

УДК 536.21

DOI 10.17513/snt.40169

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ СО СТРУКТУРОЙ ТИПА ФИШЕРА – КОХА S

Губарева К.В., Еремин А.В.

ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», Самара,
e-mail: r.kristina2017@mail.ru

Исследовано влияние внутренних источников тепла на процесс теплопереноса в пористой среде. Анализ проводился на примере пористой пластины с упорядоченной структурой на основе трижды периодических минимальных поверхностей Фишера – Коха S. Получено решение краевой задачи теплопроводности в тонкой пластине с симметричными граничными условиями третьего рода с внутренним источником теплоты постоянной мощности. С использованием приближенно-аналитического метода было найдено решение задачи, учитывающее топологические особенности материала. Для определения теплофизических свойств исследуемой области использовались методы вычислительной гомогенизации среды на основе данных вычислительных экспериментов в программном комплексе ANSYS. Выполнен анализ полученного решения, представлены графики распределения температур и изотерм в пористой пластине в разные моменты времени, определены скорости движения изотерм в различные моменты времени. С целью верификации результатов выполнено сравнение приближенно-аналитического решения с численным. Представленные в статье результаты могут быть использованы при разработке тепловой защиты тепловыделяющего оборудования, проектировании теплообменников трактов тепломеханического оборудования и других приложений. Найденные зависимости представлены в аналитическом виде – в виде формул, для использования которых не требуется использование дорогостоящего программного обеспечения, вычислительной техники, что расширяет их применимость.

Ключевые слова: приближенно-аналитический метод, эффективная теплопроводность, минимальная поверхность Фишера – Коха S, дополнительная искомая функция, дополнительные граничные характеристики, тепловой поток, пористость

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-79-10044,
<https://rscf.ru/project/23-79-10044/>.

STUDY OF THERMAL CONDUCTIVITY OF POROUS MATERIALS WITH A FISCHER – KOCH S STRUCTURE

Gubareva K.V., Eremin A.V.

Samara State Technical University, Samara, e-mail: r.kristina2017@mail.ru

The influence of internal heat sources on the heat transfer process in porous media has been investigated. The analysis was carried out using an example of a porous plate with an ordered structure based on Fisher – Koch's three times periodic minimal surfaces S. A solution to the boundary value problem for heat conduction in a thin plate with symmetric boundary conditions of the third kind with an internal heat source of constant power has been obtained. Using the approximate analytical method, a solution to the problem considering the topological features of the material was found. To determine the thermal physical properties of the study area, methods of computational homogenization of the medium based on data from computational experiments in the ANSYS software package were used. An analysis of the obtained solution is presented, graphs of temperature distribution and isotherms in the porous plate at different times are shown, and the speed of isotherm movement at various times is determined. To verify the results, an approximate analytical solution was compared with a numerical one. The article presents the results in an analytical form – as formulas that do not require the use of expensive software or computing equipment, which expands their applicability.

Keywords: effective thermal conductivity, minimum surface Fischer – Koch S, approximate analytical method, additional function, additional boundary characteristics, heat flow, porosity

The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 23-79-10044,
<https://rscf.ru/project/23-79-10044/>.

Введение

Пористые материалы получили широкое распространение в строительстве – они используются для создания легких бетонов и пенополистирола [1, 2]; в космическом и авиационном машиностроении пористые материалы применяются для изготовления теплоизоляционных материалов и снижения веса конструкций [3]; в энергетике применя-

ются при изготовлении теплообменных трактов теплообменных устройств [4–6], как рабочая зона фильтров, сепараторов и др. [7].

В настоящей работе рассматриваются пористые материалы с упорядоченной структурой на основе трижды периодических минимальных поверхностей (ТПМП-материалы). Подобные материалы представляют особый интерес, так как обла- дают прогнозируемыми физическими свой-

ствами и уникальной макроструктурой. Так, например, в материалах на основе ТПМП можно организовать систему двух и более непересекающихся поровых объемов, что делает возможным их использование в качестве теплообменных трактов ТМО-оборудования. Кроме того, каркасы ТПМП-материалов обладают развитой поверхностью, что оказывает положительное влияние на теплоотдачу (при течении жидкостей и газов через поровое пространство) и теплопроводность материала.

