УДК 517.91:519.6
DOI 10.17513/snt.39760

ОБ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ С ОБРАТНОЙ ПРОПОРЦИЕЙ НАЧАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ромм Я.Е.

Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал)
ФГБОУ ВО «Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)»,
Таганрог, e-mail: romm@list.ru

Представлены необходимые и достаточные условия устойчивости, а также асимптотической устойчивости по Ляпунову решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида. Первая разновидность представленных условий формулируется в границах существования и единственности решения на полуоси, кроме того, требуется непрерывность правой части системы и ее непрерывная дифференцируемость на полуоси. Вторая разновидность необходимых и достаточных условий устойчивости формулируется в тех же ограничениях, но без требования дифференцируемости правой части. Первая разновидность использует в формулировке отношение компонента решения к его начальному значению. Вторая разновидность использует только компоненты правой части дифференциальной системы и их отношение к соответственным начальным значениям. Обе разновидности опираются исключительно на вид системы, не преобразуют ее и не применяют построение функции Ляпунова. Предложенные критерии дополнены разновидностями достаточных условий. Так, достаточные условия асимптотической устойчивости решения даны для случая системы, компоненты правой части которой и их производные имеют постоянные знаки на полуоси. Для этого же случая даны достаточные условия неустойчивости. В обоих случаях критерии опираются на теорему Коши о среднем значении и используют отношения компонентов правой части к соответственным начальным значениям. Кроме того, результаты дополнены необходимыми и достаточными условиями устойчивости и асимптотической устойчивости линейных дифференциальных систем с постоянной и переменной матрицей коэффициентов. Рассмотрен способ линеаризации системы. Предложенные критерии допускают компьютерную реализацию, примеры которой приводятся в работе.

Ключевые слова: необходимые и достаточные условия устойчивости по Ляпунову, компьютеризация анализа устойчивости, нелинейные и линейные дифференциальные системы, линеаризация, численное решение задачи Коши

ON STABILITY CONDITIONS WITH AN INVERSE PROPORTION TO THE INITIAL VALUES OF SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS' SYSTEMS

Romm Ya.E.

A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) of Rostov State University of Economics, Taganrog, e-mail: romm@list.ru

The necessary and sufficient conditions for the stability and asymptotic Lyapunov stability of solutions of the general form of ordinary differential equations' systems are presented. The first kind of the presented conditions is formulated within the boundaries of the existence and uniqueness of the solution on the semi-axis, in addition, the continuity of the right part of the system and its continuous differentiability on the semi-axis is required. The second kind of necessary and sufficient stability conditions is formulated in the same constraints, but without the requirement of differentiability of the right part. The first type in the formulation uses the ratio of the solution component to its initial value. The second one applies only the components of the right part of the differential system and their relation to the corresponding initial values. Both varieties rely solely on the type of the system, do not transform it and do not apply the construction of the Lyapunov function. The proposed criteria are supplemented by varieties of sufficient conditions. Thus, sufficient conditions for the asymptotic stability of the solution are given for the case of a system where the right-hand side components and their derivatives have stability signs on the semi-axis. Sufficient instability conditions are given for the same case. In both cases, the criteria are based on the Cauchy's mean value theorem and use the ratios of the components of the right-hand side to the corresponding initial values. The results are supplemented with necessary and sufficient conditions for stability and asymptotic stability of linear differential systems with constant and variable coefficient matrices. The method of linearization of the system is considered. The proposed criteria allow for computer implementation, examples of which are given in the paper.

Keywords: necessary and sufficient Lyapunov stability conditions, computer implementation of stability analysis, nonlinear and linear differential systems, linearization, numerical solution of the Cauchy problem

Фундаментальные положения качественной теории дифференциальных уравнений изложены в [1, 2]. Современное состояние вопроса освещается в [3, 4], а также в [5–8]. При этом в работах, посвященных задачам устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), основное внимание, как правило, обращено на метод функций Ляпунова и его содержание на современном этапе [3]. Предлагаются методы аналитического характера, вместе с тем представлены подходы к рассмотрению прикладных аспектов с применением средств вычислительной техники [4, 6], с преобразованиями функций правой части [7–9] и вычислением функции Ляпунова [10, 11]. Как правило, подходы к разработке прикладных методов не опираются на использование численных методов. Ниже предлагается решение прикладных задач анализа устойчивости именно на основе численных методов решения ОДУ. Ставится задача представить на этой основе необходимые и достаточные условия устойчивости в смысле Ляпунова решений ОДУ общего вида, указать границы применимости предлагаемых критериев, дать примеры численного эксперимента, иллюстрирующие излагаемый подход. При этом аналитические оценки устойчивости должны строиться непосредственно из компонентов правой части дифференциальной системы, без их вычислительных преобразований и без применения функции Ляпунова. Построение численных оценок устойчивости должно опираться на приближенное решение системы ОДУ и давать возможность анализа устойчивости по ходу компьютерной реализации численного интегрирования, что представляется актуальным для основных технических приложений.

