

УДК 004  
DOI 10.17513/snt.39911

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУШНОЙ ЗАСЛОНКИ НА ВОЗДУХООБМЕН ВЕНТИЛИРУЕМЫХ ПОМЕЩЕНИЙ

Серда С.Н.

*Муромский институт (филиал) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых», Муром, e-mail: sereda-2010@mail.ru*

Целью работы является поиск функции аппроксимации коэффициента местного сопротивления воздушной заслонки в системе вентиляции и оценка его влияния на воздухообмен вентилируемого помещения посредством компьютерного моделирования. В работе проводится определение коэффициентов полиномиальной регрессии различного порядка как функции аппроксимации местного сопротивления воздушной заслонки методом наименьших квадратов, отмечаются проблемы применения данного подхода при решении задачи расчета динамики расхода воздуха. Рассматривается нелинейная функция аппроксимации местного сопротивления и его обратной зависимости, а оценка параметров функции проводится методом линеаризации. Предложена параметрическая модель функции аппроксимации на основе логистической функции, оптимальные значения параметров которой находятся алгоритмически по критерию минимума среднеквадратического отклонения. Рассмотренные варианты функций аппроксимации можно использовать при расчете воздухообмена в системе с автоматическим регулированием угла раскрытия воздушной заслонки. Построена математическая модель динамики воздушного режима в виде системы дифференциальных уравнений. Приводится пример моделирования воздушного режима вентилируемого помещения при линейном изменении угла раскрытия воздушной заслонки в программе MathCAD итерационным методом Рунге – Кутты с учетом предложенной модели функции аппроксимации. Результаты моделирования могут быть использованы при проектировании и настройке регулируемых параметров систем вентиляции.

**Ключевые слова:** вентиляция, воздухообмен, математическое моделирование, микроклимат, регрессия, функция аппроксимации

## MODELING THE EFFECT OF THE AIR FLAP RESISTANCE ON THE AIR EXCHANGE OF VENTILATED ROOMS

Sereda S.N.

*Murom Institute (branch) of Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Murom, e-mail: sereda-2010@mail.ru*

The aim of the work is to find a function for approximating the coefficient of local resistance of the air flap in the ventilation system and to estimate its effect on the air exchange of a ventilated room through computer modeling. The paper defines the coefficients of the polynomial regression of different orders of the approximation function of the local resistance of the air flap by the least squares method, and the problems of using this approach in solving the problem of calculating the dynamics of changes of air flow are noted. The nonlinear approximation function of the local resistance and its inverse dependence are considered, meanwhile the evaluation of the function parameters is carried out by the linearization method. A parametric model of the approximation function based on the logistic function is proposed, the optimal values of the parameters of which are found algorithmically according to the minimum standard deviation criterion. The considered variants of the approximation functions can be used in the calculation of air exchange in a system with automatic adjustment of the opening angle of the air flap. A mathematical model of the dynamics of the air regime in the form of a system of differential equations is constructed. An example of modeling the air regime of a ventilated room with a linear change in the opening angle of the air flap in the MathCAD program using the Runge-Kutta iterative method, taking into account the proposed approximation function model. The simulation results can be used in the design and configuration of adjustable parameters of ventilation systems.

**Keywords:** ventilation, air exchange, mathematical modeling, microclimate, regression, approximation function

Системы вентиляции и кондиционирования воздуха жилых помещений, равно как и производственных помещений, предназначены для формирования микроклимата с целью обеспечения безопасных и комфортных условий жизнедеятельности человека, которые должны соответствовать требованиям ГОСТ и санитарно-эпидемиологических норм [1, 2]. При проектировании систем внутреннего тепло- и холодоснабжения, вентиляции и кондиционирования воздуха в общественных и жилых зданиях нужно соблюдать требования энергоэффективности, а также применять передовые технологии, в том числе интеллектуаль-

ные системы автоматического управления климатическими системами здания [3]. При расчете требуемого воздухообмена зданий учитываются конструктивные характеристики вентиляторов, воздуховодов, воздушных дефлекторов, задвижек и других элементов системы вентиляции [4].

