СТАТЬИ

УДК 519.862.6
DOI 10.17513/snt.39966

АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО ОЦЕНИВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДВУХСЛОЙНЫХ НЕЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ РЕГРЕССИЙ С ДВУМЯ ОБЪЯСНЯЮЩИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Базилевский М.П.

ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет путей сообщения», Иркутск, e-mail: mik2178@yandex.ru

Аннотация. Статья посвящена исследованию новых спецификаций регрессионных моделей. Рассмотрены известные модульные линейные регрессии, в которых объясняющие переменные преобразуются с помощью операции модуль, и неэлементарные линейные регрессии, в которых объясняющие переменные преобразуются с помощью бинарных операций min и max. С использованием вместо объясняющих переменных в этих спецификациях повторно модульных и неэлементарных конструкций введено 8 новых математических моделей. Эти модели названы двухслойными неэлементарными линейными регрессиями. Разработан универсальный алгоритм «OLS-mod&min» приближенного оценивания двухслойных регрессий с помощью метода наименьших квадратов. Результаты работы этого алгоритма зависят от выбора областей возможных значений неизвестных параметров на первом слое двухслойной регрессии и количества разбиений этих областей. Доказано, что если на втором слое двухслойной регрессии используется операция модуль, то при выборе большого числа точек разбиения полученные методом наименьших квадратов оценки будут близки к оптимальным. Если на втором слое используется бинарная операция, то близость к оптимуму гарантирована не всегда. Проведен вычислительный эксперимент, подтверждающий справедливость полученных теоретических результатов, которые послужат в будущем фундаментом для оценивания двухслойных неэлементарных линейных регрессий с любым числом объясняющих переменных.

Ключевые слова: неэлементарная линейная регрессия, модульная линейная регрессия, метод наименьших квадратов, двухслойная нейронная сеть, коэффициент детерминации

AN APPROXIMATE ORDINARY LEAST SQUARES ESTIMATION ALGORITHM FOR TWO-LAYER NON-ELEMENTARY LINEAR REGRESSIONS WITH TWO EXPLANATORY VARIABLES

Bazilevskiy M.P.

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: mik2178@yandex.ru

Annotation. This article is devoted to the study of new specifications of regression models. The well-known modular linear regressions, in which explanatory variables are transformed using the modulus operation, and non-elementary linear regressions, in which explanatory variables are transformed using the binary operations min and max, are considered. Using modular and non-elementary constructs instead of explanatory variables in these specifications, 8 new mathematical models are introduced. These models are called two-layer non-elementary linear regressions. A universal algorithm «OLS-mod&min» has been developed for approximate estimation of two-layer regressions using the ordinary least squares method. The results of this algorithm depend on the choice of areas of possible values of unknown parameters on the first layer of two-layer regression and the number of partitions of these areas. It has been proven that if the modulus operation is used on the second layer of two-layer regression, then when choosing a large number of partition points, the estimates obtained by the ordinary least squares method will be close to optimal. If a binary operation is used on the second layer, then proximity to the optimum is not always guaranteed. A computational experiment was carried out to confirm the validity of the obtained theoretical results, which will serve in the future as the foundation for estimating two-layer non-elementary linear regressions with any number of explanatory variables.

Keywords: non-elementary linear regression, modular linear regression, ordinary least squares, two-layer neural network, coefficient of determination

В настоящее время методы машинного обучения [1] находят широкое применение при решении проблем в самых разных сферах человеческой деятельности: в медицине [2], в нефтегазовой сфере [3], в энергетике [4] и др. К одному из методов машинного обучения относится регрессионный анализ [5, с. 30]. Выбор линейной функции регрессии для описания функционирования исследуемого явления или процесса лишь в редких случаях приводит к адекватным результатам. Поэтому возникает необходимость в выборе и оценивании нелинейных форм связи между переменными. В работах [6, 7] автором предложены модульные линейные регрессии, в которых регрессорами выступают объясняющие переменные, преобразованные с помощью операции модуль. А например, в [8] рассмотрены неэлементарные линейные регрессии (НЛР), в которых пары объясняющих переменных преобразуются с помощью бинарных операций min и max. Для оценивания модульных регрессий и НЛР с помощью метода наименьших квадратов (МНК) [9] в [6–8] были разработаны специальные алгоритмы.

