

УДК [519.87+536.2]:629.7  
DOI

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

Тугов В.В.

*ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный университет», Оренбург,  
e-mail: vtzi@mail.osu.ru*

В статье описываются математические модели теплопроводности в различных многослойных конструкциях, таких как многослойная пластина, неограниченно сплошной и полый многослойный цилиндр, сплошной и полый многослойный шар в прямоугольно-декартовой, цилиндрической или сферической системах координат, используемых в ходе производства композитных изделий. В данной работе продолжают исследования, связанные с моделированием разнообразных теплообменных процессов, которые происходят при производстве многослойных конструкций. В основу исследования положен метод конечных интегральных преобразований и рассмотрены его особенности. Представленная задача решена с применением алгебраической суммы решений стационарной задачи теплопроводности с неоднородными граничными условиями и нестационарной задачи теплопроводности с однородными граничными условиями. Таким образом, используя полученные модели, возможно улучшить сходимость рядов, входящих в состав решения задачи теплопроводности, а также уменьшить количество вычислений и возникающие при этом погрешности. На основании разработанных математических моделей и алгоритмов их реализации возможно создание программного обеспечения с целью проведения экспериментальных работ. Применяя аналитические решения, стало возможно производить оценку распределения температуры в различных слоях композитных изделий в зависимости от времени. Это повышает качество при производстве композитов. Предложено дальнейшее направление исследования, связанное с производством ограждающих конструкций. Разработанная теория позволяет построить математические модели целого класса технологических процессов производства многослойных композиционных конструкций, которые служат основой для разработки автоматизированных систем управления описанных процессов.

**Ключевые слова:** многослойные конструкции, теплопроводность, конечные интегральные преобразования, математические модели

## MODELING AND SOLUTION OF MULTILAYER NONLINEAR PROBLEMS OF TRANSIENT HEAT CONDUCTION WITH SOURCE FUNCTIONS BY THE METHOD OF FINITE INTEGRAL TRANSFORMATIONS

Tugov V.V.

*Orenburg State University, Orenburg, e-mail: vtzi@mail.osu.ru*

The article describes mathematical models of thermal conductivity in various multilayer structures such as: a multilayer plate, an infinitely solid and hollow multilayer cylinder, a solid and hollow multilayer ball in rectangular Cartesian, cylindrical or spherical coordinate systems used in the production of composite products. In this work, research continues related to the modeling of various heat exchange processes that occur in the production of multilayer structures. The research is based on the method of finite integral transformations and its features are considered. The presented problem is solved using an algebraic sum of solutions to the stationary heat conduction problem with inhomogeneous boundary conditions and the non-stationary heat conduction problem with homogeneous boundary conditions. Thus, using the obtained models, it is possible to improve the convergence of the series included in the solution of the thermal conductivity problem, as well as to reduce the number of calculations and the resulting errors. Based on the developed mathematical models and algorithms for their implementation, it is possible to create software for the purpose of conducting experimental work. Using analytical solutions, it became possible to estimate the temperature distribution in different layers of composite products depending on time. This improves the quality in the production of composites. A further direction of research related to the production of enclosing structures is proposed. The developed theory allows us to build mathematical models of a whole class of technological processes for the production of multilayer composite structures, which serve as the basis for the development of automated control systems for the described processes.

**Keywords:** multilayer structures, thermal conductivity, finite integral transformations, mathematical models

Современные вызовы в производственной сфере летательных аппаратов требуют разработки и внедрения новых производственных и технологических процессов, интенсификации работы существующих, что возможно осуществить за счет разработки новых, современных, точных и на-

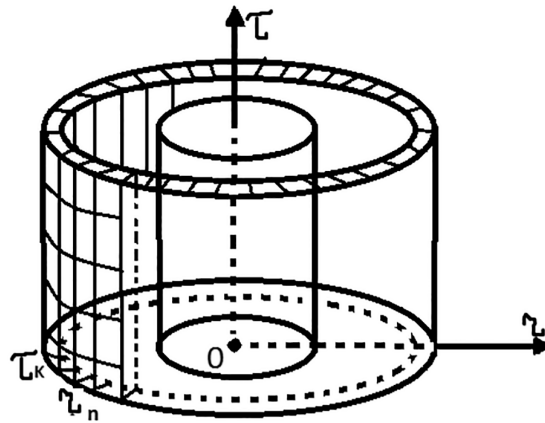
дежных методов моделирования технологических процессов, на основе математических моделей способных обеспечить требуемую точность [1–3]. Это играет ключевую роль в производстве многослойных композиционных конструкций методом полимеризации для летательных аппара-