Для эффективного управления режимом работы систем вентиляции в алгоритме блока автоматического регулирования необходимо обеспечить плавное изменение регулируемого параметра по заданному закону. В качестве регулируемого параметра может выступать угол раскрытия воздушной заслонки в системе вентиляции. При исполь-

зовании табличных данных, а также при обработке результатов эксперимента возникает задача аппроксимации зависимостей некоторой аналитической функцией, для решения которой могут применяться различные методы [5–7], как то: кусочно-линейная аппроксимация, аппроксимация тригонометрическими функциями, полиномами Чебышева, сплайны и др., в некоторых случаях не удается с помощью таких подходов получить приемлемо хорошее приближение, либо аналитическая функция не позволяет получить общую математическую модель исследуемого процесса, как, например, при использовании сплайнов. Целью данной работы является поиск функции наилучшего приближения зависимости коэффициента местного сопротивления воздушной заслонки от угла раскрытия для расчета аэродинамического режима помещения.

$$G_g = F_g \cdot \omega \cdot \rho_g = F_g \cdot \sqrt{\frac{2\Delta p \cdot \rho_g}{\xi(\varphi)}} = F_g \cdot \sqrt{2\Delta p \cdot \rho_g \cdot \varepsilon}, \quad (1)$$

где  $F_g$  – площадь сечения воздуховода, м<sup>2</sup>;  $\Delta p$  – потери давления через заслонку (проем), Па;  $\omega$  – скорость движения воздуха, м/с;  $\rho_g$  – плотность воздуха, кг/м<sup>3</sup>;  $\xi$  – коэффициент местного сопротивления проема, зависящий от угла раствора  $\varphi$ .

В случае автоматического регулирования угла раскрытия заслонки с непрерывным шагом необходимо вычислять значения коэффициента местного сопротивления по некоторой формуле. Также эта проблема возникает при решении задачи расчета динамики изменения параметров микроклимата вентилируемых помещений в нестационарном режиме итерационными методами. Следовательно, научно-практический интерес представляет задача аппроксимации таблично заданной зависимости некоторой

В качестве исходных данных для исследования выступают значения коэффициента местного сопротивления воздушной заслонки  $\xi$  при изменении угла открытия  $\varphi$  (табл. 1), представленные в справочнике проектировщика систем вентиляции [4, с. 133]. При этом зависимость  $\xi(\varphi)$  носит нелинейный характер.

Таблица 1

Исходные данные

$\varphi$	15	30	45	60	90
$\xi$	30,8	9,2	6,2	3,5	2,6

С учетом этого можно рассчитать расход воздуха  $G_g$  (кг/с) через воздуховод с регулируемой воздушной заслонкой или через ветровой проем помещения по формуле

аналитической функцией, удобной для последующего применения.

### Материалы и методы исследования

Рассмотрим задачу поиска функции аппроксимации с помощью полиномиальной регрессии. Уравнение регрессии  $n$ -го порядка имеет вид

$$y(x) = a_n x^n + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad (2)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – коэффициенты полинома регрессии.

Для нахождения значений коэффициентов регрессии  $n$ -го порядка воспользуемся методом наименьших квадратов [8]. Для этого необходимо решить систему нормальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} n \cdot a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_n \sum_{i=1}^n x_i^n = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + \dots + a_n \sum_{i=1}^n x_i^{n+1} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + \dots + a_n \sum_{i=1}^n x_i^{n+2} = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ \dots \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{n+1} + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^{n+2} + \dots + a_n \sum_{i=1}^n x_i^{2n} = \sum_{i=1}^n x_i^n y_i \end{array} \right. \quad (3)$$

или в матричной форме записи

$$X \cdot A = Y, \tag{4}$$

где  $A$  – вектор искомых коэффициентов полинома регрессии;  $X$  – матрица, составленная по данным аргумента функции  $x_i$ ;  $Y$  – вектор, составленный по правым частям уравнений (3).