Все ТПМП-материалы состоят из твердотельного каркаса, образованного элементарными ячейками Фишера – Коха и пор, которые образуют сложную систему каналов, полостей. Поровое пространство может быть заполнено воздухом, жидкостями, газами и другими наполнителями. Особенность ТПМП-материалов состоит в том, что их свойства, в том числе теплофизические, непосредственно связаны с геометрическими характеристиками элементарных ячеек (толщиной стенки, размером и др.). Таким образом, изменяя геометрические характеристики и материал наполнителя, можно получить требуемые физические свойства пористой среды.

Изучение свойств материалов с пористой структурой представляет как теоретический, так и прикладной интерес [8]. Несмотря на очевидные преимущества материалов с прогнозируемыми свойствами, существует ряд факторов, ограничивающих их применение: технологические и техни-

ко-экономические ограничения аддитивного производства; сложность моделирования процессов, протекающих в пористых средах, и проектирования устройств на их основе [9–11]. В работах [12–14] приведены результаты экспериментальных и аналитических исследований процессов переноса в ТПМП типа Шена и IWP. Настоящая статья посвящена исследованию процесса переноса тепла в пористом материале на основе элементарной ячейки типа Фишера – Коха S. Представленный алгоритм получения решения может быть использован и для других типов ячеек, допускающих осреднение свойств в пределах исследуемого объема, то есть использование эффективных характеристик вместо истинных. Особенности использования разработанного приближенно-аналитического метода рассмотрены на примере решения краевой задачи теплопроводности в тонкой пластине.

Цель исследования – изучение процесса теплопроводности в пористой пластине с ТПМП-топологией и внутренним источником теплоты, учитывая геометрические характеристики ячейки.

Материалы и методы исследования

В настоящей работе рассмотрена задача теплопроводности в пластине с топологией ТПМП типа Фишера – Коха S. Внутри пластины толщиной $2l$ действует распределенный объемный источник теплоты, а на поверхности заданы симметричные граничные условия третьего рода (рис. 1).

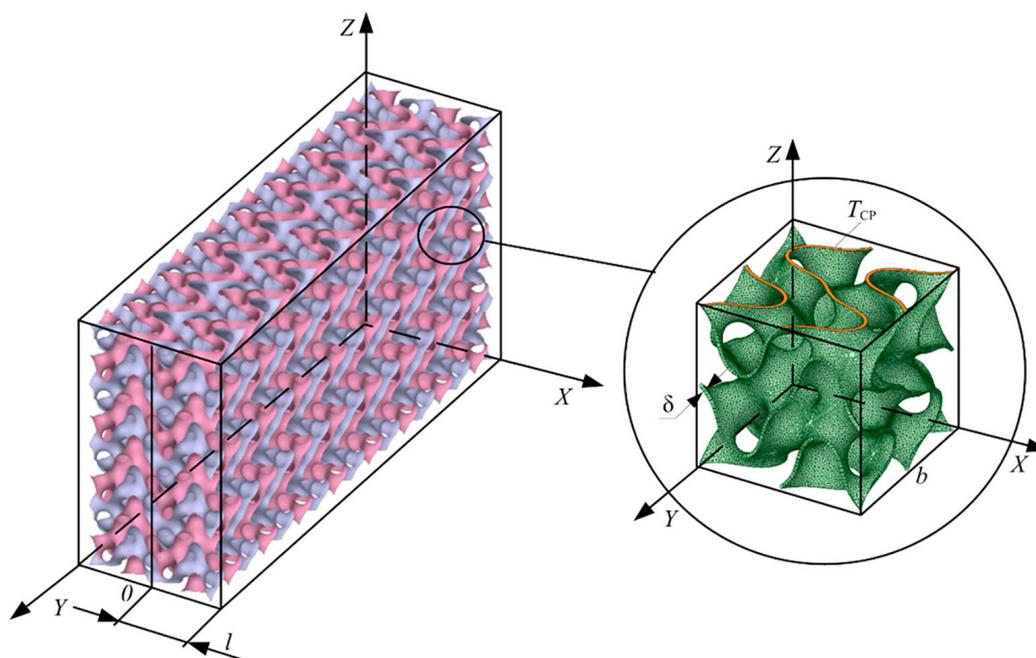


Рис. 1. Графическое представление трехмерной модели пористой пластины

Емкостные свойства среды характеризуются пористостью ϕ , определяемой выражением [13]:

$$\phi = 1 - \frac{V_{\text{ТПМП}}}{V}, \quad (1)$$

где $V_{\text{ТПМП}}$ – объем элементарной ячейки; V – объем куба, в который вписана ячейка.

