СТАТЬЯ

УДК 517.977.58
DOI 10.17513/snt.40237

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РАЗНЫМИ ТЕМПАМИ ДВИЖЕНИЙ

Аширбаев Б.Ы.

Кыргызско-Российский Славянский университет имени Б.Н. Ельцина, Бишкек, e-mail: ashirbaev-58@mail.ru

Цель исследования – конструирование линейного регулятора для дискретной стохастической стационарной системы с разными темпами движений. С использованием методов разделения переменных состояния систем с разными темпами движений и интегральных многообразий, исходная задача конструирования линейного регулятора разделена на две подзадачи, решения которых находятся независимо друг от друга. Алгоритмы аналитических решений подзадач построены на основе второго метода Ляпунова, свойств математических ожиданий и ковариационных матриц случайных процессов системы с разными темпами движений. В процессе решений задачи выведены соотношения, определяющие математические ожидания, ковариационные матрицы, матрицы усиления и функции Ляпунова. Найденные математические ожидания, ковариационные матрицы, матрицы усиления и функции Ляпунова использованы для определения линейных регуляторов обеих задач. Результатом решения двух подзадач является аналитически полученный линейный дискретный регулятор, состоящий из двух дискретных регуляторов, которые минимизируют функционалы соответствующих задач. Полученные результаты работы могут быть применены в исследовании стохастических задач оптимального управления, конструирования линейного регулятора для цифровой стохастической системы, а также в исследовании других постановок стохастических задач оптимального управления.

Ключевые слова: регулятор, многообразие, функция Ляпунова, стохастическая, ковариационная матрица, матрицы усиления

ANALYTICAL DESIGN OF A LINEAR CONTROLLER FOR A DISCRETE STOCHASTIC SYSTEM WITH DIFFERENT RATES OF MOVEMENT

Ashirbaev B.Y.

Kyrgyz-Russian Slavic University named after B.N. Yeltsin, Bishkek, e-mail: ashirbaev-58@mail.ru

The paper studies the problem of designing a linear controller for a discrete stochastic stationary system with different rates of motion. Using the methods of separating the state variables of systems with different rates of motion and integral manifolds, the original problem of designing a linear controller is divided into two subproblems, the solution of which is independent of each other. Algorithms for analytical solutions of subproblems are based on the second Lyapunov method, properties of mathematical expectations and covariance matrices of random processes of a system with different rates of motion. In the process of solving the problem, the following relationships are derived: defining mathematical expectations, covariance matrices, gain matrices and Lyapunov functions. The found mathematical expectations, covariance matrices, gain matrices and Lyapunov functions are used to determine linear controllers for both problems. The result of solving two subproblems is an analytically obtained linear discrete controller consisting of two discrete controllers that minimize the functionals of the corresponding problems. The results obtained of the work can be applied in the study of stochastic problems of optimal control, the design of a linear controller for a digital stochastic system, as well as in the study of other formulations of stochastic problems of optimal control.

Keywords: regulator, manifolds, Lyapunov function, gain matrices, stochastic, covariance matrix

Введение

Подробный анализ современных работ, посвященных исследованию методов построения решений задач синтеза линейного регулятора, имеется в [1; 2]. Кроме того, можно отметить работы [3–5], в которых за последние десять лет в различных постановках исследованы дискретные задачи синтеза оптимального регулятора. Дискретные задачи оптимального управления рассмотрены и в наших работах [6–8]. В частности, задача конструирования регулятора для дискретной управляемой системы с малым шагом в детерминированных случаях рассмотрена в работе [6, с. 16]. Данная работа является продолжением вышеуказанных работ.

Материалы и методы исследования

Задана модель объекта управления, которая описывается уравнением

$$Y(t+T)=A(\mu)Y(t)+B(\mu)u(t)+F(t), \tag{1}$$

где $Y(t)$ – вектор состояния: $Y(t)=\left(X(t)Z(t)\right)^{'}, X(t)\in R^{n},\ Z(t)\in R^{m}$;

$A(\mu)$ и $B(\mu)$ – матрицы состояния и управления:

$$A(\mu)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{\mu}A_3 & \frac{1}{\mu}A_4 \end{pmatrix},\ B(\mu)=\begin{pmatrix} B_1 \\ \frac{1}{\mu}B_2 \end{pmatrix},\ A_1-(n\times n),\ A_2-(n\times m),$$

$$A_3-(m\times n),\ A_4-(m\times m),\ B_1-(n\times r), B_2-(m\times r);$$

$u(t)$ – вектор управления; t – время переходного процесса:

$t=kT,\ k=0,1,\cdots,\ T$ – малый шаг, $0\le \mathrm{T}\le 1$, μ – малый параметр,

$0<\mu<1$ штрих обозначает транспонирование, M – математическое ожидание;

$F(t)=\left(f_1(t)\ \frac{1}{\mu}f_2(t)\right)^{'}$ – вектор внешних возмущений, последовательность взаимно независимых, гауссовских случайных векторов, некоррелированных с Y_0 и удовлетворяющих условиям:

$$M\left[F(t)\right]=0,\quad M\left[f_1(kT)f_1^{'}(jT)\right]=L_1\delta_{kj},\ \delta_{kj}=\begin{cases}1, k=n\\ 0, k\ne n\end{cases},$$

$$M\left[f_2(kT)f_2^{'}(jT)\right]=L_2\delta_{kj},\ \delta_{kj}=\begin{cases}1, k=m\\ 0, k\ne m\end{cases},$$

L_1, L_2 – симметрические, неотрицательно определенные матрицы [9, с. 41].

Начальные состояния системы (1) имеют вид

$$Y(t_0)=Y(0)=Y_0=\left(X(0)\ Z(0)\right)^{'}=\left(X_0\ Z_0\right)^{'}. \tag{2}$$

Задан критерий

$$J=M\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[Y'(kT)QY(kT)+u'(kT)u(kT)\right]+Y'(KT)PY(KT)\right\}, \tag{3}$$

где Q, P – заданные неотрицательно определенные симметрические матрицы,

$$Q=\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти управление $u^{*}(t)$, при котором функционал (3) принимает наименьшее возможное значение, при ограничениях (1) и (2).

Предположим, что выполняется следующее условие.

Условие 1. Пусть A_4 – устойчивая матрица, это означает, что собственные значения матрицы A_4 удовлетворяют неравенству $\left|Re\lambda_i\right|\le\alpha<1,\ i=\overline{1,m}$, где α – некоторая постоянная.