Тогда значения вектора коэффициентов полинома регрессии можно найти по формуле

$$A = X^{-1} \cdot Y, \tag{5}$$

где  $X^{-1}$  – обратная матрица.

Как критерий качества аппроксимации, показывающего меру близости результатов, полученных расчетным путем, и табличных данных, используем минимум среднеквадратического отклонения (СКО) и коэффициент корреляции Пирсона  $r$  [9].

В табл. 2 приведены результаты расчета функции регрессии местного сопротивления, а на рис. 1 – графики функций регрессии, полученные в программе MathCAD.

По результатам расчета можно сделать вывод, что ни одна из функций регрессии

не обеспечивает качество аппроксимации, а именно, при малых порядках регрессии получаем значительные ошибки аппроксимации, а при порядке регрессии  $n = 4$ , несмотря на точное совпадение расчетных и табличных данных, функция аппроксимации принимает отрицательные значения в интервале  $69^\circ < \varphi < 88^\circ$ , которые нельзя компенсировать как в случае регрессии второго порядка, также имеющей провал при  $63^\circ < \varphi < 76^\circ$ , без существенной потери точности. Функция регрессии третьего порядка имеет подъем на интервале  $50^\circ \leq \varphi \leq 80^\circ$ , что противоречит характеру изменения местного сопротивления. Отрицательные или нулевые значения функции при расчете воздухообмена по формуле (1) приводят к вычислительным ошибкам деления на ноль или комплексным величинам. Возможно избежать подобных коллизий, если искать функцию аппроксимации для со-зависимой величины  $\varepsilon = 1/\zeta$  или  $\varepsilon = 1/\sqrt{\xi}$ , входящей в уравнение (1), используя метод линеаризации. В этом случае в уравнении (3) параметр  $y_i$  соответствует обратным величинам  $1/\zeta_i$  или  $1/\sqrt{\xi_i}$ .

Таблица 2

Функции полиномиальной регрессии коэффициента местного сопротивления

	Уравнение регрессии порядка $n$	Оценка качества
$\zeta = y_2$	$y_2 = 0,00945 \cdot \varphi^2 - 1,318792 \cdot \varphi + 46,014^*$	СКО = 1,379 $r = 0,956$
$\zeta = y_3$	$y_3 = -2,954 \cdot 10^{-4} \cdot \varphi^3 + 0,0555 \cdot \varphi^2 - 3,341231 \cdot \varphi + 69,0132$	СКО = 0,564 $r = 0,993$
$\zeta = y_4$	$y_4 = 1,264 \cdot 10^{-5} \cdot \varphi^4 - 2,8 \cdot 10^{-3} \cdot \varphi^3 + 0,2222 \cdot \varphi^2 - 7,67 \cdot \varphi + 104,66$	СКО = 0 $r = 1$

Примечание. \*Коэффициент  $a_0 = 46,014$  в уравнении регрессии второго порядка приводится с учетом поправки  $+0,316$  для исключения отрицательных значений функции (при  $63^\circ < \varphi < 76^\circ$ ).