Пористость элементарной ячейки ϕ зависит от геометрических параметров (толщины стенки ячейки δ и длины ребра куба b , в который вписана ячейка (рис. 1)) и определяется стандартными средствами модуля SpaceClaim программного комплекса ANSYS. Аппроксимируя полученные результаты в ANSYS, получаем выражение

$$\phi = 1 - 5,0735 \cdot \Delta, \quad (2)$$

где Δ – относительная толщина, $\Delta = \delta / b$.

Математическая постановка задачи с учетом симметрии имеет вид

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{Q_V}{c\rho}, \quad (3)$$

$$(0 < x < l; \tau > 0);$$

$$T(x, 0) = T_0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (5)$$

$$\lambda \frac{\partial T(l, \tau)}{\partial x} + \alpha(T_{\text{cp}} - T(l, \tau)) = 0, \quad (6)$$

где T – температура; T_{cp} – температура среды; T_0 – начальная температура; Q_V – объемная мощность внутреннего источника тепла; x – координата; a – коэффициент теплоотдачи; ρ – плотность; τ – время; λ – коэффициент теплопроводности; $a = \lambda / (c\rho)$ – коэффициент температуропроводности; ρ – плотность; c – удельная теплоемкость; l – половина толщины пластины; λ – коэффициент теплопроводности.

В соответствии с задачей (3)–(6) на одной из граней исследуемой ячейки задается граничное условие третьего рода T_{cp} , а на всех остальных – отсутствие теплообмена.

С помощью метода минимального репрезентативного объема [12] была выполнена вычислительная «гомогенизация среды», направленная на осреднение теплофизических характеристик материала.

Согласно данному методу, представленному в работе [12], уравнение (3) примет вид

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\lambda_{\text{eff}}}{c \cdot \rho_{\text{eff}}} \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{Q_V}{c \cdot \rho_{\text{eff}}}, \quad (7)$$

где c_{eff} ($c_{\text{eff}} = c$), ρ_{eff} , λ_{eff} – эффективные (осредненные) коэффициенты теплоемкости,

плотности, теплопроводности гомогенизированной среды.

Эффективная плотность материала ρ_{eff} определяется как

$$\rho_{\text{eff}} = \rho_s \cdot (1 - \phi), \quad (8)$$

где ρ_s – истинное значение плотности материала каркаса, из которого изготовлена пористая ячейка.

Эффективный коэффициент теплопроводности λ_{eff} определяется следующей зависимостью:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda_s \cdot 0,73 \cdot (1 - \phi), \quad (9)$$

где λ_s – коэффициент теплопроводности материала твердотельного каркаса [14].

С учетом (8) и $a_s = \lambda_s / (c\rho_s)$ запишем

$$c\rho_{\text{eff}} = c\rho_s \cdot (1 - \phi) = \lambda_s \cdot (1 - \phi) / a_s, \quad (10)$$

С учетом (10) уравнение (3) можно представить как

$$\frac{\lambda_s \cdot (1 - \phi)}{a_s \cdot \lambda_{\text{eff}}} \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{Q_V}{\lambda_{\text{eff}}}. \quad (11)$$

Выполним параметризацию уравнения (3). Введем следующие параметры:

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \Theta = \frac{T - T_{\text{cp}}}{T_0 - T_{\text{cp}}}; \quad \text{Fo} = \frac{a_s \tau}{l^2};$$

$$\text{Po} = \frac{Q_V l^2}{\lambda_s (T_0 - T_{\text{cp}})}; \quad A = \frac{\lambda_s}{\lambda_{\text{eff}}}; \quad \text{Bi} = \frac{\alpha l}{\lambda_{\text{eff}}}.$$

где Θ – безразмерная температура; ξ – безразмерная координата; l – линейный размер ячейки, m ; Fo – безразмерное время (критерий Фурье); Po – критерий Померанцева; A – коэффициент, зависящий от тепловых свойств материала твердотельного каркаса и эффективного коэффициента теплопроводности.

Уравнение (3) в безразмерном виде можно записать (рис. 3) как

$$A \cdot (1 - \phi) \cdot \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^2} + \text{Po} \cdot A$$

$$(\text{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < 1); \quad (12)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi} = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \xi} + \text{Bi} \Theta(1, \text{Fo}) = 0. \quad (15)$$

Для решения задачи (12)–(15) используется метод, предложенный авторами в [15].