При выполнении условий 1 систему (1) заменим следующей эквивалентной системой с разделенными переменными [10, с. 8; 11, с. 115]:

$$\tilde{X}(t+T)=\tilde{A}_1(\mu)\tilde{X}(t)+\tilde{B}_1(\mu)u(t)+\tilde{f}_1(t,\mu), \tag{4}$$

$$\mu\tilde{Z}(t+T)=\tilde{A}_4(\mu)\tilde{Z}(t)+\tilde{B}_2(\mu)u(t)+f_2(t,\mu), \tag{5}$$

где $\tilde{X}(t,\mu)=X(t)+\mu N(\mu)\tilde{Z}(t,\mu),\quad \tilde{Z}(t,\mu)=Z(t)-H(\mu)X(t),$ (6)

$$\tilde{A}_1(\mu) = A_1 + A_2 H(\mu),\ \tilde{A}_4(\mu) = A_4 - \mu H(\mu) A_2,$$

$$\tilde{B}_1(\mu) = B_1 + N(\mu)\tilde{B}_2(\mu),\ \tilde{B}_2(\mu) = B_2 - \mu H(\mu) B_1,$$

$$\tilde{f}_1(t) = f_1(t) + N(\mu)\tilde{f}_2(t),\ \tilde{f}_2(t) = f_2(t) - \mu H(\mu) f_1(t).$$

В соотношениях (6) матрицы $H(\mu)$, $N(\mu)$ имеют размерности $m\times n$, $n\times m$ соответственно и удовлетворяют следующим уравнениям [10, с. 8]:

$$\mu H(\mu) A_1 + \mu H(\mu) A_2 H(\mu) = A_3 + A_4 H(\mu), \tag{7}$$

$$N(\mu)\tilde{A}_4(\mu) + \mu\tilde{A}_1(\mu) N(\mu) - A_2 = 0, \tag{8}$$

Уравнения (7), (8) имеют решения, которые могут быть представлены в виде равномерно сходящихся степенных рядов [10, с. 9]:

$$H(\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i \mu^i, \quad N(\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} N_s \mu^s. \tag{9}$$

В [10, с. 9] определены матрицы H_i и N_s ($i, s = 0, 1,\ldots$) путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях μ в уравнениях (7), (8).

Начальные условия системы (4) и (5) определяются соотношениями

$$\tilde{X}(0) = \tilde{X}_0, \quad \tilde{Z}(0) = \tilde{Z}_0, \tag{10}$$

где $\tilde{X}_0(\mu) = X_0 + \mu N_0 \tilde{Z}_0, \quad \tilde{Z}_0 = Z_0 - H_0 X_0, \ H_0 = -A_4^{-1} A_3, \ N_0 = A_2 A_4^{-1}.$ (11)

При $\mu = 0$ из (6) будем иметь

$$\tilde{A}_1 \approx A_0 = A_1 + H_0 A_3, \ \tilde{A}_4 \approx A_4, \ \tilde{B}_1 \approx B_0 = B_1 - N_0 B_2, \ \tilde{B}_2(\mu) = B_2.$$

Предположим, что выполняется следующее условие.

Условие 2. Пусть A_0 – устойчивая матрица, то есть собственные значения матрицы A_0 удовлетворяют неравенству $\left|Re\lambda_j\right| \le \beta < 1, \ j = \overline{1,n},$ где β – некоторая постоянная.

При выполнении условий 1 и 2 система (1) имеет интегральные многообразия [6, с. 17; 12, с. 772]:

$$Z = H\tilde{X}, \quad X = -\mu N\tilde{Z}. \tag{12}$$

Интегральные многообразия (12) записываем в следующих формах:

$$\Omega_\nu = \left\{\left(\tilde{X}', H\tilde{X}\right) |\ \tilde{X} = X \in R^n,\ Z = H\tilde{X}, Z \in R^m, \mu \in [0,1)\right\}, \tag{13}$$

$$\Omega_\sigma = \left\{\left(\left(-\mu N\tilde{Z}\right)', \tilde{Z}\right) |\ X = -\mu N\tilde{Z} \in R^n,\ \tilde{Z} \in R^m, \mu \in [0,1)\right\},$$

где $\left(\tilde{X}', H\tilde{X}\right)$ – скалярные произведения векторов $\tilde{X}'$ и $H\tilde{X}$.

Матрицы B_1 и B_2 соответственно представим в следующих формах:

$$B_{ps}^{(1)} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(1)} & b_{12}^{(1)} & \cdots & b_{1r}^{(1)} \\ b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} & \cdots & b_{2r}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1}^{(1)} & b_{n2}^{(1)} & \cdots & b_{nr}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad B_{qs}^{(2)} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & \cdots & b_{1r}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} & \cdots & b_{2r}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1}^{(2)} & b_{m2}^{(2)} & \cdots & b_{mr}^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

$$p = \overline{1,n}, \quad q = \overline{1,m}, \quad s = \overline{1,r}.$$

Тогда с учетом (6) и (14) имеем

$$\tilde{B}_{qs}^{(2)} = B_{qs}^{(2)} - \mu H B_{ps}^{(1)} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & \cdots & b_{1r}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} & \cdots & b_{2r}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1}^{(2)} & b_{m2}^{(2)} & \cdots & b_{mr}^{(2)} \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} \mu h_{11} & \mu h_{12} & \cdots & \mu h_{1n} \\ \mu h_{21} & \mu h_{22} & \cdots & \mu h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mu h_{m1} & \mu h_{m2} & \cdots & \mu h_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11}^{(1)} & b_{12}^{(1)} & \cdots & b_{1r}^{(1)} \\ b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} & \cdots & b_{2r}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1}^{(1)} & b_{n2}^{(1)} & \cdots & b_{nr}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11}^{(2)} & \tilde{b}_{12}^{(2)} & \cdots & \tilde{b}_{1r}^{(2)} \\ \tilde{b}_{21}^{(2)} & \tilde{b}_{22}^{(2)} & \cdots & \tilde{b}_{2r}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{b}_{m1}^{(2)} & \tilde{b}_{m2}^{(2)} & \cdots & \tilde{b}_{mr}^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{b}_{11}^{(2)} = b_{11}^{(2)} - \mu\left(h_{11}b_{11}^{(1)} + h_{12}b_{21}^{(1)} + \cdots + h_{1n}b_{n1}^{(1)}\right),$$

$$\tilde{b}_{12}^{(2)} = b_{12}^{(2)} - \mu\left(h_{11}b_{12}^{(1)} + h_{12}b_{22}^{(1)} + \cdots + h_{1n}b_{n2}^{(1)}\right),\cdots,$$