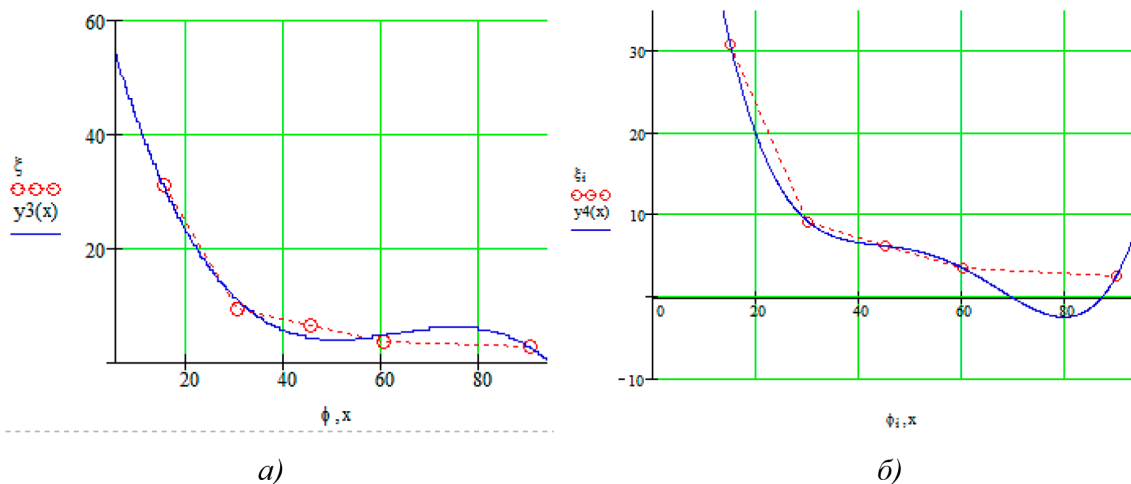
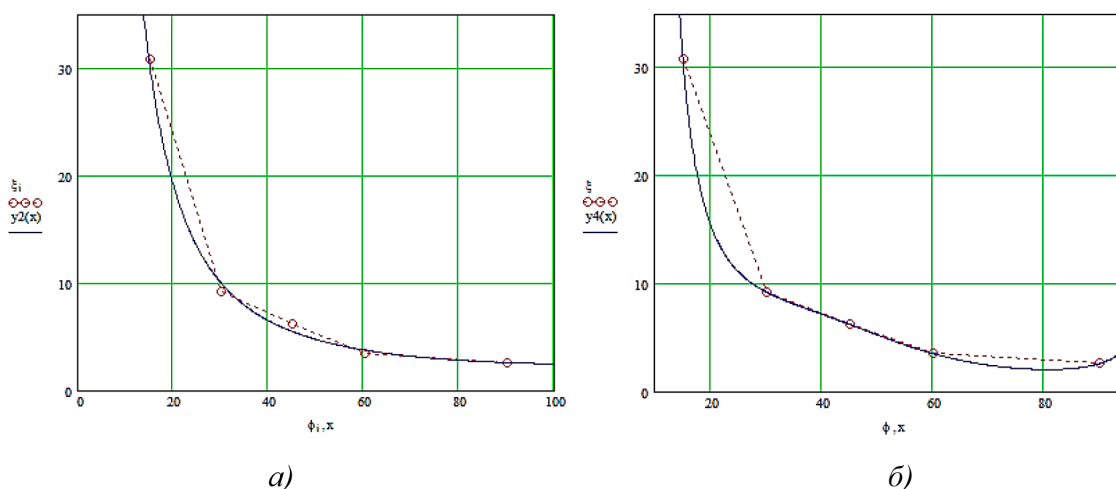
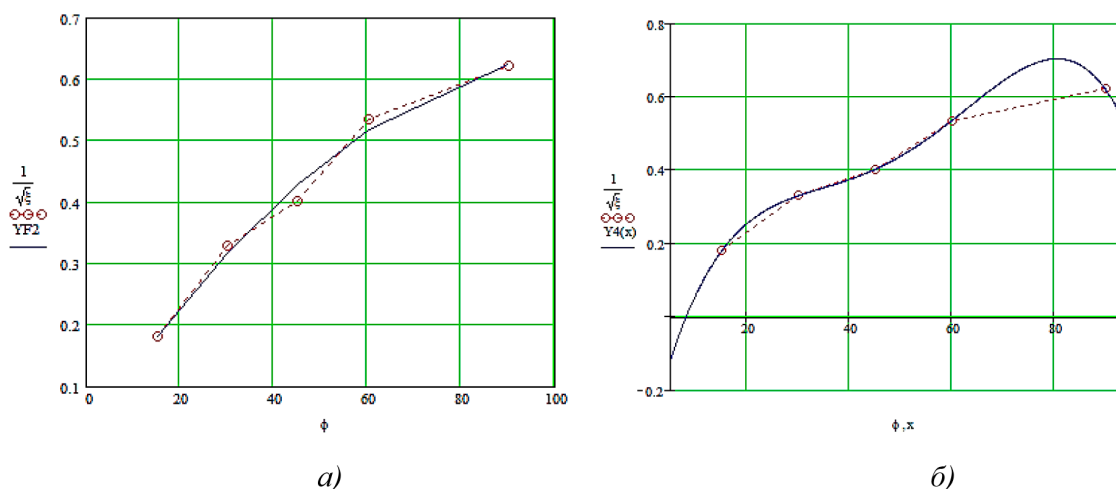