Цель исследования заключается в том, чтобы найти необходимые и достаточные условия устойчивости решений систем ОДУ в границах существования и единственности решений. В аналитической форме критерии должны строиться непосредственно из компонентов правой части дифференциальной системы. В численной форме критерии должны опираться на приближенное решение системы и предоставлять возможность компьютерного анализа устойчивости по ходу решения в режиме реального времени. Требуется дать математическое обоснование искомых критериев, проиллюстрировать их достоверность с помощью численного эксперимента.

Исходные положения. Предполагается, что выполнено обычное преобразование задачи Коши для системы ОДУ, в результате которого анализ устойчивости решения в смысле Ляпунова (ниже устойчивости) сводится к анализу устойчивости нулевого решения $V(t)=\bar{O}\ \ \forall\ t\in[t_0,\infty)$ [1]. Преобразованная задача Коши с возмущенными начальными значениями ниже дана в виде

$$V'=U(t,V),\ V(t_0)=V_0,\ t\in[t_0,\infty), \quad (1)$$

где

$$U(t,V)=(u_1(t,V),\,u_2(t,V),\ldots,\,u_n(t,V)),$$

$$V=(v_1(t),v_2(t),\ldots,v_n(t)),$$

$$V_0=(v_{10},v_{20},\ldots,v_{n0}),\ \bar{O}=(0,0,\ldots,0),$$

все значения переменных предполагаются вещественными. Требуется исследовать устойчивость нулевого решения задачи (1). Возмущение (ненулевое решение) $V(t),\ \ V(t_0)\neq\bar{O}$ не будет отмечаться специальным символом и, как синоним, иногда будет называться просто решением задачи (1). Используются согласованные канонические нормы матрицы и вектора, по умолчанию $\|V(t)\|=\max\limits_{1\le k\le n}|v_k(t)|$.

Предполагается, что $\exists\ \delta_0>0$, такое, что в области

$$R_0:\{\,t_0\le t<\infty;\ \forall V(t):\ V'(t)=U(t,V),\ \|V(t_0)\|\le\delta_0\}$$

выполнены все условия существования и единственности решения задачи (1), при этом вектор-функция $U(t,V)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема $\forall V(t)\in R_0$. Совокупность данных предположений в дальнейшем определяется термином «исходные предположения».

В исходных предположениях нулевое решение задачи (1) устойчиво, если $\forall\,\varepsilon>0$ найдется Δ, $0<\Delta\le\delta_0$, такое, что $\|V_0\|\le\Delta$ влечет $\|V(t)\|\le\varepsilon\ \forall t\in[t_0,\infty)$. Нулевое решение асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и найдется Δ_1, $0<\Delta_1\le\Delta$, такое, что из неравенства $\|V_0\|\le\Delta_1$ следует $\lim\limits_{t\to\infty}\|V(t)\|=0$.

Необходимые и достаточные условия устойчивости нулевого решения на основе мультипликативного преобразования метода Эйлера. Для краткости компоненты решения $v_k(t)$ иногда обозначаются v_k. Метод Эйлера приближенного решения задачи (1) по компонентам записывается в виде

$$v_{k(i+1)}=v_{ki}+u_k(t_i,V_i)\,h,$$
$$i=0,1,\ldots,\ \forall\,k\in\overline{1,n}. \quad (2)$$