$$\tilde{b}_{1r}^{(2)} = b_{1r}^{(2)} - \mu\left(h_{11}b_{1r}^{(1)} + h_{12}b_{2r}^{(1)} + \cdots + h_{1n}b_{nr}^{(1)}\right),$$

$$\tilde{b}_{21}^{(2)} = b_{21}^{(2)} - \mu\left(h_{21}b_{11}^{(1)} + h_{22}b_{21}^{(1)} + \cdots + h_{2n}b_{n1}^{(1)}\right),$$

$$\tilde{b}_{22}^{(2)} = b_{22}^{(2)} - \mu\left(h_{21}b_{12}^{(1)} + h_{22}b_{22}^{(1)} + \cdots + h_{2n}b_{n2}^{(1)}\right),\cdots,$$

$$\tilde{b}_{2r}^{(2)} = b_{2r}^{(2)} - \mu\left(h_{21}b_{1r}^{(1)} + h_{22}b_{2r}^{(1)} + \cdots + h_{2n}b_{nr}^{(1)}\right),\ \cdots,$$

$$\tilde{b}_{m1}^{(2)} = b_{m1}^{(2)} - \mu\left(h_{r1}b_{11}^{(1)} + h_{r2}b_{21}^{(1)} + \cdots + h_{rn}b_{n1}^{(1)}\right),$$

$$\tilde{b}_{m2}^{(2)} = b_{m2}^{(2)} - \mu\left(h_{r1}b_{12}^{(1)} + h_{r2}b_{22}^{(1)} + \cdots + h_{rn}b_{n2}^{(1)}\right),\cdots,$$

$$\tilde{b}_{mr}^{(2)} = b_{mr}^{(2)} - \mu\left(h_{r1}b_{1r}^{(1)} + h_{r2}b_{2r}^{(1)} + \cdots + h_{rn}b_{nr}^{(1)}\right).$$

$$\tilde{B}_{ps}^{(1)} = B_{ps}^{(1)} + N\tilde{B}_{qs}^{(2)} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(1)} & b_{12}^{(1)} & \cdots & b_{1r}^{(1)} \\ b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} & \cdots & b_{2r}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1}^{(1)} & b_{n2}^{(1)} & \cdots & b_{nr}^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1m} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n_{n1} & n_{n2} & \cdots & n_{nm} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11}^{(2)} & \tilde{b}_{12}^{(2)} & \cdots & \tilde{b}_{1r}^{(2)} \\ \tilde{b}_{21}^{(2)} & \tilde{b}_{22}^{(2)} & \cdots & \tilde{b}_{2r}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{b}_{m1}^{(2)} & \tilde{b}_{m2}^{(2)} & \cdots & \tilde{b}_{mr}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11}^{(1)} & \tilde{b}_{12}^{(1)} & \cdots & \tilde{b}_{1r}^{(1)} \\ \tilde{b}_{21}^{(1)} & \tilde{b}_{22}^{(1)} & \cdots & \tilde{b}_{2r}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{b}_{n1}^{(1)} & \tilde{b}_{n2}^{(1)} & \cdots & \tilde{b}_{nr}^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{b}_{11}^{(1)} = b_{11}^{(1)} + n_{11}\tilde{b}_{11}^{(2)} + n_{12}\tilde{b}_{21}^{(2)} + \cdots + n_{1m}\tilde{b}_{n1}^{(2)},$$

$$\tilde{b}_{12}^{(1)} = b_{12}^{(1)} + n_{11}\tilde{b}_{12}^{(2)} + n_{12}\tilde{b}_{22}^{(2)} + \cdots + n_{1m}\tilde{b}_{n2}^{(2)},\cdots,$$

$$\tilde{b}_{1r}^{(1)} = b_{1r}^{(1)} + n_{11}\tilde{b}_{1r}^{(2)} + n_{12}\tilde{b}_{2r}^{(2)} + \cdots + n_{1m}\tilde{b}_{nr}^{(2)},$$
$$\tilde{b}_{21}^{(1)} = b_{21}^{(1)} + n_{21}\tilde{b}_{11}^{(2)} + n_{22}\tilde{b}_{21}^{(2)} + \cdots + n_{2m}\tilde{b}_{m1}^{(2)},$$
$$\tilde{b}_{22}^{(1)} = b_{22}^{(1)} + n_{21}\tilde{b}_{12}^{(2)} + n_{22}b_{22}^{(2)} + \cdots + n_{2m}\tilde{b}_{m2}^{(2)}, \cdots,$$
$$\tilde{b}_{2r}^{(1)} = b_{2r}^{(1)} + n_{21}\tilde{b}_{1r}^{(2)} + n_{22}b_{2r}^{(2)} + \cdots + n_{2m}\tilde{b}_{mr}^{(2)}, \cdots,$$
$$\tilde{b}_{m1}^{(1)} = b_{m1}^{(1)} + n_{r1}\tilde{b}_{11}^{(2)} + n_{r2}b_{21}^{(2)} + \cdots + n_{rm}\tilde{b}_{m1}^{(2)},$$
$$\tilde{b}_{n2}^{(1)} = b_{n2}^{(1)} + n_{r1}\tilde{b}_{12}^{(2)} + n_{r2}b_{22}^{(2)} + \cdots + n_{rm}\tilde{b}_{m2}^{(2)}, \cdots,$$
$$\tilde{b}_{nr}^{(1)} = b_{nr}^{(1)} + n_{r1}\tilde{b}_{1r}^{(2)} + n_{r2}b_{2r}^{(2)} + \cdots + n_{rm}\tilde{b}_{mr}^{(2)}.$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

$$\left(\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)', H\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right) \in \Omega_\nu, \quad \left(\left(-N\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)', \tilde{B}_{qs}^{(2)}\right) \in \Omega_\sigma. \tag{15}$$

При выполнении условий (15) вместо исходной задачи (1)–(3) имеем задачу минимизации функционала (3) при ограничениях (4) и (5), при этом оптимальное управление $u^*(t)$ можно представить в форме [6, с. 18]:

$$u^*(t) = \begin{cases} -\tilde{B}_{ps}^{(1)}\text{È}_\nu \tilde{X}(t), \tilde{X} \in R^n, \\ -\tilde{B}_{qs}^{(2)}\text{È}_\sigma \tilde{Z}(t), \tilde{Z} \in R^m, \end{cases} \tag{16}$$

где $\Theta_\nu - (n \times n)$, $\Theta_\sigma - (m \times m)$ матрицы усиления, которые в процессе решения задачи определяются.

Таким образом, при выполнении условий 1, 2 и 15, задачу (1)–(3) представим в виде следующих двух подзадач, решения которых находится независимо друг от друга.