Рис. 1. Графики функций регрессии местного сопротивления а)  $n = 3$ ; б)  $n = 4$

Таблица 3

Функции регрессии обратных зависимостей местного сопротивления

	Уравнение регрессии порядка $n$	Оценка качества
$\zeta = 1/\varepsilon$	$\varepsilon = 0,004826 \cdot \varphi - 0,037$	СКО = 0,5195 $r = 0,999$
$\zeta = 1/\varepsilon^2$	$\varepsilon = -5,189 \cdot 10^{-5} \cdot \varphi^2 + 0,01133 \cdot \varphi + 0,023503$	СКО = 0,245 $r = 0,99877$
$\zeta = 1/\varepsilon^2$	$\varepsilon = -4,289 \cdot 10^{-7} \cdot \varphi^3 + 1,403 \cdot 10^{-5} \cdot \varphi^2 + 8,435 \cdot 10^{-3} \cdot \varphi + 0,056873$	СКО = 0,421 $r = 0,99765$
$\zeta = 1/\varepsilon^2$	$\varepsilon = -1,51 \cdot 10^{-7} \cdot \varphi^4 + 2,95 \cdot 10^{-5} \cdot \varphi^3 - 1,9776 \cdot \varphi^2 + 0,060147 \cdot \varphi - 0,368968$	СКО = 0 $r = 1$

Рис. 2. Графики функций регрессии местного сопротивления а)  $n = 2$ ; б)  $n = 4$ Рис. 3. График функций регрессии коэффициента местного сопротивления, а)  $n = 2$ ; б)  $n = 4$ 

В табл. 3 приведены результаты расчета функции регрессии местного сопротивления, вычисленного как обратная величина от функции регрессии, а на рис. 2 – графики функций регрессии, полученные в программе MathCAD.

Как видно из рис. 2, найденные функции регрессии 2-го и 3-го порядка являются монотонными убывающими. При этом функция регрессии 2-го порядка дает даже меньшую ошибку аппроксимации местного сопротивления, а в сравнении с функцией  $\varepsilon$

ошибка СКО равна  $7 \cdot 10^{-3}$ , что говорит о хорошем качестве аппроксимации (рис. 3, а).

Функция регрессии 4-го порядка при точном совпадении с табличными данными имеет два существенных недостатка: функция равна 0 при  $\varphi = 8$  (что приводит к  $\xi = \infty$ ), а при  $\varphi > 80$  величина, обратная коэффициенту местного сопротивления  $\xi$ , убывает (рис. 3, б).

