

УДК 51-74

DOI 10.17513/snt.40212

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОТОКА ПОСЕТИТЕЛЕЙ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ МАССОВЫХ МЕРОПРИЯТИЙ

Наумова Н.А., Коваленко Ю.С.

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Краснодар,

e-mail: Nataly_Naumova@mail.ru

Целью исследования является разработка численных методов моделирования потока посетителей при проведении массовых мероприятий. Актуальной задачей является разработка теоретически обоснованных подходов выбора технических решений по установке контрольно-пропускных систем при проведении массовых мероприятий. Моделью прохода прибывающих посетителей через турникет является многоканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью. Поток заявок не является стационарным в данном случае. Для моделирования системы массового обслуживания с переменной интенсивностью входящих потоков применяется аппроксимация интенсивности входящего потока с помощью кусочно-непрерывных функций. В этом случае можно представить работу нестационарной системы как последовательную работу стационарных, каждая из которых подключается в тот момент, когда окончена работа предыдущей. Изменяться будут начальные условия, то есть значения вероятностей пребывания системы в определенном состоянии. Время обслуживания можно считать распределенным по показательному закону, распределение интервалов по времени между заявками во входящем потоке – по закону Эрланга. С помощью метода псевдосостояний составлена система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний. Предложены методы вычисления характеристик качества функционирования системы с помощью кусочно-непрерывной функции. В силу большой размерности системы возможно только численное ее решение. Приведены методы численного и численно-аналитического решения задачи нахождения вероятностей состояний. Для эффективного использования контрольно-пропускной системы необходимо установить соответствие между параметрами системы и характеристиками пешеходного потока. Один из методов, который позволяет это сделать, приведен в работе.

Ключевые слова: пешеходный поток, массовое мероприятие, математическая модель, система массового обслуживания

NUMERICAL METHODS FOR MODELING VISITOR FLOW DURING MASS EVENTS

Naumova N.A., Kovalenko Yu.S.

Kuban State University, Krasnodar, e-mail: Nataly_Naumova@mail.ru

The purpose of the study is to develop numerical methods for modeling the flow of visitors during mass events. An urgent task is to develop theoretically sound approaches to the selection of technical solutions for the installation of checkpoint systems during mass events. The model for the passage of incoming visitors through the turnstile is a multi-channel queuing system with an unlimited queue. The flow of applications is not stationary in this case. To simulate a queuing system with a variable intensity of incoming flows, an approximation of the intensity of the incoming flow using piecewise continuous functions is used. In this case, it is possible to imagine the operation of a non-stationary system as a sequential operation of stationary ones, each of which is connected at the moment when the previous one is finished. The initial conditions will change, that is, the values of the probabilities of the system staying in a certain state. The service time can be considered distributed according to the exponential law, the distribution of time intervals between requests in the incoming stream according to Erlang's law. Using the pseudo-state method, a system of differential equations for the probabilities of states has been compiled. Methods for calculating the quality characteristics of the system functioning using a piecewise continuous function are proposed. Due to the large dimension of the system, only a numerical solution is possible. The methods of numerical and numerically analytical solution of the problem of finding the probabilities of states are given. In order to use the checkpoint system effectively, it is necessary to establish a correspondence between the system parameters and the characteristics of the pedestrian flow. One of the methods that allows you to do this is given in the work.

Keywords: pedestrian flow, mass event, mathematical model, queuing system

Введение

Массовые мероприятия в настоящее время являются неотъемлемой частью современной жизни. С целью снижения риска возникновения чрезвычайных ситуаций при проведении таких мероприятий посетителям приходится входить через контрольно-пропускные системы, в частности турникеты. Грамотное планирование коли-

чества и места расположения таких систем позволяет повысить уровень удобства и безопасности и избежать больших очередей на входе в зону проведения мероприятия. С этой целью необходимо математическое моделирование потока посетителей, прибывающих к месту события.

В настоящее время существуют различные модели пешеходных потоков: микро-

скопические, мезоскопические и макроскопические [1, 2]. Каждая из них позволяет решать определенные задачи, использует различную степень детализации исходных данных.

Микроскопические модели требуют подробной детализации, учитывают поведение каждого человека и взаимодействие людей друг с другом. Макроскопические моделируют пешеходный поток в целом и оперируют такими данными, как скорость, плотность и интенсивность. Мезоскопическое моделирование сочетает микроскопические и макроскопические аспекты, то есть рассматривает отдельного человека с точки зрения всего потока.