Задача *A*. Найти

$$J_\nu = M\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[\tilde{X}'(kT)Q_\nu\tilde{X}(kT) + u'(kT)u(kT)\right] + \tilde{X}'(KT)P_\nu\tilde{X}(KT)\right\} \to min, \tag{17}$$

при ограничениях:

$$\tilde{X}(t+T) = \tilde{A}_1(\mu)\tilde{X}(t) + \tilde{B}_{ps}^{(1)}u(t) + \tilde{f}_1(t,\mu), \tag{18}$$

где $\tilde{X}(0) = \tilde{X}_0$, $Z = H\tilde{X}$, $\tilde{X} = X$, $Q_\nu = Q_1 + H'Q_2H$, $P_\nu = P_1 + H'P_2H$.

Известно [13, с. 463], что при заданном управлении справедливы следующие соотношения:

$$M\left[\tilde{X}'(t)Q_\nu\tilde{X}(t)\right] = \tilde{m}_{\tilde{x}}'(t)Q_\nu\tilde{m}_{\tilde{z}}(t) + tr\left[Q_\nu D_{\tilde{x}}(t)\right], \quad M\left[\tilde{f}_1(t)\right] = 0, \tag{19}$$

$$M\left[\tilde{f}_1(kT)\tilde{f}_1'(jT)\right] = L_1(t)\delta_{kj}, \ \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases}$$

где математическое ожидание $\tilde{m}_{\tilde{x}}(t)$ и ковариационная матрица $D_{\tilde{x}}(t)$ удовлетворяют следующим разностным уравнениям:

$$\tilde{m}_{\tilde{x}}(t+T) = \tilde{A}_1(\mu)\tilde{m}_{\tilde{x}}(t) + \tilde{B}_{ps}^{(1)}u(t), \quad \tilde{m}_{\tilde{x}}(0) = \tilde{m}_{\tilde{x}0}, \tag{20}$$

$$D_{\tilde{x}}(t+T) = \tilde{A}_1(\mu)D_{\tilde{x}}(t)\tilde{A}_1'(\mu) + L_1(t), \quad D_{\tilde{x}}(0) = D_{\tilde{x}0}. \tag{21}$$

Задача *B*. Найти

$$J_\sigma = M\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[\tilde{Z}'(kT)Q_\sigma\tilde{Z}(kT) + u'(kT)u(kT)\right] + \tilde{Z}'(KT)P_\sigma\tilde{Z}(KT)\right\} \to min, \tag{22}$$

при ограничениях:

$$\mu\tilde{Z}(t+T)=\tilde{A}_4(\mu)\tilde{Z}(t)+\tilde{B}_{qs}^{(2)}u(t)+\tilde{f}_2(t,\mu), \quad (23)$$

$$\tilde{Z}(0)=\tilde{Z}_0,\ X=-\mu N\tilde{Z},\ \ Z=\tilde{Z}+HX=\tilde{Z}-\mu HN\tilde{Z}=(E_m-\mu HN)\tilde{Z}, \quad (24)$$

где $Q_\sigma=\mu^2N'Q_1N+(E_m-\mu HN)^{'}Q_2(E_m-\mu HN),\ P_\sigma=\mu^2N'P_1N+(E_m-\mu HN)^{'}P_2(E_m-\mu HN),$

$$M\left[\tilde{Z}^{'}(t)Q_\sigma\tilde{Z}(t)\right]=\tilde{m}^{'}(t)Q_\sigma\tilde{m}(t)+tr\left[Q_\sigma D_{\tilde{z}}(t)\right],\quad M\left[\tilde{f}_2(t)\right]=0,$$

$$M\left[\tilde{f}_2(kT)\tilde{f}_2{'}(jT)\right]=L_2(t)\delta_{kj},\ \ \delta_{kj}=\begin{cases}1, & k=m,\\ 0, & k\neq m,\end{cases}$$

$$\mu\tilde{m}_{\tilde{z}}(t+T)=\tilde{A}_4(\mu)\tilde{m}_{\tilde{x}}(t)+\tilde{B}_{qs}^{(2)}u(t),\quad \tilde{m}_{\tilde{z}}(0)=\tilde{m}_{\tilde{z}0}, \quad (25)$$

$$D_{\tilde{z}}(t+T)=\tilde{A}_4(\mu)D_{\tilde{z}}(t)\tilde{A}_4^{'}(\mu)+L_2(t),\quad D_{\tilde{z}}(0)=D_{\tilde{z}0}. \quad (26)$$

Решение задачи. Рассмотрим задачу А. Для определения оптимального управления задачи А используем метод Ляпунова [6, с. 18]. Для данных задач функции Ляпунова представим в виде

$$V(\tilde{X},t)=\tilde{X}^{'}(t)\Lambda(t)\tilde{X}(t),\quad G(\tilde{Z},t)=\tilde{Z}^{'}(t)\Sigma(\mathrm{t})\tilde{Z}(t), \quad (27)$$

где Λ и Σ – положительно определенные матрицы. Тогда первые разности функции (27) соответственно можно записать в виде

$$\Delta V(\tilde{X},t)=V\left[\tilde{X}(t+T)\right]-V\left[\tilde{X}(t)\right], \quad (28)$$

$$\Delta G(\tilde{Z},t)=G\left[\tilde{Z}(t+T)\right]-G\left[\tilde{Z}(t)\right]. \quad (29)$$

Согласно методу Ляпунова первая разность функции Ляпунова должна быть отрицательна определенной. Объединив условие отрицательной определенности первой разности функции Ляпунова (27) с функционалом (17), полагаем

$$M\left\{\tilde{X}^{'}(t+T)\Lambda(t+T)\tilde{X}(t+T)-\tilde{X}^{'}(t)\Lambda(t)\tilde{X}(t)\right\}=$$

$$=-M\left\{u'(t)u(t)+\tilde{X}^{'}(t)Q_\nu\tilde{X}(t)\right\}-M\left[\tilde{X}^{'}(KT)P_\nu\tilde{X}(KT)\right]. \quad (30)$$