Цель исследования состоит в разработке новых структурных спецификаций регрессионных моделей на основе слияния модульных регрессий и НЛР, а также в разработке алгоритма их оценивания с помощью МНК.

Материал и методы исследования

Рассмотрим модульную линейную по факторам регрессию с двумя объясняющими переменными [6, 7] вида:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 |x_{i1} - \lambda_1| + \alpha_2 |x_{i2} - \lambda_2| + \varepsilon_i,\ i = \overline{1,n}, \quad (1)$$

где n – объем выборки; y_i – i-е значение объясняемой переменной y; x_{i1}, x_{i2} – i-е значения объясняющих переменных x_1 и x_2; α_0, α_1, α_2, λ_1, λ_2 – неизвестные параметры; ε_i – i-я ошибка аппроксимации. Эта модель относится к нелинейным по оцениваемым параметрам.

Известно [7], что оптимальные МНК-оценки λ_1^* и λ_2^* параметров λ_1 и λ_2 модульной регрессии (1) принадлежат промежуткам $x_{\min}^1 \le \lambda_1^* \le x_{\max}^1$, $x_{\min}^2 \le \lambda_2^* \le x_{\max}^2$, где $x_{\min}^1$, $x_{\max}^1$, $x_{\min}^2$, $x_{\max}^2$ – минимальные и максимальные значения переменных x_1 и x_2. В связи с этим алгоритм «OLS-mod» приближенного МНК-оценивания модульной регрессии (1) состоит из 3 следующих шагов.

Шаг 1. Найти $x_{\min}^1$, $x_{\max}^1$, $x_{\min}^2$, $x_{\max}^2$.

Шаг 2. На сторонах прямоугольника $D: x_{\min}^1 \le \lambda_1 \le x_{\max}^1, x_{\min}^2 \le \lambda_2 \le x_{\max}^2$ выбрать равномерно p точек, с помощью которых внутри области D сформировать сеть из $(p+2)^2$ точек.

Шаг 3. Перебирая все точки сформированной сети, оценить все возможные регрессии (1) с помощью МНК и выбрать из них уравнение с минимальной величиной суммы квадратов остатков.

Чем больше величина p, тем ближе полученные с помощью алгоритма «OLS-mod» МНК-оценки к оптимальным.

Рассмотрим неэлементарную линейную по факторам регрессию (НЛР) [8] с двумя объясняющими переменными и бинарной операцией min вида:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \min\{x_{i1}, k \cdot x_{i2}\} + \varepsilon_i,\quad i = \overline{1,n}, \quad (2)$$

где k – неизвестный параметр; $x_{i2} \ne 0$, $i = \overline{1,n}$.

Известно, что оптимальная МНК-оценка k^* параметра k НЛР (2) принадлежит промежутку $k_{\text{нижн}} \le k^* \le k_{\text{верхн}}$, где

$$k_{\text{нижн}} = \min\left\{\frac{x_{11}}{x_{12}}, \frac{x_{21}}{x_{22}}, \ldots, \frac{x_{n1}}{x_{n2}}\right\},$$

$$k_{\text{верхн}} = \max\left\{\frac{x_{11}}{x_{12}}, \frac{x_{21}}{x_{22}}, \ldots, \frac{x_{n1}}{x_{n2}}\right\}.$$

Поэтому алгоритм «OLS-min» приближенного МНК-оценивания НЛР (2) формулируется следующим образом.

Шаг 1. Найти $k_{\text{нижн}}$, $k_{\text{верхн}}$.

Шаг 2. На промежутке $k_{\text{нижн}} \le k \le k_{\text{верхн}}$ выбрать равномерно p точек.

Шаг 3. Перебирая все точки промежутка, оценить все возможные НЛР (2) с помощью МНК и выбрать из них уравнение с минимальной величиной суммы квадратов остатков.

