frac{BD \cdot AC}{BC \cdot DE}. \quad (1)$$

Для определения расстояний  $BD$ ,  $BC$  и  $DE$  рассмотрим уравнение эллипса в полярных координатах:

$$\rho(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos \varphi}, \quad (2)$$

где  $\varphi$  – угол поворота эллипса;  $e$ ,  $a$  – эксцентриситет и большая полуось эллипса.

Обозначим радиусы зацепления эллиптических зубчатых колес 5 и 6 следующим образом:

$$BC = \rho_5 = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos \varphi_5}; \quad (3)$$

$$CD = \rho_6 = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos \varphi_6}, \quad (4)$$

где  $e$  – эксцентриситет эллиптических зубчатых колес,  $\varphi_5 = \varphi_6 + \pi$  – угол поворота эллиптического колеса на сателлите:

В соответствии с рис. 1 и с учетом принятых обозначений (3), (4), длины отрезков в уравнении (1) определяются:

$$BD = \rho_6 - \rho_5; \quad (5)$$

$$AC = EC = 2a; \quad (6)$$

$$DE = 2a - \rho_6. \quad (7)$$

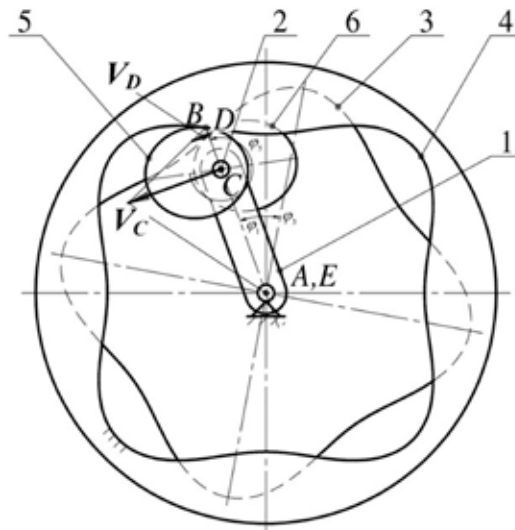


Рис. 1. План скоростей исследуемой планетарной передачи: 1 – водило; 2 – вал сателлита; 3 – некруглое зубчатое колесо на выходном валу; 4 – неподвижное некруглое зубчатое колесо (эпицикл); 5, 6 – эллиптические зубчатые колеса сателлита; А, С, Е – вращательные кинематические пары; В, D – зубчатые кинематические пары

Таким образом, учитывая (2)–(7), определим аналог угловой скорости выходного вала:

$$\varphi_3' = \frac{(\rho_6 - \rho_5) \cdot 2a}{\rho_5 \cdot (2a - \rho_6)} \quad (8)$$

Угол поворота выходного вала, определяющий функцию положения механизма, рассчитывается путем интегрирования (8) по углу поворота входного вала:

$$\varphi_3(\varphi_1) = \int \varphi_3' d\varphi_1 \quad (9)$$

Таким образом, уравнение (9) позволяет получить расчетную функцию положения исследуемого планетарного механизма.

В качестве примера исследуем механизмы с различными эксцентриситетами эллиптических зубчатых колес:

- вариант 1:  $e = 0.28$ ;
- вариант 2:  $e = 0.392$ ;
- вариант 3:  $e = 0.475$ .

Используя (9), построим функции положений для предлагаемых механизмов (рис. 2), цифрами обозначены исследуемые варианты.

Как видно из графиков, исследуемый механизм позволяет реализовать возвратно-вращательное движение, амплитуда которо-

го возрастает при увеличении эксцентриситета эллиптических зубчатых колес.

### Результаты исследования и их обсуждение

С целью проведения валидации полученной математической модели кинематики механизма проведем натурный эксперимент. Объектом экспериментального исследования является прототип планетарного механизма, детали которого (рис. 3) выполнены как методами механической обработки (валы для обеспечения соосности выполнены из стали 45), так и с помощью аддитивных технологий (корпус механизма, крепления для датчиков выполнены из PETG-пластика).

Измерительная часть стенда содержит абсолютные энкодеры для измерения углов поворота входного и выходного валов, краткие характеристики которых представлены в табл. 1.

Сигнал от датчиков обрабатывается с помощью контроллера, который выполняет функцию аналого-цифрового преобразователя, а затем передается на персональный компьютер. Принципиальная схема и внешний вид экспериментального стенда показаны на рис. 4.