С учетом (16), (18) из (30) имеем

$$M\left\{\left[\tilde{X}^{'}(t)\tilde{A}_1^{'}(\mu)-\tilde{X}^{'}(t)\Theta_\nu^{'}\left(\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)^{'}\right)^2+\tilde{f}_1^{'}(t,\mu)\right]\Lambda(t+T)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\tilde{A}_1(\mu)\tilde{X}(t)-\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)^2\Theta_\nu\tilde{X}(t)+\tilde{f}_1(t,\mu)\right]-\tilde{X}^{'}(t)\Lambda(t)\tilde{X}(t)\right\}=$$

$$=-M\left\{\tilde{X}^{'}(t)\Theta_\nu^{'}\left(\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)\right)^{'}\tilde{B}_{ps}^{(1)}\Theta_\nu\tilde{X}(t)+\tilde{X}^{'}(t)Q_\nu\tilde{X}(t)\right\}-M\left[\tilde{X}^{'}(KT)P_\nu\tilde{X}(KT)\right]$$

$$M\left\{\tilde{X}^{'}(t)\left[\tilde{A}_1^{'}\Lambda(t+T)\tilde{A}_1-\tilde{A}_1^{'}\Lambda(t+T)\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)^2\Theta_\nu-\theta_\nu^{'}\left(\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)^{'}\right)^2\Lambda(t+T)\tilde{A}_1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\theta_\nu^{'}\left(\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)^{'}\right)^2\Lambda(t+T)\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)^2\Theta_\nu-\Lambda(t)\right]\tilde{X}(t)\right\}+M\left[\tilde{f}_1(kT)\Lambda(t+T)\tilde{f}_1{'}(jT)\right]=$$

$$=-M\left\{\tilde{X}^{'}(t)\left[\Theta_\nu^{'}\left(\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)\right)^{'}\tilde{B}_{ps}^{(1)}\Theta_\nu+Q_\nu\right]\tilde{X}(t)\right\}-M\left[\tilde{X}^{'}(KT)P_\nu\tilde{X}(KT)\right].$$

Из последнего равенства с учетом (19) получаем

$$\tilde{m}_{\tilde{x}}'(t)\Bigg(\tilde{A}_1'\Lambda(t+T)\tilde{A}_1-\tilde{A}_1'\Lambda(t+T)\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)^2\Theta_\nu-\theta_\nu'\left(\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)'\right)^2\Lambda(t+T)\tilde{A}_1+$$

$$+\theta_\nu'\left(\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)'\right)^2\Lambda(t+T)\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)^2\Theta_\nu-\Lambda(t)\Bigg)\tilde{m}_{\tilde{x}}(t)+$$

$$+tr\Bigg[\Bigg(\tilde{A}_1'\Lambda(t+T)\tilde{A}_1-\tilde{A}_1'\Lambda(t+T)\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)^2\Theta_\nu-\theta_\nu'\left(\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)'\right)^2\Lambda(t+T)\tilde{A}_1+$$

$$+\theta_\nu'\left(\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)'\right)^2\Lambda(t+T)\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)^2\Theta_\nu-\Lambda(t)\Bigg)D_{\tilde{z}}(t)\Bigg]+\Lambda(t+T)L_1(t)=$$

$$=\tilde{m}_{\tilde{x}}'(t)\left(-\Theta_\nu'\left(\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)\right)'\tilde{B}_{ps}^{(1)}\Theta_\nu-Q_\nu\right)\tilde{m}_{\tilde{x}}(t)+tr\left[\left(-\Theta_\nu'\left(\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)\right)'\tilde{B}_{ps}^{(1)}\Theta_\nu-Q_\nu\right)D_{\tilde{z}}(t)\right]-$$

$$-\tilde{m}_{\tilde{x}}'(KT)P_\nu\tilde{m}_{\tilde{x}}(KT). \qquad (31)$$

При выполнении условий 1, 2 и 15 решения уравнения (20), (21) существуют, также существуют: Θ_ν – матрица усиления управляющей функции (16) и $\Lambda(t)$ – матрица функции Ляпунова (27), как решения следующих алгебраических уравнений:

$$\Lambda(t)=\tilde{A}_1'\Lambda(t+T)\tilde{A}_1-\tilde{A}_1'\Lambda(t+T)\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)^2\Theta_\nu-$$

$$-\theta_\nu'\left(\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)'\right)^2\Lambda(t+T)\tilde{A}_1+\theta_\nu'\left(\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)'\right)^2\Lambda(t+T)\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)^2\Theta_\nu, \qquad (32)$$

$$\Theta_\nu'\left(\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)\right)'\tilde{B}_{ps}^{(1)}\Theta_\nu+Q_\nu=0,$$

$$\Lambda(t+T)=-\tilde{m}_{\tilde{x}}'(KT)P_\nu\tilde{m}_{\tilde{x}}(KT)L_1^{-1}(t).$$

Тогда равенство (31) будет справедливым.

Теперь рассмотрим задачу B.

$$M\left\{\tilde{Z}'(t+T)\Sigma(t+T)\tilde{Z}(t+T)-\tilde{Z}'(t)\Sigma(t)\tilde{Z}(t)\right\}=$$

$$=-M\left\{u'(t)u(t)+\tilde{Z}'(t)Q_\sigma\tilde{Z}(t)\right\}-M\left[\tilde{Z}'(KT)P_\sigma\tilde{Z}(KT)\right]. \qquad (33)$$

С учетом (16), (23) из (33) имеем

$$M\left\{\left[\frac{1}{\mu}\tilde{Z}'(t)\tilde{A}_4'(\mu)-\frac{1}{\mu}\tilde{Z}'(t)\Theta_\sigma'\left(\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)'\right)^2+\frac{1}{\mu}\tilde{f}_2'(t,\mu)\right]\Sigma(t+T)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{\mu}\tilde{A}_4(\mu)\tilde{Z}(t)-\frac{1}{\mu}\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^2\Theta_\sigma\tilde{Z}(t)+\frac{1}{\mu}\tilde{f}_2(t,\mu)\right]-\tilde{Z}'(t)\Sigma(t)\tilde{Z}(t)\right\}=$$

$$=-M\left\{\tilde{Z}'(t)\Theta_\sigma'\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)'\tilde{B}_{qs}^{(2)}\Theta_\sigma\tilde{Z}(t)+\tilde{Z}'(t)Q_\sigma\tilde{Z}(t)\right\}-M\left[\tilde{Z}'(KT)P_\sigma\tilde{Z}(KT)\right].$$

$$M\left\{\tilde{Z}'(t)\frac{1}{\mu}\left[\tilde{A}_4'\Sigma(t+T)\tilde{A}_4-\tilde{A}_4'\Sigma(t+T)\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^2\Theta_\sigma-\theta_\sigma'\left(\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)'\right)^2\Sigma(t+T)\tilde{A}_4+\right.\right.$$

$$+\theta_\sigma^{'}\left(\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^{'}\right)^2\Sigma(t+T)\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^2\Theta_\sigma-\mu\Sigma(t)\Bigg]\tilde{Z}(t)\Bigg\}+\frac{1}{\mu^2}M\left[\tilde{f}_1(kT)\Sigma(t+T)\tilde{f}_1{}'(jT)\right]=$$

$$=-M\left\{\tilde{Z}^{'}(t)\Theta_\sigma^{'}\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^{'}\tilde{B}_{qs}^{(2)}\Theta_\sigma\tilde{Z}(t)+\tilde{Z}^{'}(t)Q_\sigma\tilde{Z}(t)\right\}-M\left[\tilde{Z}^{'}(KT)P_\sigma\tilde{Z}(KT)\right].$$