Введем в рассмотрение новую искомую функцию времени

$$\sigma(\text{Fo}) = \frac{\partial \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \xi}, \quad (16)$$

где α – угол между касательной к графику функции $\Theta(\xi, \text{Fo})$ в точке $\xi = 1$ и координатной осью.

Возвращаясь к размерным величинам, выражение (9) можно представить в виде

$$\sigma(\tau) = \frac{\delta}{T_0 - T_{\text{cp}}} \frac{\partial T(1, \tau)}{\partial x}. \quad (17)$$

Плотность теплового потока по закону Фурье на поверхности пластины определяется выражением

$$q(\tau) = -\lambda \frac{\partial T(1, \tau)}{\partial x}, \quad (18)$$

Подставляя (11) в (10), получаем

$$\sigma(\tau) = \frac{\delta}{\lambda(T_0 - T_{\text{cp}})} q(\tau) = k q(\tau), \quad (19)$$

где $k = \text{const}$ – некоторый коэффициент, определяемый масштабом системы.

Решение задачи (5)–(8) представим в виде полинома n -й степени:

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \sum_{i=1}^n b_i(\text{Fo}) \xi^{i-1}, \quad (20)$$

где $n \in \mathbb{N}$ – натуральное число, соответствующее количеству членов ряда (20);

$b_i(\text{Fo})$ – неизвестные коэффициенты, зависящие от безразмерного времени.

Для получения решения исходной задачи (12)–(15) в первом приближении ограничимся тремя слагаемыми ($n = 3$) в выражении (20). Выполнив подстановку граничных условий (13)–(15) в полином n -й степени (20), получим систему трех алгебраических уравнений с коэффициентами $b_i(\text{Fo})$. Система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} b_2 = 0; \\ \text{Bi}(b_1 + b_2 + b_3) + b_2 + 2b_3 = 0; \\ b_2 + 2b_3 - \sigma(\text{Fo}) = 0, \end{cases}$$

Решая систему, находим коэффициенты:

$$b_1(\text{Fo}) = -\frac{\sigma(\text{Fo})(2 + \text{Bi})}{2\text{Bi}};$$

$$b_2(\text{Fo}) = 0;$$

$$b_3(\text{Fo}) = \frac{\sigma(\text{Fo})}{2}.$$

С учетом полученных коэффициентов полином (20) запишется в виде

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = f_1(\xi) \sigma(\text{Fo}), \quad (21)$$

где $f_1(\xi) = \frac{\xi^2}{2} - \frac{\text{Bi} + 2}{2\text{Bi}}$ – функция, зависящая от координаты. Найденная функция удовлетворяет граничным условиям (13)–(15) при любых значениях $\sigma(\text{Fo})$.

Проинтегрируем его в пределах изменения пространственной координаты, то есть составим интеграл теплового баланса [9, 10]:

$$\int_0^1 A \cdot (1 - \varphi) \cdot \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} d\xi = \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^2} + A \cdot \text{Po} \right) d\xi. \quad (22)$$

Вычисляя интеграл, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\left[-\frac{A \cdot (\text{Bi} + 3) \cdot (\varphi - 1)}{\text{Bi}} \right] \cdot \frac{d\sigma(\text{Fo})}{d\text{Fo}} + \sigma(\text{Fo}) + A \cdot \text{Po} = 0, \quad (23)$$

из решения, которого находим

$$\sigma(\text{Fo}) = e^{-\frac{(\text{Fo} + C_1)}{K}} - A \cdot \text{Po}, \quad (24)$$

где C_1 – константа интегрирования, $K = -\frac{A \cdot (\text{Bi} + 3) \cdot (\varphi - 1)}{3\text{Bi}}$.

Подставляя (24) в (21), получаем

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = f_1(\xi) \left(e^{-\frac{(\text{Fo} + C_1)}{K}} - A \cdot \text{Po} \right). \quad (25)$$

Для выполнения начального условия (13) потребуем ортогональности невязки к координатной функции $f_1(\xi)$ и составим его невязку:

$$\int_0^1 [\Theta(\xi, 0) - 1] f_1(\xi) d\xi = (Bi + 3) e^{\frac{3BiC_1}{A(Bi+3)(\phi-1)}} - 3(APo - Bi) - APoBi = 0. \quad (26)$$

Из решения уравнения (26) определим константу интегрирования

$$C_1 = A \cdot \ln \left(\frac{3APo - 3Bi + APoBi}{Bi + 3} \right) \cdot (Bi + 3) \cdot (\phi - 1).$$

Выражение (25) с учетом найденной константы C_1 представляет собой решение задачи (12)–(15) в первом приближении.