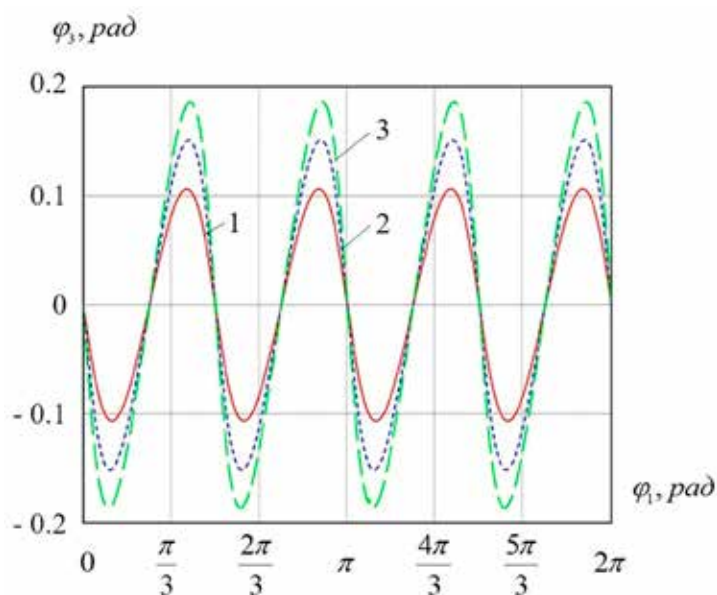


Рис. 2. Графики зависимостей  $\varphi_3(\varphi_1)$  для различных конфигураций механизма

Таблица 1

Характеристики абсолютных энкодеров

Разрешение	Линейность	Скорость чтения	Выходной сигнал	Диаметр
$360^\circ/4096 \approx 0.088^\circ$	0,3 %	0,6 мс	0–5 В	22 мм



Рис. 3. Детали исследуемого прототипа

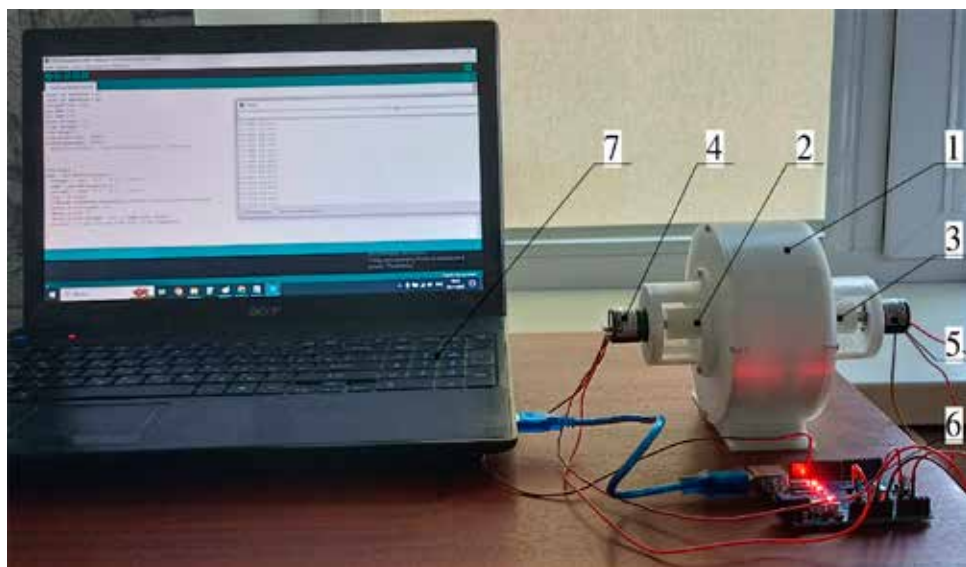
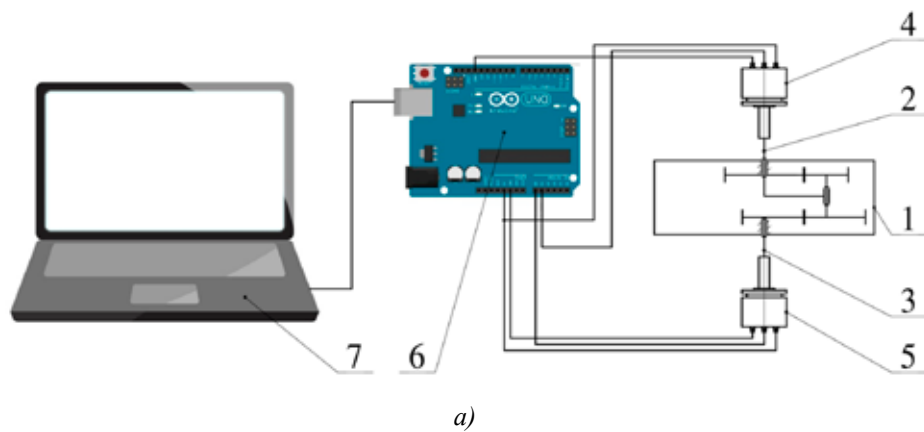