Из последнего равенства при любом $\tilde{Z}(t)$ с учетом (24) получаем

$$\tilde{m}_{\tilde{z}}^{'}(t)\frac{1}{\mu}\Bigg(\tilde{A}_4^{'}\Sigma(t+T)\tilde{A}_4-\tilde{A}_4^{'}\Sigma(t+T)\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^2\Theta_\sigma-\theta_\sigma^{'}\left(\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^{'}\right)^2\Sigma(t+T)\tilde{A}_4+$$

$$+\theta_\sigma^{'}\left(\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^{'}\right)^2\Sigma(t+T)\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^2\Theta_\sigma-\mu\Sigma(t)\Bigg)\tilde{m}_{\tilde{z}}(t)+$$

$$+\frac{1}{\mu}tr\Bigg[\Bigg(\tilde{A}_4^{'}\Sigma(t+T)\tilde{A}_4-\tilde{A}_4^{'}\Sigma(t+T)\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^2\Theta_\sigma-\theta_\sigma^{'}\left(\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^{'}\right)^2\Sigma(t+T)\tilde{A}_4+$$

$$+\theta_\sigma^{'}\left(\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^{'}\right)^2\Sigma(t+T)\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^2\Theta_\sigma-\mu\Sigma(t+T)\Bigg)D_{\tilde{z}}(t)\Bigg]+\frac{1}{\mu^2}\Sigma(t+T)L_2(t)=$$

$$=\tilde{m}_{\tilde{z}}^{'}(t)\left(-\Theta_\sigma^{'}\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^{'}\tilde{B}_{qs}^{(2)}\Theta_\sigma-Q_\sigma\right)\tilde{m}_{\tilde{z}}(t)+tr\left[\left(-\Theta_\sigma^{'}\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^{'}\tilde{B}_{qs}^{(2)}\Theta_\sigma-Q_\sigma\right)D_{\tilde{z}}(t)\right]-$$

$$-\tilde{m}_{\tilde{z}}^{'}(KT)P_\sigma\tilde{m}_{\tilde{z}}(KT). \qquad (34)$$

При выполнении условий 1, 2 и 15 решения уравнения (25), (26) существуют, также существуют: Θ_σ – матрица усиления управляющей функции (16) и $\Sigma(t)$ – матрица функции Ляпунова (27), как решения следующих алгебраических уравнений:

$$\Sigma(t)=\frac{1}{\mu^2}\Bigg(\tilde{A}_4^{'}\Sigma(t+T)\tilde{A}_4-\tilde{A}_4^{'}\Sigma(t+T)\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^2\Theta_\sigma-\theta_\sigma^{'}\left(\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^{'}\right)^2\Sigma(t+T)\tilde{A}_4+$$

$$+\theta_\sigma^{'}\left(\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^{'}\right)^2\Sigma(t+T)\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^2\Theta_\sigma\Bigg), \qquad (35)$$

$$\Theta_\sigma^{'}\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^{'}\tilde{B}_{qs}^{(2)}\Theta_\sigma+Q_\sigma=0,\quad \Sigma(t+T)=-\mu^2\tilde{m}_{\tilde{z}}^{'}(KT)P_\sigma\tilde{m}_{\tilde{z}}(KT)L_2^{-1}(t).$$

Тогда равенство (34) будет справедливым. Сформулируем следующее утверждение в виде теоремы, в которой содержатся основные результаты данной работы.

Теорема. *Пусть выполняются условия* 1, 2 и 15. *Тогда в интегральных многообразиях (13) линейные дискретные регуляторы* $u_{\tilde{x}}^*(t)$ *и* $u_{\tilde{z}}^*(t)$ *в виде обратной связи определяются соответственно функциями:*

1) для задачи A:

$$u_{\tilde{x}}^*(t)=-C_{\tilde{x}}(t)\tilde{m}_{\tilde{x}}(t), \qquad (36)$$

где $C_{\tilde{x}}(t)=\left[E_n+\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)^{'}\Lambda(t+T)\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right]^{-1}\tilde{B}_{ps}^{(1)}\Lambda(t+T)\tilde{A}_1(\mu);$

2) для задачи B:

$$u_{\tilde{z}}^*(t)=-C_{\tilde{z}}(t)\tilde{m}_{\tilde{z}}(t), \qquad (37)$$

$$C_{\tilde{z}}(t)=\left[\mu^2E_m+\left(\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right)^{'}\Psi(t+T)\tilde{B}_{qs}^{(2)}\right]^{-1}\tilde{B}_{qs}^{(2)}\Psi(t+T)\tilde{A}_4(\mu);$$

3) линейные дискретные регуляторы $u_{\tilde{x}}^{*}(t)$ и $u_{\tilde{z}}^{*}(t)$ *соответственно минимизируют функционалы (17), (22) и их минимальные значения определяются соотношениями*

$$\min J_{\nu} = \tilde{m}_{\tilde{x}}'(0)\Lambda(0)\tilde{m}_{\tilde{x}}(0) + tr\left[\Lambda(0)D_{\tilde{x}}(0)\right], \quad (38)$$

$$\min J_{\sigma} = \tilde{m}_{\tilde{z}}'(0)\Sigma(0)\tilde{m}_{\tilde{z}}(0) + tr\left[\Sigma(0)D_{\tilde{x}}(0)\right]. \quad (39)$$

Доказательство. Докажем теорему для задачи *A*. Для того, чтобы минимизировать функционал (17), находим

$$M\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\Delta V\left[\tilde{X},kT\right]\right\} = M\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left\{V\left[\tilde{X}\left((k+1)T\right)\right] - V\left[\tilde{X}(kT)\right]\right\}\right\}, \quad (40)$$

$$M\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\Delta V\left[\tilde{X},kT\right]\right\} = M\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{X}'(KT)\Lambda(KT)\tilde{X}(KT) - \tilde{X}'(0)\Lambda(0)\tilde{X}(0)\right\}. \quad (41)$$