тов [4–6]. Существенной особенностью таких технологических процессов является то, что они производятся в пресс-формах или автоклавах. Поэтому описывать возникающие температурные поля приходится с учетом формы изделия в прямоугоньно-декартовой, цилиндрической или сферической системах координат [7, с. 16; 8]. Решение задач с неоднородными граничными условиями возможно стандартными методами, но в результате получаются трудно-сходящиеся ряды. Поэтому решение задачи теплопроводности наиболее целесообразно и оптимально производить за счет выделения стационарной составляющей температурного поля. В результате улучшается сходимость рядов, значительно снижается число вычислений, а также возникающая вычислительная погрешность [6; 9]. Таким образом, для получения решения задач теплопроводности в многослойных изделиях, имеющих неоднородные граничные условия, воспользуемся алгебраической суммой, которая включает решения стационарной задачи теплопроводности с неоднородными граничными условиями и нестационарной задачи теплопроводности с однородными граничными условиями [6]. Поставленную задачу решим методом конечных интегральных преобразований [10].

Цель исследования – создать математические модели теплообмена в многослойной пластине в прямоугоньно-декартовой системе координат, в неограниченном сплошном и полом многослойном цилиндре, в сплошном и полом многослойном шаре в соответствующих системах координат, которые служат основой для разработки автоматизированных систем управления описанных процессов.

**Материалы и методы исследования**

В работе применим аналитические методы, которые позволяют учитывать влияние теплофизических параметров на производственные процессы многослойных композиционных конструкций. Рассмотрим температурные поля в многослойной пластине в прямоугоньно-декартовой системе координат, в неограниченном сплошном и полом многослойном цилиндре, в сплошном и полом многослойном шаре в соответствующих системах координат при производстве композитов [6]. Например, если рассматриваемая конструкция имеет форму полого цилиндра, то необходимо проводить исследование в цилиндрической системе на конечно-разностном аналоге (рисунок).



*Полый цилиндр*

Для трех систем координат задача, в которой имеются произвольные начальные условия, неоднородные граничные условия и распределенный внутренний источник тепла, представляется следующим образом:

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} = a_i^2 \left( \frac{\partial^2 U_i(r_i, \tau)}{\partial r_i^2} + H_{k,i} \frac{\partial U_i(r_i, \tau)}{\partial r_i} \right) + \frac{Q_i(r_i, \tau)}{c_m \rho_m}; \tag{1}$$

$$i=1,2,\dots,N; R_{i-1} \leq r_i \leq R_i; k=0,1,2; \tau > 0,$$

с начальными условиями

$$U_i(r_i, 0) = f_i(r_i); \tag{2}$$

с неоднородными граничными условиями

$$\lambda_i \frac{\partial U_1(R_0, \tau)}{\partial r_1} - \alpha_1 [U_1(R_0, \tau) - U_{c1}(\tau)] = 0; \tag{3}$$

$$\lambda_N \frac{\partial U_N(R_N, \tau)}{\partial r_N} + \alpha_N [U_N(R_N, \tau) - U_{cN}(\tau)] = 0; \tag{4}$$

условия сопряжения

$$U_j(R_j, \tau) = U_{j+1}(R_j, \tau); \lambda_j \frac{\partial U_j(R_j, \tau)}{\partial r_j} = \lambda_{j+1} \frac{\partial U_{j+1}(R_j, \tau)}{\partial r_{j+1}}; j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5)$$

Здесь:  $U_i(r_i, \tau)$  –  $i$ -й области температурное поле;  $r_i$  – координата в пространстве;  $\tau$  – временной параметр;  $a_j^2$  – коэффициент теплопроводности  $i$ -го слоя;  $H_{k,i}$  – коэффициент уравнения, который определяется за счет вида координат (декартова система координат имеет значение равно  $k = 0$ ,  $H_{0,i} = 0$ ; цилиндрическая система  $k = 1$ ,  $H_{1,i} = 1/r_i$ ; сферическая система  $k = 2$ ,  $H_{2,i} = 2/r_i$ );  $Q_i(r_i, \tau)$  – коэффициент, связанный с мощностью внутреннего источника тепла  $i$ -й области;  $c_m$  – коэффициент удельной теплоемкости слоя;  $\rho_m$  – плотность слоя;  $N$  – общее количество слоев;  $R_i$  – толщина  $i$ -й пластины;  $U_{c1}$ ,  $U_{cN}$  – температуры окружающей среды как функции времени;  $\alpha_i$  – коэффициент, связанный с конвективной теплоотдачей от внешней поверхности в окружающую среду;  $\lambda_i$  – теплопроводность  $i$ -го слоя.