Используя вместо объясняющих переменных в НЛР (2) модульные и неэлементарные конструкции, получим 4 новые спецификации регрессионных моделей:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \min\{|x_{i1} - \lambda_1|, k \cdot |x_{i2} - \lambda_2|\} + \varepsilon_i,\quad i = \overline{1,n}, \quad (3)$$

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \min\{\min\{x_{i1}, k_1 \cdot x_{i2}\}, k \cdot \min\{x_{i1}, k_2 \cdot x_{i2}\}\} + \varepsilon_i,\quad i = \overline{1,n}, \quad (4)$$

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \min\{|x_{i1} - \lambda_1|, k \cdot \min\{x_{i1}, k_2 \cdot x_{i2}\}\} + \varepsilon_i,\quad i = \overline{1,n}, \quad (5)$$

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \min\{\min\{x_{i1}, k_1 \cdot x_{i2}\}, k \cdot |x_{i2} - \lambda_2|\} + \varepsilon_i,\quad i = \overline{1,n}, \quad (6)$$

где k_1, k_2 – неизвестные параметры.

Структура каждой из моделей (3) – (6) схожа со структурой двухслойной нейронной сети: второй скрытый слой содержит бинарную операцию min, а в первом скрытом слое для каждой переменной комбинируются операция min и модуль. Поэтому назовем модели (3) – (6) двухслойными НЛР с двумя переменными. Как видно, каждая из этих моделей имеет по 5 неизвестных параметров и обобщает НЛР (2).

Стоит отметить, что двухслойная НЛР (4) по внешнему виду схожа с так называемой вложенной кусочно-линейной регрессией [10], оцениваемой с помощью метода наименьших модулей. Разница между ними в том, что в модели (4) присутствуют дополнительные неизвестные параметры k, α_0, α_1.

Аналогично, используя вместо объясняющих переменных в модульной регрессии (1) модульные и неэлементарные конструкции, получим еще 4 новые спецификации регрессионных моделей:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \left| \left| x_{i1} - \lambda_1 \right| - \varphi_1 \right| + \alpha_2 \left| \left| x_{i2} - \lambda_2 \right| - \varphi_2 \right| + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \left| \min\{x_{i1}, k_1 \cdot x_{i2}\} - \varphi_1 \right| + \alpha_2 \left| \min\{x_{i1}, k_2 \cdot x_{i2}\} - \varphi_2 \right| + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{8}$$

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \left| \left| x_{i1} - \lambda_1 \right| - \varphi_1 \right| + \alpha_2 \left| \min\{x_{i1}, k_2 \cdot x_{i2}\} - \varphi_2 \right| + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{9}$$

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \left| \min\{x_{i1}, k_1 \cdot x_{i2}\} - \varphi_1 \right| + \alpha_2 \left| \left| x_{i2} - \lambda_2 \right| - \varphi_2 \right| + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{10}$$

где φ_1, φ_2 – неизвестные параметры.

Также будем называть модели (7) – (10) двухслойными НЛР с двумя переменными. Во втором их скрытом слое содержатся операции модуль, а в первом – операции min и модуль. Каждая из этих моделей имеет уже по 6 неизвестных параметров.

Введем основанный на алгоритмах «OLS-mod» и «OLS-min» универсальный алгоритм «OLS-mod&min» приближенного МНК оценивания двухслойных НЛР (3) – (10).

Шаг 1. В зависимости от выбранной модели определить области возможных значений неизвестных параметров на первом скрытом слое. При этом возможна одна из следующих четырех ситуаций:

1) если переменные x_1 и x_2 преобразуются операцией модуль, то область

$$D_1 : x_{\min}^1 \le \lambda_1 \le x_{\max}^1, x_{\min}^2 \le \lambda_2 \le x_{\max}^2; \tag{11}$$

2) если переменная x_1 преобразуется операцией модуль, а переменная x_2 – min, то

$$D_2 : x_{\min}^1 \le \lambda_1 \le x_{\max}^1, \; k_{нижн} \le k_2 \le k_{верхн}; \tag{12}$$

3) если переменная x_1 преобразуется операцией min, а переменная x_2 – модуль, то

$$D_3 : k_{нижн} \le k_1 \le k_{верхн}, \; x_{\min}^2 \le \lambda_2 \le x_{\max}^2; \tag{13}$$

4) если переменные x_1 и x_2 преобразуются операцией min, то

$$D_4 : k_{нижн} \le k_1 \le k_{верхн}, k_{нижн} \le k_2 \le k_{верхн}. \tag{14}$$

В одном из этих прямоугольников сформировать сеть точек размера $(p + 2)\times(p + 2)$.