Шаг h предполагается равномерным, для произвольно выбранной независимой переменной $t\in[t_0,\infty)$ индекс i в (2) на отрезке $[t_0,t]$ неограниченно возрастает в соответствии убывающему на $[t_0,t]$ шагу –

$$\forall t \in (t_0,\ \infty),\ t = \text{const}: t = t_{i+1},\ h = \frac{t_{i+1} - t_0}{i+1} = \frac{t - t_0}{i+1}, \qquad 0, 1, \quad , \qquad , 0$$

$$i = 0, 1, \ldots,\quad t_{j+1} = t_j + h,\ 0 \le j \le i. \tag{3}$$

Для аналитических оценок метод Эйлера на каждом шаге рассматривается исключительно с остаточным членом, в этом случае на каждом шаге он может интерпретироваться как точный (без погрешности), именно,

$$v_{k(i+1)} = v_{k\,i} + u_k(t_i, V_i)\,h + q_{k\,i},\ i = 0, 1, \ldots,\ \forall k \in \overline{1,n}, \tag{4}$$

где q_{ki} – остаточный член формулы Тейлора в окрестности точки t_i радиуса h для k-го компонента приближения:

$$q_{k\,i} = \frac{1}{2}\,u_k'(\xi_{k\,i}, V(\xi_{k\,i}))\,h^2,\quad t_i < \xi_{k\,i} < t_{i+1},\ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{5}$$

В обозначениях (4), (5) выполняются следующие преобразования:

$$v_{k\,(i+1)} = v_{k\,i} + \frac{u_k(t_i, V_i)}{v_{k\,i}}\,v_{k\,i}\,h + q_{k\,i},\ i = 0, 1, \ldots,\ \forall k \in \overline{1,n}, \tag{6}$$

или,

$$v_{k\,(i+1)} = (1 + D_i^{(k)}\,h)\,v_{k\,i} + q_{k\,i},\ i = 0, 1, \ldots,\ \forall k \in \overline{1,n}, \tag{7}$$

где

$$D_i^{(k)} = \frac{u_k(t_i, V_i)}{v_{k\,i}},$$

q_{ki} из (5), метод Эйлера интерпретируется как два первых члена формулы Тейлора для k-го компонента решения. Пусть предполагается до тех пор, пока не оговорено иное, что

$$v_{k\,i}(t) \ne 0,\quad i = 0, 1, \ldots,\ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{8}$$

Кроме того, на время рассмотрения (7) (и только на это время) предполагается, что

$$\forall T = \text{const},\ T \in [t_0, \infty):\ \left| u_k(t, V) \right| \le L_T \left| v_k(t) \right|,\ L_T = \text{const}\ \forall t \in [t_0, T],\ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{9}$$

С учетом (9) при ограничении (8)

$$\left| D_{i-\ell}^{(k)} \right| \le L_T,\ L_T = \text{const},\ i = 0, 1, \ldots,\ \forall \ell = 0, 1, \ldots, i,\ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{10}$$

Предположения (8), (9) и (10) вводятся только на период рассмотрения (6), (7) с мультипликативными преобразованиями. В дальнейшем, начиная с применения аддитивных преобразований метода Эйлера, эти предположения, дополнительные к исходным предположениям, не будут считаться выполненными.

Точное значение компонентов решения задачи (1) преобразуется к виду

$$v_{k(i+1)} = (1 + D_i^{(k)}\,h)\,v_{k\,i} + q_{k\,i} = (1 + D_i^{(k)}\,h)\,((1 + D_{i-1}^{(k)}\,h)\,v_{k(i-1)} + q_{k(i-1)}) + q_{k\,i},$$

или $v_{k(i+1)} = (1 + D_i^{(k)}\,h)(1 + D_{i-1}^{(k)}\,h)\,v_{k(i-1)} + (1 + D_i^{(k)}\,h)\,q_{k(i-1)} + q_{k\,i}$. Отсюда

$$v_{k\,(i+1)} = (1 + D_i^{(k)}\,h)(1 + D_{i-1}^{(k)}\,h)((1 + D_{i-2}^{(k)}\,h)v_{k\,(i-2)} + q_{k\,(i-2)}),$$

так что

$$v_{k\,(i+1)} = (1 + D_i^{(k)}\,h)(1 + D_{i-1}^{(k)}\,h)(1 + D_{i-2}^{(k)}\,h)\,v_{k\,(i-2)} +$$
$$+ (1 + D_i^{(k)}\,h)(1 + D_{i-1}^{(k)}\,h)q_{k\,(i-2)} + (1 + D_i^{(k)}\,h)\,q_{k\,(i-1)} + q_{k\,i}.$$