Рис. 4. Принципиальная схема (а) и внешний вид (б) экспериментального стенда:  
 1 – корпус механизма; 2 – входной вал; 3 – выходной вал;  
 4, 5 – датчики угла поворота; 6 – контроллер; 7 – ПК

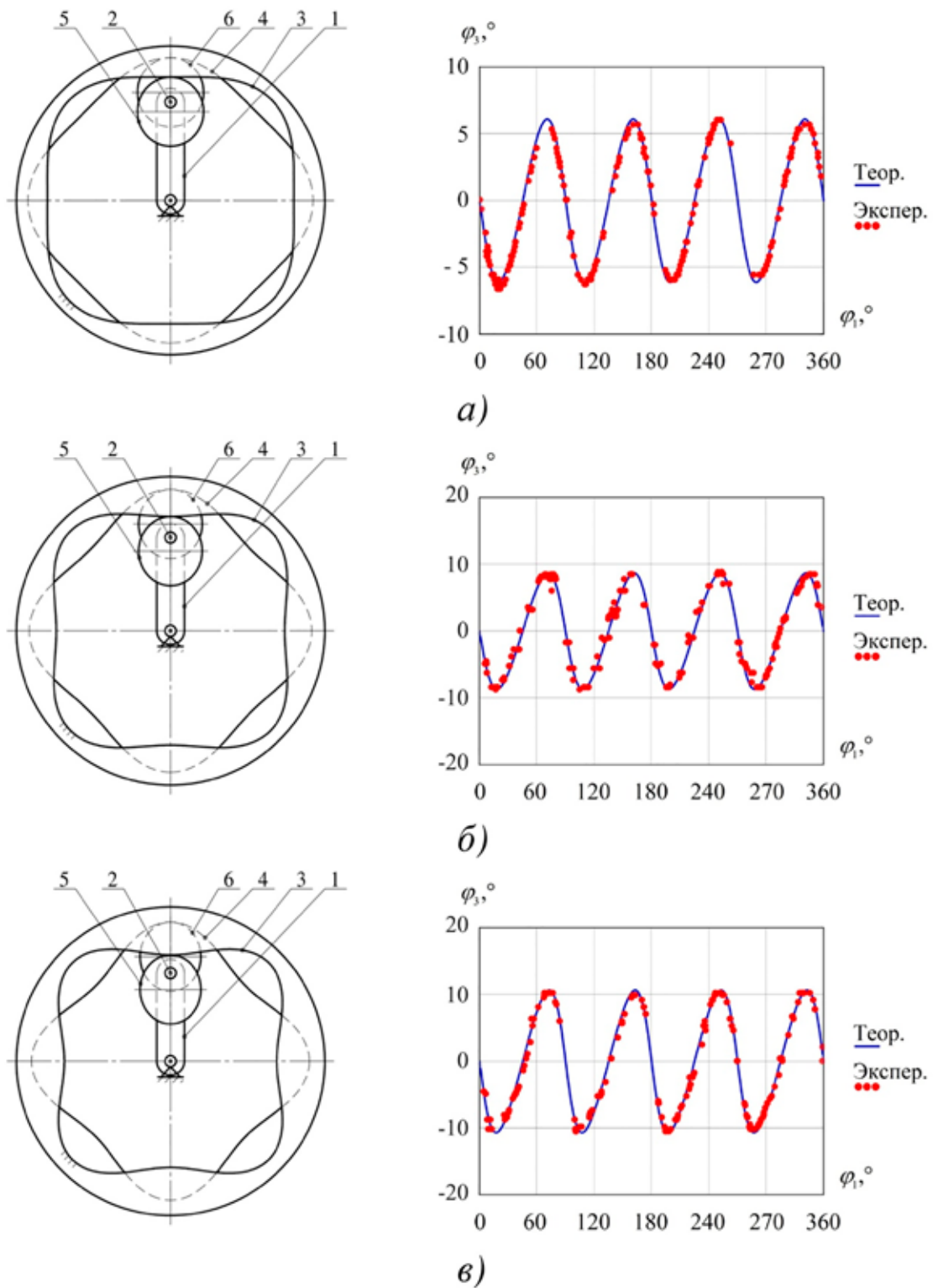


Рис. 5. Схемы механизмов, функции положений и результаты измерений: а – вариант 1, б – вариант 2, в – вариант 3

Для исследования функции положения измерялись углы поворота входного и выходного валов для трех предлагаемых вари-

антов планетарного механизма. Анализ данных и статистическая обработка выполнены в системе MathCAD.

Таблица 2

Результаты статистического анализа ошибок измерения

Исполнение механизма	Количество измерений	Среднее значение ошибки	Неопределенность измерения
Вариант 1	194	0.18°	0.03°
Вариант 2	194	- 0.09°	0.07°
Вариант 3	193	0.11°	0.06°

Схемы механизмов, теоретические функции положения и результаты измерений для исследуемых вариантов показаны на рис. 5.

Как показывает анализ графиков на рис. 5, измеренные функции положения для всех вариантов механизма адекватны построенной кинематической модели. Проведем статистический анализ ошибок измерения функций положения для более детальной оценки результатов эксперимента. Согласно [20], среднее значение ошибок измерения определится:

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k, \quad (10)$$

где  $n$  – количество независимых наблюдений  $q_k$ .

Выборочная дисперсия определяется по формуле

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2. \quad (11)$$

Оценку дисперсии среднего значения получим следующим образом:

$$s^2(q) = \frac{s^2(q_k)}{n}. \quad (12)$$

Далее, определим стандартную неопределенность измерений по типу А:

$$u(q) = \sqrt{s^2(q)}. \quad (13)$$

Применяя уравнения (10)–(13) к результатам экспериментального исследования и принимая за значения  $q_k$  ошибки измерения функций положения, получим значения неопределенности измерения для каждого из вариантов механизмов. Количество измерений  $n$ , среднее значение ошибок измерения  $\bar{q}$  и неопределенность измерения  $u(q)$  для каждого варианта механизма приведены в табл. 2.

Анализ результатов эксперимента показывает адекватность построенной математической модели кинематики реальным механизмам, при этом доверительный интервал ошибок измерения при уровне достоверно-