Шаг 2. Используя сформированную на первом слое сеть, для каждой ее точки сформировать в зависимости от формы модели области возможных значений неизвестных параметров на втором скрытом слое. Пусть $z_{i1} = \left| x_{i1} - \lambda_1 \right|$, $i = \overline{1,n}$, если на первом слое выбрана операция модуль для x_1; $z_{i1} = \min\{x_{i1}, k_1 \cdot x_{i2}\}$, $i = \overline{1,n}$, если на первом слое выбрана операция min для x_1; $z_{i2} = \left| x_{i2} - \lambda_2 \right|$, $i = \overline{1,n}$, если на первом слое выбрана операция модуль для x_2; $z_{i2} = \min\{x_{i1}, k_2 \cdot x_{i2}\}$, $i = \overline{1,n}$, если на первом слое выбрана операция min для x_2. Возможна одна из следующих двух ситуаций.

1. Если выбрана одна из моделей (3) – (6), то каждой точке сформированной на предыдущем шаге сети при условиях $z_{i2} \ne 0$, $i = \overline{1,n}$ поставить в соответствие промежуток $k_{нижн} \le k \le k_{верхн}$, где

$$k_{нижн} = \min\left\{ \frac{z_{11}}{z_{12}}, \frac{z_{21}}{z_{22}}, ..., \frac{z_{n1}}{z_{n2}} \right\},$$

$$k_{верхн} = \max\left\{ \frac{z_{11}}{z_{12}}, \frac{z_{21}}{z_{22}}, ..., \frac{z_{n1}}{z_{n2}} \right\},$$

на котором выбрать равномерно p точек. Перебирая все $(p + 2)^3$ точек полученного трехмерного массива, оценить все возможные НЛР с помощью МНК и выбрать из них модель с минимальной величиной суммы квадратов остатков.

2. Если выбрана одна из моделей (7) – (10), то каждой точке сформированной на предыдущем шаге сети поставить в соответствие область $P : z_{\min}^1 \le \varphi_1 \le z_{\max}^1, z_{\min}^2 \le \varphi_2 \le z_{\max}^2$, где $z_{\min}^1$, $z_{\max}^1$, $z_{\min}^2$, $z_{\max}^2$ – минимальные и максимальные значения переменных z_1 и z_2, в которой сформировать сеть точек размера $(p + 2)\times(p + 2)$. Перебирая все $(p + 2)^4$ точек полученного четырехмерного массива, оценить все возможные НЛР с помощью МНК и выбрать из них регрессию с минимальной величиной суммы квадратов остатков.

К сожалению, идентификация областей неизвестных параметров на первом скрытом слое по формулам (11) – (14) в алгоритме «OLS-mod&min» гарантирует нахождение близких к оптимальным МНК-оценок при большом p не для всех из моделей (3) – (10). Покажем далее, что такая гарантия дается только для регрессий (7) – (10).

Рассмотрим двухслойную модульную модель с одной переменной вида:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \left| \left| x_{i1} - \lambda_1 \right| - \varphi_1 \right| + \varepsilon_i, \; i = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Пусть $\lambda_1 \ge x_{\max}^1$. Возьмем с этого промежутка случайным образом два любых различных числа, например $\lambda_1 = \lambda^\#$, $\lambda_1 = \lambda^\# + \Delta$, где Δ – разница между этими числами. Тогда модель (15) в этих точках принимает формы:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \left|\lambda^\# - x_{i1} - \varphi_1\right| + \varepsilon_i, \; i = \overline{1,n}, \quad (16)$$

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \left|\lambda^\# - x_{i1} + \left(\Delta - \varphi_1\right)\right| + \varepsilon_i, \; i = \overline{1,n}. \quad (17)$$

Если в (17) переобозначить величину $(\Delta - \varphi_1)$ любой переменной, то получим модель (16). Из этого следует, что выбор любой точки с промежутка $\lambda_1 \ge x^1_{\max}$ не меняет величину суммы квадратов остатков регрессии (15) в точке оптимума.