Далее, по рекуррентности,

$$v_{k(i+1)} = \prod_{\ell=0}^{i}(1 + D_{i-\ell}^{(k)}\,h)\ v_{k0} + \sum_{r=0}^{i-1}\prod_{\ell=0}^{r}(1 + D_{i-\ell}^{(k)}\,h)\ q_{k(i-r-1)} + q_{k\,i},\ i = 0, 1, \ldots,\ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{11}$$

Пусть

$$R_{0i}^{(k)} = \sum_{r=0}^{i-1} \prod_{\ell=0}^{r} (1 + D_{i-\ell}^{(k)} h) q_{k(i-r-1)} + q_{ki}, \ i = 0, 1, \ldots, \ \forall k \in \overline{1,n} \qquad (12)$$

Лемма 1. *В предположениях, дополнительно к исходным включающих (8), (9) и (10),*

$$\lim_{i\to\infty} R_{0i}^{(k)} = 0 \quad \forall T = \text{const},\ T \in [t_0, \infty),\ \forall t \in [t_0, T],\ \forall k \in \overline{1,n} \qquad (13)$$

Доказательство [12, 13]. Для $\forall T \in [t_0, \infty)$ $\exists\, C = C(T)$, $C = \text{const}$ $\forall t \in [t_0, T]$: $\left\| U'(t,V) \right\| \le C$. Поэтому, согласно (5), (6), в (12) $\left| q_{kr} \right| \le C_0 h^2$, $C_0 = \frac{1}{2} C$, $\forall r \in \overline{0, i}$; $\forall i = 1, 2, \ldots$, $\forall k \in \overline{1,n}$. Пусть $k \in \overline{1,n}$ произвольно фиксировано. Очевидно,

$$\left| R_{0i}^{(k)} \right| \le \sum_{r=0}^{i-1} \prod_{\ell=0}^{r} \left| (1 + D_{i-\ell}^{(k)} h) \right| \left| q_{k(i-r-1)} \right| + \left| q_{ki} \right|.$$

С учетом (10), $\left| R_{0i}^{(k)} \right| \le \sum_{r=0}^{i-1} \prod_{\ell=0}^{r} \left| (1 + L_T h) \right| C_0 h^2 + C_0 h^2$.

Отсюда $\left| R_{0i}^{(k)} \right| \le \sum_{r=0}^{i-1} \left| 1 + L_T h \right|^{r+1} C_0 h^2 + C_0 h^2 = C_0 h^2 \sum_{r=0}^{i} \left| 1 + L_T h \right|^{r}$, что влечет

$$\left| R_{0i}^{(k)} \right| \le C_0 h^2 \frac{(1 + L_T h)^{i+1} - 1}{(1 + L_T h) - 1}, \text{ или}$$

$$\left| R_{0i}^{(k)} \right| \le \frac{C_0}{L_T} \left((1 + L_T h)^{\frac{(t-t_0)}{h}} - 1 \right) h = \frac{C_0}{L_T} \left((1 + L_T h)^{\frac{1}{L_T h}(t-t_0) L_T} - 1 \right) h.$$

Уменьшаемое, монотонно возрастая, стремится к $e^{L_T \left(t - t_0 \right)}$. Отсюда, с учетом (3),

$$\left| R_{0i}^{(k)} \right| \le \frac{C_0}{L_T} \left(e^{L_T \left(t - t_0 \right)} - 1 \right) \frac{t - t_0}{i + 1}.$$

Таким образом, $\forall T = \text{const}$, $T \in [t_0, \infty)$, $\forall t \in [t_0, T]$, $\forall k \in \overline{1,n}$, $R_{0i}^{(k)} \rightrightarrows 0$ при $i \to \infty$. Лемма доказана.

Следствие 1. В условиях леммы 1

$$v_k(t) = \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} (1 + D_{i-\ell}^{(k)} h) v_k(t_0) \quad \forall t \in [t_0, \infty),\ \forall k \in \overline{1,n}. \qquad (14)$$

Доказательство. Предельный переход в (11) с учетом (12), (13) влечет (14).