Решение поставленных задач основывается на конечном интегральном преобразовании

$$\overline{U(\mu, \tau)} = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_0^{R_m} \rho(r_m) U_m(r_m, \tau) W_m(r_m, \mu) dr_m, \quad (6)$$

где  $\mu$  – параметр;  $W_m(r_m, \mu)$  – ядро интегрального преобразования;  $\rho(r_m)$  – весовая функция каждого слоя, которая является решением уравнения следующего вида

$$\frac{d\rho(r_m)}{dr} - H_{k,m} \rho(r_m) = 0. \quad (7)$$

В декартовой системе координат весовая функция равна  $\rho(r_m) = 1$ ; в цилиндрической соответственно  $\rho(r_m) = r_m$ ; в сферической  $\rho(r_m) = r_m^2$ .

Входящее в уравнение (6) ядро  $W_m(r_m, \mu)$  является решением задачи Штурма – Лиувилля:

$$\frac{d^2 W_m(r_m, \mu)}{dr_m^2} + H_{k,m} \frac{dW_m(r_m, \mu)}{dr_m} + \frac{\mu^2}{a_m^2} W_m(r_m, \mu) = 0; i=1, 2, \dots, N; R_{m-1} \leq r_m \leq R_m; \quad (8)$$

однородные граничные условия

$$\lambda_i \frac{\partial W_1(R_0, \tau)}{\partial r_1} - \alpha_1 W_1(R_0, \mu) = 0; \quad (9)$$

$$\lambda_N \frac{\partial W_N(R_N, \tau)}{\partial r_N} + \alpha_N W_N(R_N, \mu) = 0; \quad (10)$$

и условия сопряжения

$$W_j(R_j, \mu) = W_{j+1}(R_j, \mu) \lambda_j \frac{dW_j(R_j, \mu)}{dr_j} = \lambda_{j+1} \frac{dW_{j+1}(R_j, \mu)}{dr_{j+1}}; j = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

Решением уравнения (8) является

$$W_m(r_m, \mu) = A_m \cdot \exp \left[ -\frac{r_m}{2} \left( H_{k,m} + \sqrt{H_{k,m}^2 - 4 \frac{\mu^2}{a_m^2}} \right) \right] + B_m \cdot \exp \left[ -\frac{r_m}{2} \left( H_{k,m} - 4 \frac{\mu^2}{a_m^2} \right) \right]. \quad (12)$$

При этом в зависимости от применяемой системы координат меняется вид: в декартовой

$$W_m(r_m, \mu) = A_m \sin \left( \frac{\mu}{a_m} r_m \right) + B_m \cos \left( \frac{\mu}{a_m} r_m \right), \quad (13)$$

в цилиндрической

$$W_m(r_m, \mu) = A_m J_0\left(\frac{\mu}{a_m} r_m\right) + B_m Y_0\left(\frac{\mu}{a_m} r_m\right), \quad (14)$$

в сферической

$$W_m(r_m, \mu) = \frac{1}{r_m} \left[ A_m \sin\left(\frac{\mu}{a_m} r_m\right) + B_m \cos\left(\frac{\mu}{a_m} r_m\right) \right]. \quad (15)$$

Для определения коэффициентов  $A_m$  и  $B_m$  используем граничные условия (9)–(11), а также параметр  $\mu$ , а также  $A_1 = 1$ , и функции  $J_0(z)$ ,  $Y_0(z)$  – функции Бесселя первого рода нулевого порядка и второго рода нулевого порядка.

Для перехода к изображениям необходимо уравнение (6) применить почленно к уравнениям (1) и (2). Интегралы в правой части уравнения (6) берутся по частям, при этом необходимо учитывать граничные условия (3)–(5) и (9)–(11). В изображениях частой производной по времени получим

$$\frac{dU(\mu, \tau)}{d\tau} = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) \frac{\partial U_m(r_m, \tau)}{\partial \tau} W_m(r_m, \mu) dr_m. \quad (16)$$