Пусть $\lambda_1 \le x^1_{\min}$. Также возьмем с этого промежутка два любых числа $\lambda_1 = \lambda^\#$ и $\lambda_1 = \lambda^\# + \Delta$. Тогда модель (15) в этих точках принимает формы:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \left|x_{i1} - \lambda^\# - \varphi_1\right| + \varepsilon_i, \; i = \overline{1,n}, \quad (18)$$

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \left|x_{i1} - \lambda^{\#\#} - \left(\Delta + \varphi_1\right)\right| + \varepsilon_i, \; i = \overline{1,n}. \quad (19)$$

Если в (19) переобозначить величину $(\Delta + \varphi_1)$ любой переменной, то получим модель (18). Следовательно, выбор любой точки с промежутка $\lambda_1 \le x^1_{\min}$ не влияет на величину суммы квадратов остатков регрессии (15) в точке оптимума. Таким образом, имеет смысл оценивать модель (15) только при $x^1_{\min} \le \lambda_1 \le x^1_{\max}$.

Рассмотрим двухслойную неэлементарную модель с одной переменной вида:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \left|\min\left\{x_{i1}, k_1 \cdot x_{i2}\right\} - \varphi_1\right| + \varepsilon_i, \; i = \overline{1,n}. \quad (20)$$

Пусть $k_1 \ge k_{\text{верхн}}$. Тогда модель (20) принимает форму $y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \left|x_{i1} - \varphi_1\right| + \varepsilon_i, \; i = \overline{1,n}$. Из этого следует, что выбор любой точки с промежутка $k_1 \ge k_{\text{верхн}}$ не меняет величину суммы квадратов остатков регрессии (20) в точке оптимума.

Пусть $k_1 \le k_{\text{нижн}}$. Возьмем с этого промежутка случайным образом два любых различных числа, например $k_1 = k^\#$, $k_1 = k^\# \cdot \Delta$, $\Delta > 0$. Тогда модель (20) в этих точках принимает формы:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \left|k^\# \cdot x_{i2} - \varphi_1\right| + \varepsilon_i, \; i = \overline{1,n}, \quad (21)$$

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \left|k^\# \cdot \Delta \cdot x_{i2} - \varphi_1\right| + \varepsilon_i, \; i = \overline{1,n}. \quad (22)$$

Если в (22) вынести за знак модуля Δ и переобозначить величины $\alpha_1 \cdot \Delta$ и φ_1 / Δ любыми переменными, то получим модель (21). Следовательно, выбор любой точки с промежутка $k_1 \le k_{\text{нижн}}$ не влияет на величину суммы квадратов остатков регрессии (20) в точке оптимума. Таким образом, имеет смысл оценивать модель (20) только при $k_{\text{нижн}} \le k_1 \le k_{\text{верхн}}$.

Представленные рассуждения позволяют сделать вывод, что оптимальные оценки параметров первого скрытого слоя двухслойных НЛР (7) – (10) принадлежат промежуткам (11) – (14). Поэтому, чем больше выбрано значение p, тем ближе полученные с помощью алгоритма «OLS-mod&min» МНК-оценки моделей (7) – (10) к оптимальным.

Результаты исследования и их обсуждение

Для проведения вычислительного эксперимента были использованы статистические данные из источника [11, с. 478] о сменной добыче угля на одного рабочего y (в тоннах), мощности пласта x_1 (в метрах) и уровне механизации работ x_2 (в процентах), характеризующие процесс добычи угля в 10 шахтах.

Сначала по этим данным с помощью МНК была построена линейная регрессия:

$$\tilde{y} = -3,5393 + 0,8539 x_1 + 0,367 x_2, \quad (23)$$

затем с использованием программы МОДУЛИР-1 модульная регрессия (1):

$$\tilde{y} = 8,611 - 1,264 \left|x_1 - 11,216\right| + 0,383 \left|x_2 - 4\right|, \quad (24)$$

после чего с использованием программы НЕЭЛИН НЛР (2) с бинарной операцией min

$$\tilde{y} = -2,351 + 0,9902 \min\left\{x_1, 1.854 x_2\right\}. \quad (25)$$

Коэффициенты детерминации R^2 регрессий (23) – (25) равны соответственно 0,8116, 0,8629 и 0,8149.