сти 95 % определяется как  $\bar{q} \pm 2u$  и составляет  $0.18 \pm 0.06^\circ$  для варианта 1,  $-0.09 \pm 0.14^\circ$  для варианта 2 и  $0.11 \pm 0.12^\circ$  для варианта 3.

### Заключение

В качестве перспективного привода возвратно-вращательного движения рассматривается планетарный механизм с внутренним зацеплением, имеющий в своем составе эллиптические зубчатые колеса. Кинематический анализ механизма показал осуществление возвратно-вращательного движения с различной амплитудой, которая зависит от эксцентриситета эллиптических зубчатых колес.

Проведен экспериментальный анализ функций положения для трех вариантов исследуемой передачи, который позволил провести валидацию кинематической модели механизма. Статистический анализ результатов измерения, проведенный с применением современных компьютерных технологий, показал адекватность построенной кинематической модели реальным механизмам, что позволяет использовать данную математическую модель при дальнейшем проектировании и расчете машин на базе предложенной схемы планетарного механизма.

### Список литературы

1. Пожбелко В.И., Шагиахметов А.И., Ахметшин Н.И. Новый способ регулирования угла выстоя и классификация регулируемых зубчато-рычажных механизмов периодического поворота // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Машиностроение. 2005. № 1 (41). С. 181–184.
2. Тарабарин В.Б., Тарабарина З.И. Модели зубчатых передач с переменным передаточным отношением в коллекции МГТУ им. Н.Э. Баумана // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2014. № 12 (657). С. 84–91.
3. Zheng F., Hua L., Han X., Li B., Chen D. Synthesis of indexing mechanisms with non-circular gears // Mechanism and Machine Theory. 2016. Vol. 105. P. 108–128. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2016.06.019.
4. Maláková S., Urbanský M., Fedorko G., Molnár V., Sivak S. Design of geometrical parameters and kinematic characteristics of a non-circular gear transmission for given parameters // Applied Sciences. 2021. Vol. 11, Is. 3. DOI: 10.3390/app11031000.
5. Jang H.S., Lee C.H., Park G.Y., Kim C. Study on Design of Non-Circular Gears for Speed Control of the Squid Belly