Если в качестве функции аппроксимации выбрать зависимость обратной величины коэффициента местного сопротивления, то с учетом найденных значений коэффициентов регрессии (табл. 3), при расчете воздухообмена по формуле (1), будем определять величину  $\varepsilon = 1/\sqrt{\xi}$  по формуле

$$\varepsilon = 1/\sqrt{\xi} = \sqrt{(4,826 \cdot 10^{-3} \varphi^{1,05})} = 0,06947 \cdot \varphi^{0,525} - 0,096. \quad (6)$$

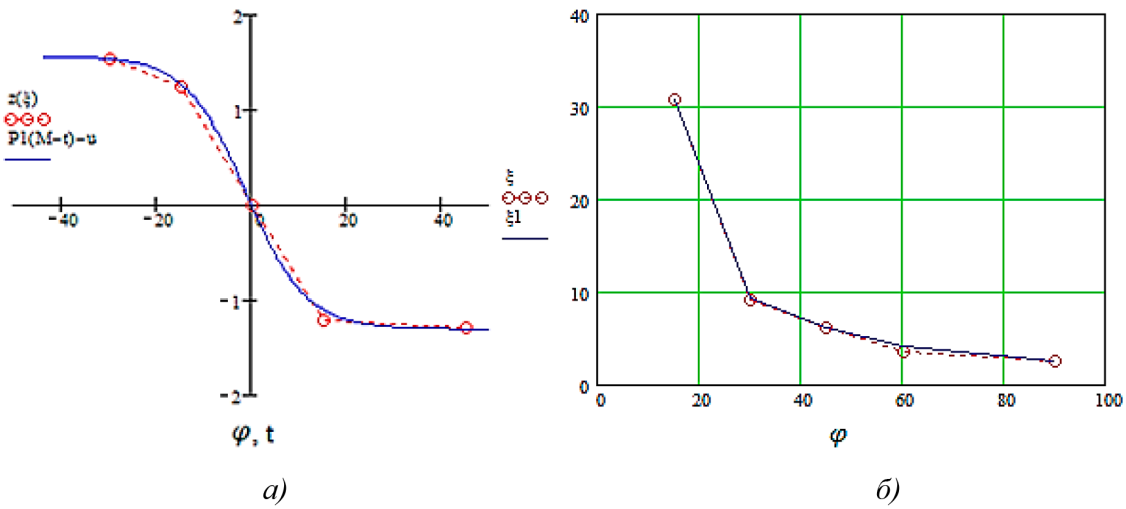


Рис. 4. Графики функций аппроксимации коэффициента местного сопротивления

Таблица 4

Логистическая функция аппроксимации местного сопротивления

$\varphi$	15	30	45	60	90	Оценка качества
$\xi_1$	30,8	9,4	6,2	4,2	2,5	СКО = 0,144 $r = 0,99963$
$1/\sqrt{\xi_1}$	0,18	0,326	0,402	0,489	0,637	СКО = 0,0097 $r = 0,9908$

При этом график зависимости аналогичен показанному на рис. 3, а (СКО равно 0,754), однако начальное значение  $-0,096$  приводит к ошибке деления на ноль при значении угла  $\varphi \approx 1,85^\circ$ .

Рассмотрим центрированную функцию от коэффициента местного сопротивления вида

$$z(\xi) = \arctg(\xi - 6,2). \quad (7)$$

Тогда в качестве функции аппроксимации зависимости (7) можно использовать модифицированное логистическое уравнение Ферхюльста:

$$P1(t, u) = \frac{k_1 \cdot P_0 \cdot e^{rt}}{k_1 + P_0 \cdot (e^{rt} - 1)} - u, \quad (8)$$

где  $k_1, k_2, r, P_0, u, t, M$  – параметры модели, причем  $t = k_2 \cdot (\varphi - 45^\circ) + M$ ;  $\varphi$  – угол раскрытия, град.