Результаты исследования и их обсуждение

Графики изменения безразмерной температуры по формуле (19) при $Bi = 10$; $Po = 0,0005$; $A = 25,4$; $\phi = 0,95$ представлены на рис. 2, 3.

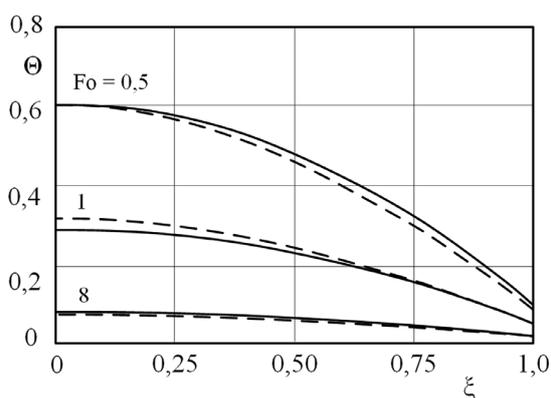


Рис. 2. График распределения температуры в пластине по безразмерной координате: — — — приближенное решение (MathCAD), — — — метод конечных элементов (ANSYS)

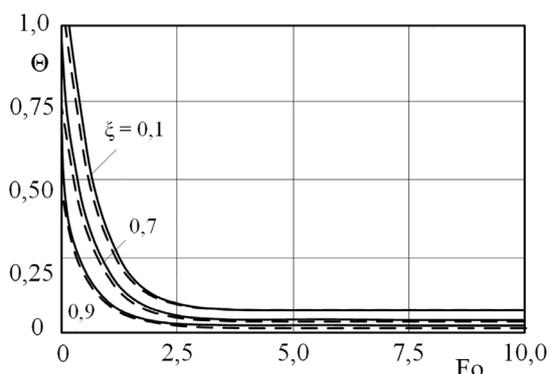


Рис. 3. График распределения температуры в пластине по безразмерному времени: — — — приближенное решение (MathCAD), — — — метод конечных элементов (ANSYS)

Графики изотерм и изменения скоростей движения изотерм представлены на рис. 4, 5. На поверхности тела в определенный момент времени появляется каждая из изотерм, имеющая начальную скорость v_0 . Затем скорости изотерм под воздействием постоянного во времени источника $Po = 0,0005$ стремятся к бесконечным значениям.

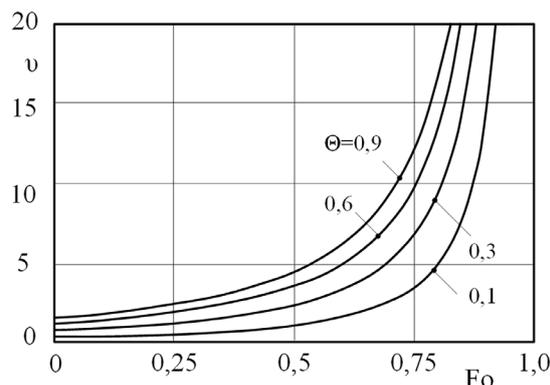


Рис. 4. График распределения скоростей изотерм в пластине при граничных условиях 3-го рода

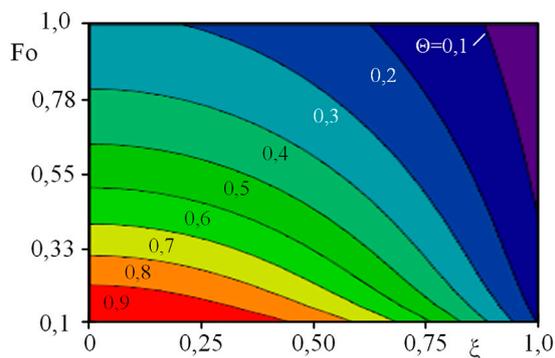


Рис. 5. График распределения изотерм в пластине из пористого материала

Заключение

Было проведено сопоставление результатов расчетов первого приближения тем-

пературной функции, полученных приближенно-аналитическим методом и методом конечных элементов, с целью проверки приближенно-аналитического метода решения задачи теплопереноса в пористой среде, основанной на структуре ТПМП типа Фишера – Коха S. Полученные выражения для определения функции температуры позволяют определять распределение тепла внутри пористых материалов, выявлять тепловые потери и др. Решение задачи переноса тепла через плоскую пористую стенку можно получить в простой аналитической форме, не прибегая к специализированному программному обеспечению и вычислительной технике.