С учетом (17) и (19) из (40) имеем

$$M\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\Delta V\left[\tilde{X},kT\right]\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}M\left\{V\left[\tilde{X}\left((k+1)T\right)\right] - V\left[\tilde{X}(kT)\right]\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}M\left\{\tilde{X}'(t+T)\Lambda(t+T)\tilde{X}(t+T) - \tilde{X}'(t)\Lambda(t)\tilde{X}(t)\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}M\left\{\left[\tilde{X}'(t)\tilde{A}_1'(\mu) - u'(t)\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)' + \tilde{f}_1'(t,\mu)\right]\Lambda(t+T)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\tilde{A}_1(\mu)\tilde{X}(t) + \tilde{B}_{ps}^{(1)}u(t) + \tilde{f}_1(t,\mu)\right] - \tilde{X}'(t)\Lambda(t)\tilde{X}(t)\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{M\left[\tilde{X}'(t)\tilde{A}_1'(\mu)\Lambda(t+T)\tilde{A}_1(\mu)\tilde{X}(t) + u'(t)\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)'\Lambda(t+T)\tilde{A}_1(\mu)\tilde{X}(t) + \right.\right.$$

$$+ \tilde{f}_1'(t)\Lambda(t+T)\tilde{A}_1(\mu)\tilde{X}(t) + u'(t)\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)'\Lambda(t+T)\tilde{A}_1(\mu)\tilde{X}(t) +$$

$$+ u'(t)\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)'\Lambda(t+T)\tilde{B}_{ps}^{(1)}u(t) + u'(t)\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)'\Lambda(t+T)\tilde{f}_1(t) +$$

$$\left. + \tilde{f}_1'(t)\Lambda(t+T)\tilde{A}_1(\mu)\tilde{X}(t) + \tilde{f}_1'(t)\Lambda(t+T)\tilde{B}_{ps}^{(1)}u(t) + \tilde{f}_1'(t)\Lambda(t+T)\tilde{f}_1(t)\right] -$$

$$\left. - \tilde{X}'(t)\Lambda(t)\tilde{X}(t)\right\}.$$

Теперь с учетом (19) из последнего равенства получаем

$$M\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\Delta V\left[\tilde{X},kT\right]\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\tilde{m}_{\tilde{x}}'(t)\tilde{A}_1'(\mu)\Lambda(t+T)\tilde{A}_1(\mu)\tilde{m}_{\tilde{x}}(t) + \right.$$

$$+ tr\left[\tilde{A}_1'(\mu)\Lambda(t+T)\tilde{A}_1(\mu)D_{\tilde{x}}(t)\right] + 2u'(t)\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)'\Lambda(t+T)\tilde{A}_1(\mu)\tilde{m}_{\tilde{x}}(t) +$$

$$\left. + u'(t)\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)'\Lambda(t+T)\tilde{B}_{ps}^{(1)}u(t) + \Lambda(t+T)L_1(t) - \tilde{m}_{\tilde{x}}'(t)\Lambda(t)\tilde{m}_{\tilde{x}}(t) - tr\left[\Lambda(t)D_{\tilde{x}}(t)\right]\right\}. \quad (42)$$

Сравнивая правые части выражений (41) и (42), получаем равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\tilde m_{\tilde x}'(t)\tilde A_1'(\mu)\Lambda(t+T)\tilde A_1(\mu)\tilde m_{\tilde x}(t)+$$
$$+tr\Big[\tilde A_1'(\mu)\Lambda(t+T)\tilde A_1(\mu)D_{\tilde x}(t)\Big]+2u'(t)\Big(\tilde B_{ps}^{(1)}\Big)'\Lambda(t+T)\tilde A_1(\mu)\tilde m_{\tilde x}(t)+$$
$$+u'(t)\Big(\tilde B_{ps}^{(1)}\Big)'\Lambda(t+T)\tilde B_{ps}^{(1)}u(t)+\Lambda(t+T)L_1(t)-\tilde m_{\tilde x}'(t)\Lambda(t)\tilde m_{\tilde x}(t)-$$
$$-tr\Big[\Lambda(t)D_{\tilde x}(t)\Big]\Big\}-\tilde m_{\tilde x}'(KT)\Lambda(KT)\tilde m_{\tilde x}(KT)-tr\Big[\Lambda(KT)D_{\tilde x}(KT)\Big]+$$
$$+\tilde m_{\tilde x}'(0)\Lambda(0)\tilde m_{\tilde x}(0)-tr\Big[\Lambda(0)D_{\tilde x}(0)\Big]=0. \qquad (43)$$

Функционал (17) с учетом (19) перепишем в виде

$$\min J_\nu=\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\tilde m_{\tilde x}'(kT)Q_\nu\tilde m_{\tilde x}(kT)+tr\Big[Q_\nu D_{\tilde x}(kT)\Big]+u'(kT)u(kT)\Big]+$$
$$+\tilde m_{\tilde x}'(KT)P_\nu\tilde m_{\tilde x}(KT)+tr\Big[P_\nu D_{\tilde x}(KT)\Big]. \qquad (44)$$

Теперь добавим к функционалу (44) левую часть равенства (43):

$$J_\nu=\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\tilde m_{\tilde x}'(kT)Q_\nu\tilde m_{\tilde x}(kT)+tr\Big[Q_\nu D_{\tilde x}(kT)\Big]+u'(kT)u(kT)\Big]+$$
$$+\tilde m_{\tilde x}'(KT)P_\nu\tilde m_{\tilde x}(KT)+tr\Big[P_\nu D_{\tilde x}(KT)\Big]+\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\tilde m_{\tilde x}'(t)\tilde A_1'(\mu)\Lambda(t+T)\tilde A_1(\mu)\tilde m_{\tilde x}(t)+$$
$$+tr\Big[\tilde A_1'(\mu)\Lambda(t+T)\tilde A_1(\mu)D_{\tilde x}(t)\Big]+2u'(t)\Big(\tilde B_{ps}^{(1)}\Big)'\Lambda(t+T)\tilde A_1(\mu)\tilde m_{\tilde x}(t)+$$
$$+u'(t)\Big(\tilde B_{ps}^{(1)}\Big)'\Lambda(t+T)\tilde B_{ps}^{(1)}u(t)+\Lambda(t+T)L_1(t)-\tilde m_{\tilde x}'(t)\Lambda(t)\tilde m_{\tilde x}(t)-$$
$$-tr\Big[\Lambda(t)D_{\tilde x}(t)\Big]\Big\}-\tilde m_{\tilde x}'(KT)\Lambda(KT)\tilde m_{\tilde x}(KT)-tr\Big[\Lambda(KT)D_{\tilde x}(KT)\Big]+$$
$$+\tilde m_{\tilde x}'(0)\Lambda(0)\tilde m_{\tilde x}(0)+tr\Big[\Lambda(0)D_{\tilde x}(0)\Big]. \qquad (45)$$