Актуальной задачей является разработка теоретически обоснованных подходов выбора технических решений по установке контрольно-пропускных систем при проведении массовых мероприятий.

Целью исследования является разработка численных методов моделирования потока посетителей при проведении массовых мероприятий.

Материалы и методы исследования

При моделировании прохождения потока посетителей через контрольно-пропускную систему возможно применение теории массового обслуживания [3, с. 6]. С точки зрения приведенной выше классификации такие модели можно отнести к мезоскопическим. Теория массового обслуживания применяется для исследования процессов, протекающих в сложных стохастических системах.

Перед началом массового мероприятия в целях его безопасности посетители проходят через турникет. Образуется общая очередь у входа с n турникетами. То есть моделью прохода через турникет является многоканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью. Время обслуживания можно считать распределенным по показательному закону. Однако поток заявок нельзя считать стационарным в данном случае. Согласно проведенным исследованиям [4, с. 44], интенсивность потока посетителей монотонно возрастает от нуля до некоторого максимума. Максимум достигается за 10–15 минут до начала события. Затем снижается до нуля.

Для моделирования системы массового обслуживания (СМО) с переменной интенсивностью входящих потоков в ряде работ [4, с. 50] предлагается применять аппроксимацию интенсивности входящего потока с помощью кусочно-непрерывных функций. В этом случае можно представить работу нестационарной СМО как последовательную работу стационарных СМО, каждая из которых подключается в тот момент, когда окончена работа другой. Изменяться будут начальные условия, то есть значения вероятностей пребывания системы в определенном состоянии.

Наиболее важными характеристиками, которые требуется получить, являются следующие: максимальная длина очереди; максимальная длительность ожидания в ней; периоды времени, в которые длина очереди достигает максимальной длины и время ожидания оказывается максимальным; число обслуженных к моменту начала массового мероприятия заявок; время, затраченное на обслуживание всех поступивших заявок.

Результаты исследования и их обсуждение

1. Составление системы дифференциальных уравнений для вероятностей состояний

Моделью прохода людей через турникет при входе на мероприятие можно считать СМО вида $E_k/M/m/n$. То есть входящий поток заявок (поток посетителей, подходящих ко входу на мероприятие) – это поток Пальма с распределением интервалов по времени между подряд идущими событиями по закону Эрланга порядка k . Обслуживание заявок (проход через турникет одного посетителя) распределено по показательному закону. Имеется m турникетов (обслуживающих приборов). Место в очереди ограничено (можно принять $n = 100 - 150$).

Составим систему дифференциальных уравнений для состояний системы. Обозначим U_m состояние, при котором в системе находится m требований. Для марковизации процесса будем использовать метод псевдосостояний [5, с. 214]. Входящий поток специального распределения Эрланга можно представить в виде суммы k показательных распределений с параметром λ .

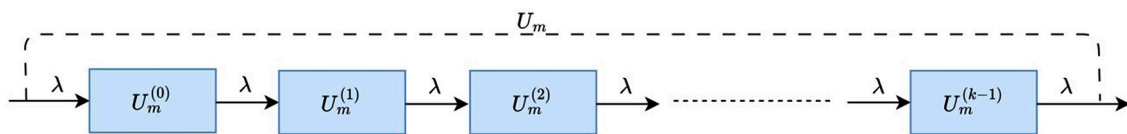


Рис. 1. Псевдосостояния распределения Эрланга порядка k

Псевдосостояния для U_m изображены на рис. 1.

Составим дифференциальные уравнения для нахождения вероятностей пребывания системы в состояниях U_m [6, с. 56]. Граф состояний изображен на рис. 2.