Модель (8) является параметрической, и поиск значений параметров модели рассматривается как алгоритмическая задача оптимизации по критерию наилучшего приближения СКО. Тогда значения коэффициента местного сопротивления можно вычислить по формуле

$$\xi_1 = \operatorname{tg}(\operatorname{P1}(t, u)) + 6,2. \quad (9)$$

На рис. 4 приведены зависимости  $z(\xi)$  и функции аппроксимации (8) (рис. 4, а), а также расчетные значения коэффициента местного сопротивления по формуле (9) (рис. 4, б) при следующих значениях параметров:  $k_1 = 2,871$ ,  $k_2 = -0,2$ ,  $r = 0,794$ ,  $P_0 = 1,575$ ,  $u = 1,311$ ,  $M = -0,508$  найденных алгоритмом поиска на языке программирования Python.

В табл. 4 приведены результаты расчета функции аппроксимации местного сопротивления по формуле (9), а также обратные величины  $1/\sqrt{\xi_1}$  для дальнейшего расчета по формуле (1). Полученные результаты показывают высокую точность приближения к исходным данным.

#### Результаты исследования и их обсуждение

Динамику изменения расхода воздуха в системе вентиляции при линейном изменении угла раскрыва воздушной заслонки, в случае аппроксимации коэффициента местного сопротивления функцией регрес-

сии второго порядка (2) (табл. 3), можно описать системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = k \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot (-10,38 \cdot 10^{-5} \cdot t + 0,01133) \\ \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\varepsilon(t)^2} \\ \frac{dG_e}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot F_e \cdot \sqrt{2 \cdot P \cdot \rho_e} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \end{cases}, (10)$$

где  $k$  – угловой коэффициент, определяющий линейную скорость изменения угла раскрыва воздушной заслонки (в модели  $k = 9$  при полном раскрытии заслонки за время  $t = 10$  с).

Для решения системы уравнений была использована встроенная функция *rkfixed* в программе Mathcad, реализующая итерационный метод Рунге – Кутты. Результаты компьютерного моделирования динамики воздухообмена приведены на рис. 5.