- Opening and Gutting Machine (SBOGM) // Applied Sciences. 2021. Vol. 11, Is. 7. DOI: 10.3390/app11073268.
6. Lin C., Xia X., Li P. Geometric design and kinematics analysis of coplanar double internal meshing non-circular planetary gear train // Advances in Mechanical Engineering. 2018. Vol. 10, Is. 12. DOI: 10.1177/1687814018818910.
7. Приходько А.А., Смелягин А.И. Кинематика планетарной передачи эллиптическими зубчатыми колесами с внутренним зацеплением // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2021. № 5. С. 41–48.
8. Han J., Li D., Tian X., Xia L. Linkage model and interpolation analysis of helical non-circular gear hobbing // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2020. Vol. 42, Is. 11. DOI: 10.1007/s40430-020-02663-1.
9. Zhuang W., Hua L., Han X., Zheng F. Design and hot forging manufacturing of non-circular spur bevel gear // International Journal of Mechanical Sciences. 2017. Vol. 133. P. 129–146. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.08.025.
10. Han X.H., Zhang X.C., Zheng F.Y., Xu M., Tian J. Mathematic model and tooth contact analysis of a new spiral non-circular bevel gear // Journal of Central South University. 2022. Vol. 29, Is. 1. P. 157–172. DOI: 10.1007/s11771-022-4898-8.
11. Приходько А.А., Смелягин А.И. Создание и исследование планетарных механизмов прерывистого движения с эллиптическими зубчатыми колесами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Машиностроение. 2019. № 6. С. 77–88. DOI: 10.18698/0236-3941-2019-6-77-88.
12. Wunderlich W. Contribution to the geometry of elliptic gears // Mechanism and Machine Theory. 1975. Vol. 10, Is. 4. P. 273–278. DOI: 10.1016/0094-114X(75)90072-5.
13. Chang S.-L., Tsay C. B., Wu L.-L. Mathematical model and undercutting analysis of elliptical gears generated by rack cutters // Mechanism and Machine Theory. 1996. Vol. 31, Is. 7. P. 879–890. DOI: 10.1016/0094-114X(95)00121-E.
14. Zhao Y., Yu G. H., Wu C. Y. Circuit Simulation and Dynamic Analysis of a Transplanting Mechanism with Planetary Elliptical Gears // Transactions of the ASABE. 2011. Vol. 54, Is. 4. P. 1179–1188. DOI: 10.13031/2013.39016.
15. Приходько А.А., Герасименко Е.О. Исследование эффективности теплообмена в перемешивающем устройстве с неравномерным движением мешалки // Теоретические основы химической технологии. 2023. Т. 57, № 2. С. 228–237.
16. Bair B.-W. Computerized tooth profile generation of elliptical gears manufactured by shaper cutters // Journal of Materials Processing Technology. 2002. Vol. 122, Is. 2–3. P. 139–147. DOI: 10.1016/S0924-0136(01)01242-0.
17. Nguyen T.H. Shaping the tooth profile of elliptical gear with the involute ellipse curve // Science & Technology Development Journal-Engineering and Technology. 2021. Vol. 4, Is. 3. P. 1048–1056. DOI: 10.32508/stdjet.v4i3.820.
18. Yazar M. Design, manufacturing and operational analysis of elliptical gears // International Journal of Precision Engineering and Manufacturing. 2021. Vol. 22, Is. 8. P. 1441–1451. DOI: 10.1007/s12541-021-00549-3.
19. Prikhodko A.A. Experimental kinematic analysis of an intermittent motion planetary mechanism with elliptical gears // Journal of Measurements in Engineering. 2020. Vol. 8, Is. 3. P. 122–131. DOI: 10.21595/jme.2020.21583.
20. Бараш В.Я. Неопределенность и погрешность в современной метрологии // Законодательная и прикладная метрология. 2009. № 5. С. 15–20.