Из леммы 1 и следствия 1 вытекает

Лемма 2 [12, 13]. *В условиях леммы 1 для устойчивости нулевого решения задачи (1) необходимо и достаточно существование* Δ, $0 < \Delta \le \delta_0$, *такого, что для всех решений* $V(t)$, $V(t_0) = V_0$, *при ограничении* $0 < \left\| V_0 \right\| \le \Delta$ *выполняется неравенство*

$$\left| \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} (1 + D_{i-\ell}^{(k)} h) \right| \le C^{(1)},\ \ C^{(1)} = \text{const} \ \ \forall t \in [t_0, \infty),\ \forall k \in \overline{1,n}. \qquad (15)$$

Для асимптотической устойчивости нулевого решения в тех же условиях необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предыдущее утверждение и существовало $\Delta_1 \le \Delta$, такое, что неравенство $0 < \left\| V_0 \right\| \le \Delta_1$ влечет

$$\lim_{t\to\infty} \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} (1 + D_{i-\ell}^{(k)} h) = 0 \quad \forall k \in \overline{1,n}. \qquad (16)$$

Соотношения леммы 2 упрощаются непосредственно ниже.

Условия устойчивости с обратной пропорцией начальным значениям. Из следствия 1 и (14)

$$\frac{v_k(t)}{v_k(t_0)} = \lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}(1+D_{i-\ell}^{(k)}h) \quad \forall t\in[t_0, \infty), \ \forall k\in\overline{1,n} \ . \tag{17}$$

Согласно (17) из леммы 2 вытекает

Следствие 2 [13]. Условия, формулировка и утверждение леммы 2 дословно сохраняются при замене соотношения (15) на соотношение вида

$$\left|\frac{v_k(t)}{v_k(t_0)}\right| \le C^{(1)}, \ C^{(1)} = \text{const} \ \ \forall t\in[t_0, \infty), \ \forall k\in\overline{1,n}, \tag{18}$$

и (16) – на соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{v_k(t)}{v_k(t_0)}\right| = 0 \ \ (\lim_{t\to\infty} v_k(t) = 0) \ \ \forall k\in\overline{1,n}. \tag{19}$$

Таким образом, в основных предположениях, дополненных предположениями (8), (9) и (10), необходимое и достаточное условие устойчивости дает соотношение (18). Необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости дает одновременное выполнение (18) и (19), в (19) деление на $v_k(t_0)$ можно исключить. Ограничения (8)–(10) существенно сужают область применения этих критериев. Однако, как будет показано непосредственно ниже, эти ограничения можно снять.

Необходимые и достаточные условия устойчивости на основе аддитивного преобразования метода Эйлера. Соотношение (14) представляет собой эквивалентное преобразование метода Эйлера с учетом остаточного члена. Аналогичное соотношение можно получить на основании аддитивного преобразования метода Эйлера, также с учетом остаточного члена. Именно, из (4)

$$v_{k(i+1)} = v_{k\,i} + u_k(t_i, V_i)h + q_{k\,i} = v_{k\,(i-1)} + u_k(t_{i-1}, V_{i-1})h + q_{k(i-1)} + u_k(t_i, V_i)h + q_{k\,i}\,.$$

Отсюда

$$v_{k(i+1)} = v_{k\,(i-2)} + u_k(t_{i-2}, V_{i-2})h + q_{k(i-2)} + u_k(t_{i-1}, V_{i-1})h + q_{k(i-1)} + u_k(t_i, V_i)h + q_{k\,i}\,,$$

и, далее, по рекуррентности,

$$v_{k(i+1)} = v_{k\,(i-i)} + u_k(t_{i-i}, V_{i-i})h + q_{k(i-i)} + u_k(t_{i-(i-1)}, V_{i-(i-1)})h + q_{k(i-(i-1))} + \cdots +$$
$$+ u_k(t_{i-1}, V_{i-1})h + q_{k(i-1)} + u_k(t_i, V_i)h + q_{k\,i}\,.$$

Окончательно

$$v_{k(i+1)} = v_{k0} + \sum_{\ell=0}^{i} u_k(t_{i-\ell}, V_{i-\ell})h + \sum_{\ell=0}^{i} q_{k(i-\ell)}, \ \ v_{k0} = v_k(t_0), \ \ \forall k\in\overline{1,n}.$$

При $i \to \infty$ на любом отрезке $[t_0, t]$ получится

$$v_k(t) = v_{k0} + \lim_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i}(u_k(t_{i-\ell}, V_{i-\ell})h) + \lim_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i} q_{k(i-\ell)}, \ \ \forall t\in[t_0, \infty), \ \ \forall k\in\overline{1,n},$$