Оптимальный вектор $u(t)$ должен удовлетворять условию $\dfrac{\partial J_\nu}{\partial u}=0.$ Тогда из (45) имеем

$$\Big(E_n+\Big(\tilde B_{ps}^{(1)}\Big)'\Lambda(t+T)\tilde B_{ps}^{(1)}\Big)u(t)=-\tilde B_{ps}^{(1)}\Lambda(t+T)\tilde A_1(\mu)\tilde m_{\tilde x}(t).$$

Из последнего равенства получаем линейный дискретный регулятор $u_{\tilde x}^*(t)$ (36).
Доказательство, пункт 2. С учетом (16) из (45) имеем

$$\min J_\nu=\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\tilde m_{\tilde x}'(kT)\Big[Q_\nu+\Theta_\nu'\Big(\tilde B_{ps}^{(1)}\Big)'\tilde B_{ps}^{(1)}\Theta_\nu+\tilde A_1'(\mu)\Lambda(t+T)\tilde A_1-\tilde A_1'\Lambda(t+T)\Big(\tilde B_{ps}^{(1)}\Big)^2\Theta_\nu-$$
$$-\theta_\nu'\Big(\Big(\tilde B_{ps}^{(1)}\Big)'\Big)^2\Lambda(t+T)\tilde A_1+\theta_\nu'\Big(\Big(\tilde B_{ps}^{(1)}\Big)'\Big)^2\Lambda(t+T)\Big(\tilde B_{ps}^{(1)}\Big)^2\Theta_\nu-\Lambda(t)\Big]\tilde m_{\tilde x}(t)\Big\}+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{tr\Big[\tilde A_1'(\mu)\Lambda(t+T)\tilde A_1-\tilde A_1'\Lambda(t+T)\Big(\tilde B_{ps}^{(1)}\Big)^2\Theta_\nu-\theta_\nu'\Big(\Big(\tilde B_{ps}^{(1)}\Big)'\Big)^2\Lambda(t+T)\tilde A_1+$$

$$+\theta_{\nu}^{'}\left(\left(\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)^{'}\right)^{2}\Lambda\left(t+T\right)\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)^{2}\Theta_{\nu}-\Lambda\left(t\right)\right]D_{\tilde{x}}\left(t\right)\Bigg\}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(Q_{\nu}+\Theta_{\nu}^{'}\left(\tilde{B}_{ps}^{(1)}\right)^{'}\tilde{B}_{ps}^{(1)}\Theta_{\nu}\right)D_{\tilde{x}}\left(t\right)\right]-$$

$$-\tilde{m}_{\tilde{x}}^{'}\left(KT\right)\Lambda\left(KT\right)\tilde{m}_{\tilde{x}}\left(KT\right)-tr\left[\Lambda\left(KT\right)D_{\tilde{x}}\left(KT\right)\right]+\tilde{m}_{\tilde{x}}^{'}\left(0\right)\Lambda\left(0\right)\tilde{m}_{\tilde{x}}\left(0\right)+tr\left[\Lambda\left(0\right)D_{\tilde{x}}\left(0\right)\right].$$

Из последнего равенства с учетом первого и второго уравнения (32) и считая что $\lim_{K\to\infty}\Lambda\left(KT\right)=0$, получаем (38).

Доказательство теоремы для задачи *B* проводится аналогично задаче *A*.

Заключение

В работе для стационарной дискретной стохастической системы с разными темпами движений с использованием соотношений математических ожиданий, ковариационных матриц, матрицы усиления и функции Ляпунова случайных процессов, построен линейный дискретный регулятор, состоящий из двух линейных дискретных регуляторов, которые под их действием отдельно регулируются движения медленной и быстрой системы.

Результаты работы могут быть применены в исследовании дискретных стохастических задач оптимального управления, конструирования линейного регулятора для цифровой стохастической системы, а также в исследовании других постановок стохастических задач оптимального управления.

Список литературы

1. Kurina G.A., Dmitriev M.G., Naidu D.S. Discrete singularly perturbed control problems (a survey) // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms. 2017. № 24. P. 335–370.

2. Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y. Singular perturbation and time scales in control theories and applications: An overview 2002–2012 // Int. J. Information and Systems Sciences. 2014. Vol. 9. No. 1. P. 1–36. URL: https://www.d.umn.edu/~dsnaidu/Naidu_Survey_Zhang-Naidu_et_al_(IJISS)_2014. pdf (дата обращения: 11.09.2024).

3. Danik Y., Dmitriev M. Symbolic Regulator Sets for a Weakly Nonlinear Discrete Control System with a Small Step // Mathematics. 2022. Vol. 10 (3). P. 1–14. URL: https://www.mdpi.com/2227-7390/10/3/487 (дата обращения: 13.09.2024).

4. Ковалева М.А., Рутковский А.Л. Сингулярно возмущенные системы оптимального управления: монография. М.: Мир науки, 2020. 95 с.

5. Zerizer T. Solving BVPs of singularly perturbed discrete systems // Communications in Applied Analysis. 2019. Vol. 23. No. 3. P. 483–495.

6. Аширбаев Б.Ы. Решение задачи аналитического конструирования регулятора для стационарной дискретной системы с малым шагом: сборник материалов конференций «Математическая теория управления и ее приложения». СПб.: АО «Концерн ЦНИИ Электроприбор», 2020. 380 с.

7. Yuldashev T. K., Ashirbaev B. Y. Optimal Feedback Control Problem for a Singularly Perturbed Discrete System // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, No. 2. P. 661–668.

8. Ashirbaev B.Y., Yuldashev T.K. Derivation of a Controllability Criteria for a Linear Singularly Perturbed Discrete System with Small Step // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol. 45, No. 3. P. 938–948.

9. Смагин В.И., Параев Ю.И. Синтез следящих систем управления по квадратичным критериям. Томск: Изд-во Томского университета, 1996. 171 с.

10. Аширбаев Б.Ы. Декомпозиция линейной сингулярно-возмущенной дискретной системы с постоянно действующими внешними силами // Известия вузов Кыргызстана. № 3. Бишкек, 2023. С. 7–11.

11. Соболев В.А. Декомпозиция сингулярно возмущенных задач оптимального слежения с заданной эталонной траекторией // Сибирский журнал индустриальной математики. 2023. Т. 26. № 3. С. 112–124. DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.309.

12. Соболев В.А., Осинцев М.С. Метод интегральных многообразий в задачах оптимального управления сингулярно возмущенными системами // Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. В сб. XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ, 2014. М., 2014. С. 760–779.

13. Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2003. 583 с.