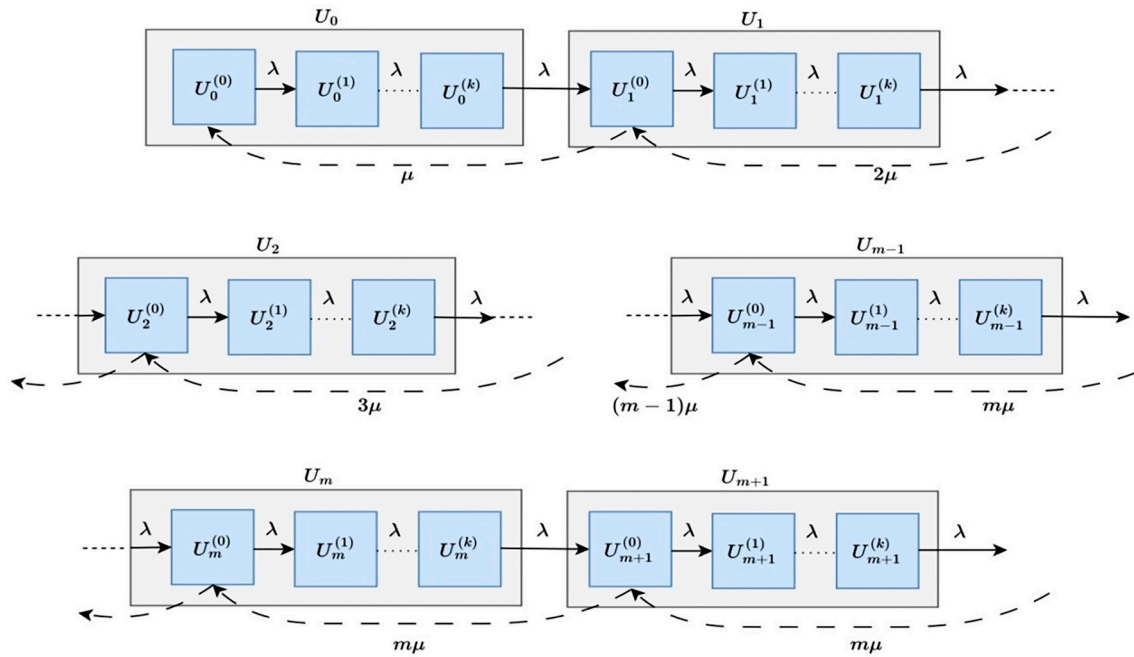


Рис. 2. Граф состояний СМО $E_k/M/m/n$

В дальнейшем будем обозначать $p_s^{(0)} = p_s$ для всех s .

1) U_{m+i} все каналы заняты, i требований в очереди.

Обозначим $P_{n+i}(t + \Delta t)$ – вероятность нахождения в очереди i требований в момент $(t + \Delta t)$.

$$P_{n+i}(t + \Delta t) \approx P(A) + P(B) + P(C), \quad (1)$$

где $A = \{\text{система была в состоянии } (m + i), \text{ и ничего не случилось за время } \Delta t\}$;

$B = \{\text{система была в состоянии } (m + i - 1), \text{ и пришло очередное требование за время } \Delta t\}$;

$C = \{\text{система была в состоянии } (m + i - 1), \text{ и за время } \Delta t \text{ освободился один из каналов обслуживания}\}$.

$$p_{m+i}(t + \Delta t) \approx p_{m+i}(t) \cdot (1 - (\lambda + m\mu)\Delta t) + p_{m+i-1}^{(k)}(t) \cdot \lambda \cdot \Delta t + m\mu \cdot p_{m+i+1}(t) \Delta t. \quad (2)$$

Разделим на Δt :

$$\frac{p_{m+i}(t + \Delta t) - p_{m+i}(t)}{\Delta t} \approx -p_{m+i}(t)(\lambda + m\mu) + p_{m+i-1}^{(k)}(t) \cdot \lambda + m\mu p_{m+i+1}(t). \quad (3)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ получим систему дифференциальных уравнений:

$$p_{m+i}'(t) = -p_{m+i}(t) \cdot (\lambda + m\mu) + p_{m+i-1}^{(k)}(t) \cdot \lambda + m\mu p_{m+i+1}(t), \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1). \quad (4)$$

2) U_s – нет очереди и заняты s ($s \leq m$) каналов обслуживания

$P_s(t + \Delta t)$ – вероятность нахождения системы в этом состоянии. Система будет находиться в состоянии U_s если произойдут следующие события:

$A = \{\text{за время } \Delta t \text{ не прибыло ни одно требование и не освободился ни один из } m \text{ каналов обслуживания}\}$;

$B = \{\text{освободился один из } (s + 1)\text{-го занятого канала обслуживания}\}$;

$C = \{\text{в момент } t \text{ были заняты } (s - 1) \text{ канал обслуживания, и за время } \Delta t \text{ прибыло одно требование}\}$.

$$p_s(t + \Delta t) \approx p_s(t) \cdot (1 - (\lambda + s\mu)\Delta t) + (s + 1)\mu p_{s+1}(t) \cdot \Delta t + p_{s-1}^{(k)}(t) \lambda \Delta t. \quad (5)$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение:

$$\left(p_s(t)\right)' = -(\lambda + s\mu_0)p_s(t) + (s+1)\mu \cdot p_{s+1} + \lambda p_{s-1}^{(k)}(t) \quad (s = 1, 2, \dots, m). \quad (6)$$

3) U_0 – система полностью свободна.