Изображения по координатам принимают следующий вид

$$\begin{aligned} & \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) \left[ \frac{\partial^2 U_m(r_m, \tau)}{\partial r_m^2} + H_{k,m} \frac{\partial U_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} \right] W_m(r_m, \mu) dr_m = \\ & \left| \begin{array}{l} z = W_m(z_m, \tau), \quad dz = \frac{dW_m(r_m, \mu)}{dr_m} dr_m; \\ v = \rho(r_m) \left[ \frac{\partial^2 U_m(r_m, \tau)}{\partial r_m^2} + H_{k,m} \frac{\partial U_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} \right] dr_m; \\ v = \rho(r_m) \frac{\partial U_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} \end{array} \right| = \rho(r_m) \frac{\partial U_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} W_m(r_m, \mu) \Big|_{R_{m-1}}^{R_m} - \\ & - \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) \frac{\partial U_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} \frac{dW_m(r_m, \mu)}{dr_m} dr_m \left| \begin{array}{l} dz_1 = \left[ \frac{d\rho(r_m)}{dr_m} \frac{dW_m(z_m, \mu)}{dr_m} + \rho(r_m) \frac{dW_m^2(r_m, \mu)}{dz_m^2} \right] dr_m; \\ dv_1 = \frac{\partial U_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} dr_m, \quad v_1 = U_m(r_m, \tau). \end{array} \right| = \\ & = \rho(r_m) \frac{\partial U_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} W_m(r_m, \mu) \Big|_{R_{m-1}}^{R_m} - \rho(r_m) U_m(r_m, \tau) \frac{dW_m(r_m, \mu)}{dr_m} \Big|_{R_{m-1}}^{R_m} + \\ & + \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) U_m(r_m, \tau) \left[ \frac{dW_m^2(r_m, \mu)}{dr_m^2} + H_{k,m} \frac{dW_m(r_m, \mu)}{dr_m} \right] dr_m = \end{aligned}$$

$$= \rho(r_m) \frac{\partial U_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} W_m(r_m, \mu) \Big|_{R_{m-1}}^{R_m} - \rho(r_m) U_m(r_m, \tau) \frac{dW_m(r_m, \mu)}{dr_m} \Big|_{R_{m-1}}^{R_m} - \frac{\mu^2}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) U_m(r_m, \tau) W_m(r_m, \mu) dr_m. \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) a_m^2 \left[ \frac{\partial^2 U_m(r_m, \tau)}{\partial r_m^2} + H_{k,m} \frac{\partial U_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} \right] W_m(r_m, \mu) dr_m = \\ & = \sum_{m=1}^N \lambda_m \rho(r_m) \frac{\partial U_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} W_m(r_m, \mu) \Big|_{R_{m-1}}^{R_m} - \rho(r_m) U_m(r_m, \tau) \frac{dW_m(r_m, \mu)}{dr_m} \Big|_{R_{m-1}}^{R_m} - \\ & \quad - \frac{\mu^2}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) U_m(r_m, \tau) W_m(r_m, \mu) dr_m = \\ & = \lambda_N \rho(r_N) \left[ \frac{\partial U_N(R_N, \tau)}{\partial r_N} W_N(R_N, \mu) - U_N(R_N, \tau) \frac{dW_N(R_N, \mu)}{dr_N} \right] - \\ & - \lambda_1 \rho(R_0) \left[ \frac{\partial U_1(R_0, \tau)}{\partial r_1} W_1(R_0, \mu) - U_1(R_0, \tau) \frac{dW_1(R_0, \mu)}{dr_1} - \mu^2 \overline{U(\mu, \tau)} \right] = \\ & = \alpha_N \rho(R_N) W(R_N, \mu) U_{CN}(\tau) + \alpha_1 \rho(R_0) W(R_0, \mu) U_{C1}(\tau) - \mu^2 \overline{U(\mu, \tau)}. \quad (18) \end{aligned}$$

Изображение начального условия имеет вид

$$\sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) f_m(r_m) W_m(r_m, \mu) dr_m = \overline{U_0}. \quad (19)$$

Изображение функции источника имеет вид

$$\sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) \frac{Q_m(r_m, \tau)}{c_m \rho_m} W_m(r_m, \mu) dr_m = \overline{Q(\mu, \tau)}. \quad (20)$$

Таким образом, исходная задача в изображениях имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{dU(\mu_n, \tau)}{d\tau} + \mu_n^2 \overline{U(\mu_n, \tau)} = \\ & = \overline{Q(\mu_n, \tau)} + \alpha_N \rho(r_n) W(R_N, \mu_n) U_{CN}(\tau) + \alpha_1 \rho(R_0) W(R_0, \mu_n) U_{C1}(\tau); \quad (21) \end{aligned}$$