В диапазоне времени $0,1 \leq Fo < \infty$ погрешность при вычислениях в первом приближении не более 4% от численных методов. Определение эффективной теплопроводности пористых материалов на основе ТПМП, температурных полей и тепловых потоков внутри пористых сред при одномерном переносе тепла может быть проведено на основе полученных результатов.

Список литературы

1. Самойлов К.А., Антипина А.А. Легкий бетон как материал для стеновых конструкций // *Alfabuild*. 2018. № 1 (3). С. 55–64.
2. Откеев Р.В., Сазанаква К.А. Анализ изученности легкого самоуплотняющегося бетона // *Архитектура и дизайн*. 2018. № 3. С. 36–42.
3. Каблов Е.Н. Материалы нового поколения и цифровые технологии их переработки // *Вестник РАН*. 2020. Т. 90, № 4. С. 331–334. DOI: 10.31857/S0869587320040052.
4. Дементьев А.И., Подоплелов Е.В., Мартинюк В.В., Корчевин Н.А. Разработка оборудования для нанесения пористого металлизированного покрытия на поверхность теплообменных труб // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*. 2017. № 2 (54) С. 49–54.
5. Рыдалина Н.В., Аксенов Б.Г., Степанов О.А., Антонова Е.О. Применение пористых материалов в теплообменных аппаратах системы теплоснабжения // *Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики*. 2020. Т. 22, № 3. С. 3–13. DOI: 10/30724/1998-9903-2020-22-3-3-13.
6. Евстигнеев Д.С., Савченко А.В. Моделирование двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей в пористой гидрофильной среде // *Интерэкспо Гео-Сибирь*, 2015. Т. 2, № 3. С. 64–69.
7. Бобков В.И., Черновалова М.В., Лобанева Е.И. Математическая модель распространения локализованного фронта испарения влаги и особенности кинетики влаго-содержания в крупнопористом влажном теле окатыша из отходов апатит-нефелиновых руд горно-обогатительных комбинатов // *Современные наукоемкие технологии*. 2019. № 10–1. С. 21–26.
8. Формалев В.Ф. Теплопроводность анизотропных тел: аналитические методы решения задач. М.: Физматлит, 2014. 309 с.
9. Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Многомасштабное моделирование процессов фильтрации в пористых средах // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2018. № 3 (75). DOI: 10.18698/2308-6033-2018-3-1738.
10. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect // *Journal of King Saud University – Science*. 2020. Vol. 32, Is. 8. P. 3364–3371. DOI: 10.1016/j.jksus.2020.09.023.
11. Prosviryakov E.Yu. A Sufficient Condition for the Absence of Strong and Weak Discontinuities in the Gas Flow in Flat Channels // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. 2019. Is. 3. P. 25–40. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.3.025-040.
12. Брагин Д.М., Еремин А.В., Попов А.И., Шульга А.С. Метод определения коэффициента эффективной теплопроводности пористого материала на основе минимальной поверхности типа Schoen's I-WP(R) // *Вестник ИГЭУ*. 2023. № 2. С. 61–68. DOI: 10.17588.2072-2672.2023.2.061-068.
13. Попов А.И., Брагин Д.М., Зинина С.А., Еремин А.В., Олатуйи О.Д. Определение эффективного коэффициента теплопроводности пористого материала с упорядоченной структурой, основанной на ТПМП I-WP // *Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности*. 2022. Т. 7, № 3. С. 25.
14. Bragin D.M., Popov A.I., Ivannikov Yu.I., Eremin A.V., Zinina S.A., Kechin N.N. Experimental Study of Effective Thermal Conductivity of Materials Based on TPMS // 2023 5th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). IEEE. 2023. С. 983–985. DOI: 10.1109/SUMMA60232.2023.10349385.
15. Еремин А.В., Губарева К.В., Шульга А.С. Исследование процесса теплопроводности в пластине с внутренними источниками теплоты постоянной мощности // *Инженерный вестник Дона*. 2019. № 6 (57). URL: ivdon.ru/magazine/archive/N6y2019/6041 (дата обращения: 28.08.2024).