Аналогично предыдущему, получается уравнение

$$\left(p_0(t)\right)' = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t). \quad (7)$$

4) U_{m+n} – все каналы заняты, в очереди n заявок.

Псевдосостояние U_{m+n} состоит из одного подмножества $U_{m+n} = \{u_{n+m}^{(0)}\}$.
Для вероятности $p_{m+n}(t + \Delta t)$ получаем уравнение

$$p_{m+n}(t + \Delta t) \approx p_{m+n}(t) \cdot (1 - m\mu \cdot \Delta t) + p_{m+n-1}^{(k)}(t) \cdot \lambda \cdot \Delta t. \quad (8)$$

Отсюда

$$\left(p_{m+n}(t)\right)' = -m\mu p_{m+n}(t) + \lambda p_{m+n-1}^{(k)}(t). \quad (9)$$

5) нахождение в псевдосостоянии U_s

Для вероятностей $p_s^{(j)}(t)$ пребывания в транзитивных состояниях $u_s^{(j)}$ справедливо

$$p_s^{(j)}(t + \Delta t) \approx p_s^{(j)}(t)(1 - \lambda\Delta t) + p_s^{(j-1)}(t) \cdot \lambda \Delta t. \quad (10)$$

Разделим на Δt и найдем предел при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\left(p_s^{(j)}(t)\right)' = -\lambda p_s^{(j)}(t) + \lambda p_s^{(j-1)}(t) \quad (j = 1, 2, 3, \dots, k). \quad (11)$$

Итак, для определения неизвестных вероятностей получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \left(p_s(t)\right)' = -(\lambda + s\mu)p_s(t) + (s+1)\mu \cdot p_{s+1} + \lambda p_{s-1}^{(k)}, (s = 1, 2, \dots, m) \\ \left(p_{m+i}(t)\right)' = -(\lambda + m\mu)p_{m+i}(t) + \lambda p_{m+i-1}^{(k)} + m\mu p_{m+i-1}, (i = 1, 2, 3, \dots, n-1) \\ \left(p_{m+n}(t)\right)' = -m\mu p_{m+n}(t) + \lambda p_{m+n-1}^{(k)} \\ \left(p_s^{(j)}(t)\right)' = -\lambda p_s^{(j)}(t) + \lambda p_s^{(j-1)}(t), (j = 1, 2, \dots, k) \end{cases}. \quad (12)$$

2. Представление переменной интенсивности в виде кусочно-стационарной функции

Для моделирования нестационарного потока посетителей в случае, когда интенсивность потока меняется с течением времени, представим его в виде кусочно-непрерывной функции. Для этого разобьем всю временную ось на интервалы $[t_{i-1}; t_i]$. И будем считать на каждом из них интенсивность поступления заявок постоянной. В этом случае стационарными будут и значения параметров Эрланга на каждом таком интервале. Для i -го интервала обозначим их $\bar{\lambda}_i$ и k_i .

Тогда с помощью функции Хэвисайда можно записать зависимость параметров распределения от времени следующим образом:

$$\lambda(t) = \sum_{i=0}^K (\theta(t-t_i) - \theta(t-t_{i+1})) \bar{\lambda}_i, \quad (13)$$

$$k(t) = \sum_{i=0}^K (\theta(t-t_i) - \theta(t-t_{i+1})) k_i, \quad (14)$$

где $\theta(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a. \end{cases}$

Тогда для вычисления характеристик качества функционирования СМО применяются формулы

$$L_q(t) = \sum_{n=m}^{\infty} (n-m) p_n(t) - \text{зависимость длины очереди от времени};$$

$$W_q(t) = \sum_{n=m}^{\infty} (n-m+1) \frac{p_n(t)}{m\mu} - \text{зависимость ожидания в очереди от времени.}$$

Таким образом, для решения поставленной задачи надо решить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для стационарной СМО при произвольных начальных условиях и записать вероятности $p_n(t)$ через функцию Хэвисайда.

Для определения неизвестных вероятностей СМО на каждом из интервалов $[t_{i-1}; t_i]$ требуется решить систему дифференциальных уравнений (12). Начальные условия имеют вид

$$p_g^{(0)}(0) = 1, p_m^{(j)}(0) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, g-1, g+1, \dots; j = 1, \dots, k, j = 1, 2, 3, \dots, q). \quad (15)$$

Номер g вероятности $p_g^{(0)}(0)$, отличной от нуля в начале нового временного интервала $[t_{i-1}; t_i]$, определяется из условия $g = [M(X(t))]$ – целая часть от математического ожидания числа заявок $X(t)$ в системе на предыдущем временном интервале $[t_{i-2}; t_{i-1}]$.