с начальным условием

$$\overline{U(\mu_n, 0)} = \overline{U_0}. \quad (22)$$

Решая задачи (21)–(22), в изображениях получим

$$\overline{U(\mu_n, \tau)} = e^{-\mu_n^2 \tau} \left\{ \overline{U(\mu_n, 0)} + \int_0^\tau \left[ \overline{Q(\mu_n, \tau)} \frac{Q(\mu_n, \tau)}{c_m \rho_m} + \overline{FW(\mu_n, \tau)} e^{\mu_n^2 \tau} \right] d\tau \right\}, \quad (23)$$

$$\text{где } \overline{FW(\mu_n, \tau)} = \alpha_N \rho(R_N) W(R_n, \mu_n) U_{CN}(\tau) + \alpha_1 \rho(R_0) W(R_0, \mu_n) U_{C1}(\tau). \quad (24)$$

К оригиналу переходят по формуле

$$U_m(r_m, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{U(\mu_n, \tau)} W_m(r_m, \mu_n)}{M_n}, \quad (25)$$

где

$$M_n = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{\alpha_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) W_m^2(r_m, \mu_n) dr_m. \quad (26)$$

### Результаты исследования и их обсуждение

В результате такого подхода к решению нелинейных задач нестационарной теплопроводности с нелинейными граничными условиями и функциями источника, получают аналитические решения, содержащие сходящиеся ряды.

### Заключение

Таким образом, следует отметить, что разработаны математические модели теплообмена в многослойной пластине в прямоугольно-декартовой системе координат, в неограниченном сплошном и полом многослойном цилиндре, в сплошном и полом многослойном шаре в соответствующих системах координат при производстве композитов. Используя аналитические решения представленных задач, возможно произвести оценку распределения температуры со временем в каждом слое изделия и получить сходящиеся ряды. Разработанная теория позволяет построить математические модели целого класса технологических процессов производства многослойных композиционных конструкций, которые служат основой для разработки автоматизированных систем управления описанных процессов. Для повышения качества и расширения видов производимых изделий необходимо провести дополнительные исследования ограждающих конструкций.

### Список литературы

1. Korniyushko V.F., Kuznetsov A.S., Kolybanov K.Yu., Burliaeva E.V. Optimization of control of chemical and technological processes of mixing and structuring multi-component elastomeric composites based on mathematical modeling methods // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2020. № 421 (7). P. 072016. DOI: 10.1088/1755-1315/421/7/072016.
2. Nill S.T., Nietner L.F., Rubin A.M. A mathematical approach to manufacturing process and systems modeling using geometric programming // International SAMPE Technical Conference 2019-May; Charlotte Convention Center Charlotte; United States; 20 May 2019 – 23 May 2019. P. 48951.
3. Yassine Baqqal, Mohammed El Hammoumi. Modelling and Optimization Techniques for Maintenance Systems Using Simulation: a Systematic Literature Review // International Review on Modelling and Simulations (IREMOS), 2019. Vol. 12, Is. 3. P. 152–162.
4. Акимов И.А., Тугов В.В., Акимов А.И. Разработка и исследование математических моделей термоупругих напряжений и деформаций при производстве многослойных конструкций сферической формы для летательных аппаратов // Известия вузов. Авиационная техника. 2019. № 3. С. 144–147.
5. Nasonov Y.A., Safonov A.A., Gusev S.A., Akhatov I.S. Mathematical simulation the kinetics of polymerization of vinyl ester resin using in pultrusion // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. № 747 (1). art. no. 012010.
6. Akimov A.I., Karakulina E.O., Akimov I.A., Tugov V. Mathematical Models of Heat Exchange in Multilayer Constructions with Various Thermalphysic Characteristics in Industrial Installations // International Review on Modelling and Simulations (IREMOS). 2018. Vol. 11, Is. 2. P. 59–66.
7. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985. 479 с.
8. I Made Kastiawan, I Nyoman Sutantra, Sutikno Sutikno. Effect of Bottom Ash Treatment and Process Variables on the Strength of Polypropylene Composites // International Review of Mechanical Engineering (IREME). 2020. Vol 14, Is. 5. P. 324–330.
9. Kshirsagar A.R., Jayacumaar J., Rohith S.V., Subramanian J. Development of Natural Fiber-Based Aluminum Composites for Electromagnetic Interference Shielding Applications // International Review of Mechanical Engineering (IREME), 2019. Vol 13, Is. 6. P. 367–373.
10. Туголуков Е.Н. Решение задач теплопроводности методом конечных интегральных преобразований: учебное пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2005. 116 с.