Предложенный алгоритм «OLS-mod&min» был реализован в виде скрипта на языке hansl пакета Gretl. Сначала с помощью этого скрипта были оценены двухслойные НЛР (3) – (6) с бинарной операцией min на втором слое при $p = 50$:

$$\tilde{y} = 5,004 + 1,8107 \min\left\{\left|x_{i1} - 8,3137\right|, 0.6648 \cdot \left|x_{i2} - 4\right|\right\}, \quad (26)$$

$$\tilde{y} = -2,358 + 1,2984 \min\left\{\min\left\{x_{i1}, 1.4167 \cdot x_{i2}\right\}, 0.7631 \cdot \min\left\{x_{i1}, 1.9069 \cdot x_{i2}\right\}\right\}, \quad (27)$$

$$\tilde{y} = 0,226 + 11,344 \min\left\{\left|x_{i1} - 8,4706\right|, 0.0866 \cdot \min\left\{x_{i1}, 1.2206 \cdot x_{i2}\right\}\right\}, \quad (28)$$

$$\tilde{y} = -5,177 + 1,3312 \min\left\{\min\left\{x_{i1}, 1.9069 \cdot x_{i2}\right\}, 21.346 \cdot \left|x_{i2} - 7,451\right|\right\}. \quad (29)$$

Коэффициенты детерминации НЛР (26) – (29) равны соответственно 0,935916, 0,814875, 0,936727, 0,932029.

Затем с помощью скрипта были оценены двухслойные НЛР (7) – (10) с операцией модуль на втором слое при $p = 50$:

$$\tilde{y} = 7,635 - 1,292\left\|x_{i1} - 11,372\right| - 0,431\right| + 1,669\left\|x_{i2} - 5,255\right| - 1,28\right|, \quad (30)$$

$$\tilde{y} = 8,811 + 1,015\left|\min\left\{x_{i1}, x_{i2}\right\} - 6,275\right| - 1,426\left|\min\left\{x_{i1}, 1.784 \cdot x_{i2}\right\} - 11,237\right|, \quad (31)$$

$$\tilde{y} = 22,832 - 5,187\left\|x_{i1} - 8,235\right| - 3,488\right| - 3,192\left|\min\left\{x_{i1}, 1.735 \cdot x_{i2}\right\} - 8,131\right|, \quad (32)$$

$$\tilde{y} = 8,345 - 1,28\left|\min\left\{x_{i1}, 2.176 \cdot x_{i2}\right\} - 11,372\right| + 1,493\left\|x_{i2} - 5,255\right| - 1,28\right|. \quad (33)$$

Коэффициенты детерминации НЛР (30) – (33) равны соответственно 0,974875, 0,965205, 0,909793, 0,976162.

Заключение

В работе с использованием бинарной операции min (max) и операции модуль предложено 8 новых спецификаций регрессионных моделей, названных двухслойными НЛР. Разработан алгоритм их приближенного оценивания с помощью МНК. Успешно проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого почти все новые модели, кроме (27), по качеству аппроксимации оказались лучше известных регрессий. При этом точнее оказались двухслойные НЛР с модулем на втором слое.

Список литературы

1. Janiesch C., Zschech P., Heinrich K. Machine learning and deep learning // Electronic Markets. 2021. Vol. 31. No. 3. P. 685-695.

2. Белозеров И.А., Судаков В.А. Исследование моделей машинного обучения для сегментации медицинских изображений // Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2022. № 37. 15 с.

3. Майоров К.Н. Применение алгоритмов машинного обучения для решения задач нефтегазовой сферы // Интеллектуальные системы в производстве. 2021. Т. 19, № 3. С. 55-64.

4. Энгель Е.А., Энгель Н.Е. Методы машинного обучения для задач прогнозирования и максимизации выработки электроэнергии солнечной электростанции // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2023. № 2. С. 146-170.

5. Montgomery D.C., Peck E.A., Vining G.G. Introduction to linear regression analysis. John Wiley & Sons, 2021. 704 p.

6. Базилевский М.П. Оценивание модульных линейных регрессионных моделей с помощью метода наименьших модулей // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. 2023. № 45. С. 130-146.

7. Базилевский М.П. Программное обеспечение для оценивания модульных линейных регрессий // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2023. № 3 (31). С. 136-146.

8. Базилевский М.П. Оценивание параметров неэлементарных линейных регрессий методом наименьших квадратов // Экономика. Информатика. 2023. Т. 50, № 2. С. 367-379.

9. Мазуров Б.Т., Падве В.А. Метод наименьших квадратов (статика, динамика, модели с уточняемой структурой) // Вестник СГУГиТ. 2017. Т. 22, № 2. С. 22-35.

10. Носков С.И. Идентификация параметров простой формы вложенной кусочно-линейной регрессии // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2023. № 3 (67). С. 57-61.

11. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. 573 с.