Следует учитывать, что

- 1) в наших обозначениях $p_m^{(0)} = p_m$ для всех m ;
- 2) $r_m(t) = P(U_m)$, то есть $r_m(t)$ – вероятность пребывания системы в состоянии U_m ;
- 3) согласно законам теории вероятностей: $r_m(t) = p_m(t) + \sum_{j=1}^k p_m^{(j)}$.

3. Численное решение системы дифференциальных уравнений

Возможны различные численные решения [7] полученной системы дифференциальных уравнений (12).

1 способ. Решить систему линейных дифференциальных уравнений (12) можно, например, методом Эйлера. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_s &= -(\lambda + s\mu) p_s(t) + (s+1)\mu \cdot p_{s+1} + \lambda p_{s-1}^{(k)}, \quad (s = 1, 2, \dots, m), \\ f_{m+i} &= -(\lambda + m\mu) p_{m+i}(t) + \lambda p_{m+i-1}^{(k)}(t) + m\mu p_{m+i-1}(t), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n-1), \\ f_{m+n} &= -m\mu p_{m+n}(t) + \lambda p_{m+n-1}^{(k)}(t), \\ f_s^{(j)} &= -\lambda p_s^{(j)}(t) + \lambda p_s^{(j-1)}(t), \quad (j = 1, 2, \dots, k). \end{aligned}$$

Расчетные формулы будут иметь вид

$$\begin{cases} (p_s)_q = (p_s)_{q-1} + h \cdot f_s, \quad (s = 1, 2, \dots, m) \\ (p_{m+i})_q = (p_{m+i})_{q-1} + h \cdot f_{m+i}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n-1) \\ (p_{m+n})_q = (p_{m+n})_{q-1} + h \cdot f_{m+n} \\ (p_s^{(j)})_q = (p_s^{(j)})_{q-1} + h \cdot f_s^{(j)}, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \end{cases} \quad (16)$$

$$p_g^{(0)}(0) = 1, p_s^{(j)}(0) = 0 \quad (s = 0, 1, 2, \dots, g-1, g+1, \dots; j = 1, \dots, k, j = 1, 2, 3, \dots, q)$$

где h – шаг интегрирования, s – номер итерации.

Или методом Рунге – Кутты, например, четвертого порядка:

$$\begin{cases} (p_s)_q = (p_s)_{q-1} + \frac{1}{6}k_{s,1} + \frac{2}{6}k_{s,2} + \frac{2}{6}k_{s,3} + \frac{1}{6}k_{s,4}, \quad (s = 1, 2, \dots, m) \\ (p_{m+i})_q = (p_{m+i})_{q-1} + \frac{1}{6}k_{m+i,1} + \frac{2}{6}k_{m+i,2} + \frac{2}{6}k_{m+i,3} + \frac{1}{6}k_{m+i,4}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n-1) \\ (p_{m+n})_q = (p_{m+n})_{q-1} + \frac{1}{6}k_{m+n,1} + \frac{2}{6}k_{m+n,2} + \frac{2}{6}k_{m+n,3} + \frac{1}{6}k_{m+n,4} \\ (p_s^{(j)})_q = (p_s^{(j)})_{q-1} + \frac{1}{6}k_{s,1}^{(j)} + \frac{2}{6}k_{s,2}^{(j)} + \frac{2}{6}k_{s,3}^{(j)} + \frac{1}{6}k_{s,4}^{(j)}, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \end{cases} \quad (17)$$

Здесь используются следующие обозначения для $l = 0, 1, \dots, m+n$:

$$\begin{aligned} k_{l,1} &= h \cdot f_s \left(t_q, (p_l)_q \right), & k_{l,2} &= h \cdot f_s \left(t_q + \frac{h}{2}, (p_l)_q + k_{l,1} \right), \\ k_{l,3} &= h \cdot f_s \left(t_q + \frac{h}{2}, (p_l)_q + k_{l,2} \right), & k_{l,4} &= h \cdot f_s \left(t_q + h, (p_l)_q + k_{l,3} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