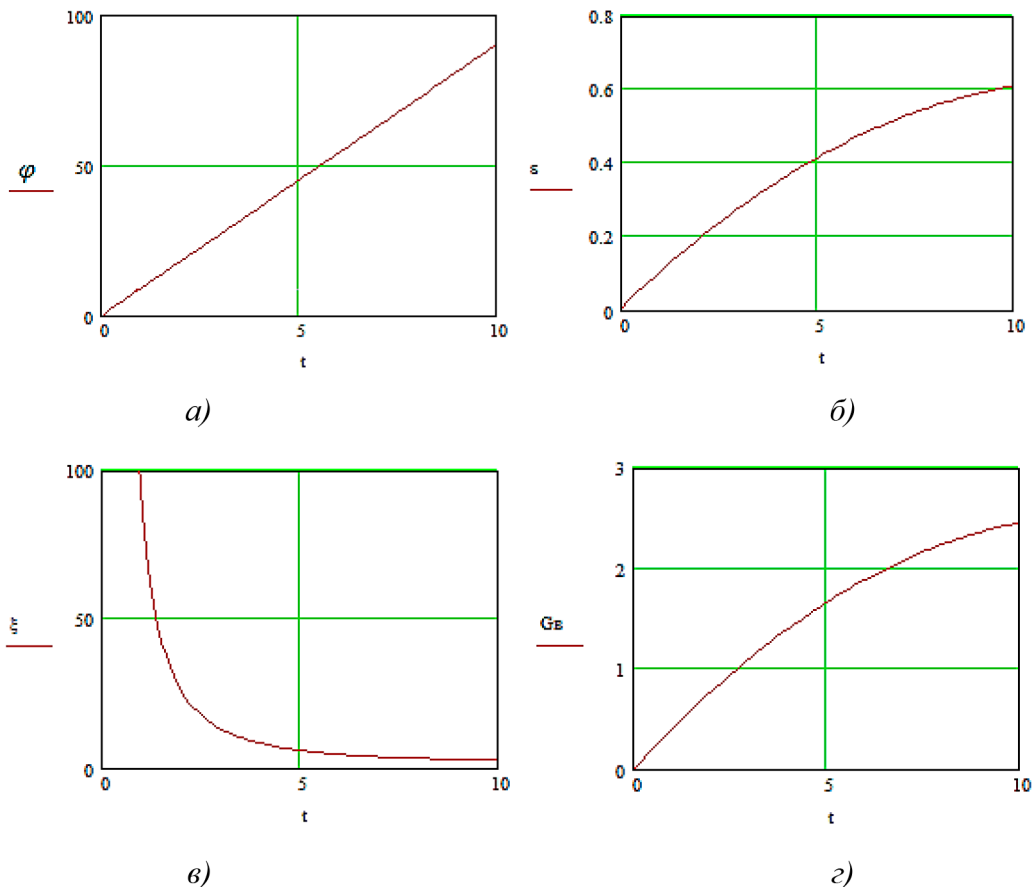


Рис. 5. Модель динамики воздухообмена: а) угол раскрыва заслонки; б) коэффициент  $\varepsilon = 1/\sqrt{\xi}$ ; в) коэффициент местного сопротивления  $\xi$ ; д) расход воздуха, кг/с

Как видно из модельных результатов, коэффициент местного сопротивления уменьшается обратно пропорционально линейному увеличению угла раскрытия заслонки, а воздухообмен через воздушную заслонку аperiodически увеличивается прямо пропорционально величине  $\varepsilon$ . Управление воздухообменом вентилируемого помещения в автоматическом режиме возможно, например, путем изменения угла раскрытия воздушной заслонки в зависимости от температуры внутреннего воздуха.

### Заключение

В работе проведен анализ применения полиномиальной регрессии для аппроксимации местного сопротивления воздушной заслонки, выявлены проблемы применения данного подхода при решении задачи расчета динамики изменения воздухообмена. Рассматриваются модели нелинейных функций аппроксимации и оценка параметров методом линеаризации. Предложена параметрическая модель функции аппроксимации на основе логистической кривой, оптимальные значения параметров которой находятся алгоритмически по критерию минимума среднеквадратического отклонения. Построена математическая модель динамики воздушного режима в виде системы дифференциальных уравнений. Показан пример моделирования воздушного

режима вентилируемого помещения с учетом предложенной модели функции аппроксимации. Результаты моделирования могут быть использованы при проектировании и настройке регулируемых параметров систем вентиляции.

### Список литературы

1. ГОСТ 30494-2011. Здания жилые и общественные. Параметры микроклимата в помещениях. М.: Стандартинформ, 2013. 12 с.
2. СанПиН 1.2.3685-21 Гигиенические нормативы и требования к обеспечению безопасности и (или) безвредности для человека фактов среды обитания. Дата введения 2021-03-01, 2021. 469 с.
3. СП 60.13330.2020. Отопление, вентиляция и кондиционирование. Актуализированная редакция СНиП 41-01-2003. Дата введения 2021-07-01. М.: Стандартинформ, 2021. 149 с.
4. Внутренние санитарно-технические устройства. В 3 ч. Ч. 3. Вентиляция и кондиционирование воздуха / В.Н. Богословский, А.И. Пирумов, В.Н. Посохин и др.; Под ред. Н.Н. Павлова и Ю.И. Шиллера. М.: Стройиздат, 1992. 319 с.
5. Большаков А.А., Каримов Р.Н. Методы обработки многомерных данных и временных рядов: учеб. пособие для вузов. М.: Горячая линия – Телеком, 2007. 522 с.
6. Серда С.Н. К вопросу аппроксимации эмпирических зависимостей // Международный научно-исследовательский журнал. 2017. Т. 5, № 12 (66). С. 133–136.
7. Karl-Georg Steffens. The History of Approximation Theory. From Euler to Bernstein. Boston: Birkhauser, 2006. 235 p.
8. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы. СПб.: Лань, 2023. 672 с.
9. Горлач Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие. СПб.: Лань, 2022. 320 с.