А также

$$\begin{aligned} k^{(j)}_{l,1} &= h \cdot f_s \left(t_q, (p_l^{(j)})_q \right), & k^{(j)}_{l,2} &= h \cdot f_s \left(t_q + \frac{h}{2}, (p_l^{(j)})_q + k^{(j)}_{l,1} \right), \\ k^{(j)}_{l,3} &= h \cdot f_s \left(t_q + \frac{h}{2}, (p_l^{(j)})_q + k^{(j)}_{l,2} \right), & k^{(j)}_{l,4} &= h \cdot f_s \left(t_q + h, (p_l^{(j)})_q + k^{(j)}_{l,3} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

Этот метод на каждом шаге требует четырех вычислений правой части дифференциального уравнения. Но так как он четвертого порядка, то приводит к уменьшению вычислительной погрешности.

2 способ. Численно-аналитический метод решения системы линейных дифференциальных уравнений.

Система линейных однородных дифференциальных уравнений (12) в матричном виде примет вид

$$P(t) = A \cdot P(t). \quad (20)$$

Причем матрица A – трехдиагональная. Для трехдиагональной матрицы можно найти собственные значения, используя стандартный алгоритм:

1 шаг: находим характеристический многочлен $\det(A - \lambda E) = 0$

Для трехдиагональной матрицы существует специальный способ вычисления определителя $\det(A - \lambda E)$ без явного выражения в виде многочлена.

Пусть $D_m(\lambda)$ – главный минор m -го порядка матрицы $(A - \lambda E)$. Тогда:

$$D_m(\lambda) = (a_{m,m} - \lambda)D_{m-1}(\lambda) - a_{m,m-1}M_{m,m-1}(\lambda) - \text{разложение минора по последней строке.}$$

Дополнительный минор $M_{m,m-1}(\lambda)$ для элемента $a_{m,m-1}$ в последнем столбце содержит один ненулевой элемент $a_{m-1,m}$. Поэтому его можно разложить по этому столбцу:

$$M_{m,m-1}(\lambda) = a_{m-1,m}D_{m-2}(\lambda).$$

Итак, получаем рекуррентную формулу для вычисления миноров:

$$D_m(\lambda) = (a_{m,m} - \lambda)D_{m-1}(\lambda) - a_{m,m-1}a_{m-1,m}D_{m-2}(\lambda), \quad m = 3, 4, \dots, n. \quad (21)$$

2 шаг: находим корни характеристического многочлена.

Корни многочлена $D_n(\lambda)$ можно найти, например, методом парабол.

3 шаг: выписываем решение системы, используя аналитический подход для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Следует отметить, что нахождение решения системы (12) в данном случае, в отличие от численного метода, дающего конечный набор точек, представляет собой построение процедуры, позволяющей определить вероятности состояний в произвольный момент времени [7].

Заключение

Анализ опыта организаций масштабных массовых мероприятий показывает огромную значимость грамотной организации управления потоками посетителей. Для эффективного использования контрольно-пропускной системы необходимо установить соответствие между параметрами системы и характеристиками пешеходного потока. Один из методов, который позволяет это сделать, рассмотрен в данной работе. В силу большой размерности системы, возможно только численное ее решение. С этой целью приведены два различных способа ее решения.

Список литературы

1. Naumova N.A. Advanced optimization of road network: Pedestrian crossings with calling devices // *International Journal of Emerging Trends in Engineering Research*. 2020. Vol. 1. P. 130–137.
2. Zhang Z. and Jia L. Optimal guidance strategy for crowd evacuation with multiple exits: A hybrid multiscale modeling approach // *Applied Mathematical Modelling*. 2021. Vol. 90. P. 488–504.
3. Дудин А.Н., Медведев Г.А., Меленец Ю.В. Практикум на ЭВМ по теории массового обслуживания: учеб. пособие. Мн.: Университетское, 2000. 109 с.
4. Корелин И.А. Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения для анализа динамики контрольно-пропускных систем объектов проведения массовых мероприятий: дис. ... канд. тех. наук. Екатеринбург, 2021. 208 с.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: учеб. пособие для втузов. М.: Высшая школа, 2000. 383 с.
6. Наумова Н.А., Зырянов В.В., Наумов Р.А. Автоматизированное управление транспортными потоками средствами мезоскопического моделирования: монография. Краснодар: ФГБОУ ВО «КубГТУ», 2018. 266 с.
7. Бубнов В.П., Еремин А.С., Сергеев С.А., Особенности программной реализации численно-аналитического метода расчета моделей нестационарных систем обслуживания // *Труды СПИИРАН*. 2015. № 1 (38). С. 218–232.