где с учетом (3)–(5), в обозначениях доказательства леммы 1,

$$\left|q_{k\,i}\right| \le C_0h^2, \ C_0 = C_0(T), \ C_0 = \text{const} \ \ \forall t\in[t_0, T] \ \ \forall T\in[t_0, \infty), \forall k\in\overline{1,n}, \ \forall\, i = 1, 2, \ldots\ .$$

Предел суммы остаточных членов равен нулю. В самом деле, $\forall t\in[t_0, T]$,

$$\left|\sum_{\ell=0}^{i} q_{k(i-\ell)}\right| \le \sum_{\ell=0}^{i}\left|q_{k(i-\ell)}\right| \le \sum_{\ell=0}^{i} C_0h^2 = (i+1)C_0h^2 = \frac{t-t_0}{h}C_0h^2 = (t-t_0)C_0h = C_0\frac{(t-t_0)^2}{i+1}.$$

Отсюда $\left|\sum_{\ell=0}^{i} q_{k(i-\ell)}\right| \le C_0\dfrac{(T-t_0)^2}{i+1} \to 0\,,\ i\to\infty,$

следовательно, $\left|\sum_{\ell=0}^{i} q_{k(i-\ell)}\right| \rightrightarrows 0$, $i \to \infty$, $\forall t \in [t_0, T]$, $\forall k \in \overline{1,n}$.

Вследствие того, что $\lim\limits_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i} q_{k(i-\ell)} = 0 \quad \forall k \in \overline{1,n}$, с учетом произвольности выбора $T \in [t_0, \infty)$,

$$v_k(t) = v_k(t_0) + \lim_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i} (u_k(t_{i-\ell}, V_{i-\ell})h) \quad \forall t \in [t_0, \infty),\ \forall k \in \overline{1,n}, \tag{20}$$

где $h = h(i)$ из (3), $h \to 0$, $i \to \infty$, поэтому слагаемое под знаком суммы заключено в скобки. В каждой точке $t \in [t_0, \infty)$ соотношение (20) представляет собой результат сходимости метода Эйлера на отрезке $[t_0, t]$.

Замечание 1. Равенство (20) верно в более широких условиях, чем равенство (14). Оно непосредственно выводится из метода Эйлера с учетом остаточного члена без применения операций деления, что ранее требовало ограничения (8), и без использования неравенств (9) и (10). Для выполнения (20) достаточно изложенных вначале исходных предположений.

Как и в (14), в (20) можно выделить начальное значение в виде множителя:

$$v_k(t) = \frac{v_k(t_0) + \lim\limits_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i} (u_k(t_{i-\ell}, V_{i-\ell})h)}{v_k(t_0)} \times v_k(t_0) \quad \forall t \in [t_0, \infty),\ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{21}$$

Из (21) очевидно, что устойчивость нулевого решения задачи (1) полностью определяется асимптотическим поведением дроби перед выделенным сомножителем $v_k(t_0)$. Поскольку (21) эквивалентно (20), то с учетом замечания 1 соответственный критерий на основе данной дроби окажется применимым в условиях свободных от ограничений (8), (9) и (10). В результате лемма 2 переходит в следующую лемму.

Лемма 3. *В исходных предположениях, не включающих ограничения (8), (9) и (10), для устойчивости нулевого решения задачи (1) необходимо и достаточно существование* Δ, $0 < \Delta \le \delta_0$, *такого, что* $\forall V(t)\colon 0 < \| V(t_0) \| \le \Delta$ *выполняется соотношение*

$$\left| \frac{v_k(t_0) + \lim\limits_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i} (u_k(t_{i-\ell}, V_{i-\ell})h)}{v_k(t_0)} \right| \le C^{(1)},\ C^{(1)} = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty),\ \forall k \in \overline{1,n}, \tag{22}$$

где $h = h(i)$ из (3), $h \to 0$, $i \to \infty$. В тех же предположениях для асимптотической устойчивости нулевого решения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предыдущее утверждение и существовало $\Delta_1 \le \Delta$, *такое, что неравенство* $0 < \| V_0 \| \le \Delta_1$ *влечет*

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{i\to\infty} \frac{v_k(t_0) + \lim\limits_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i} (u_k(t_{i-\ell}, V_{i-\ell})h)}{v_k(t_0)} = 0 \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{23}$$

Соотношение (22) выполняется в предположениях существования и единственности решения задачи (1), а также дифференцируемости правой части (1) на полуоси. То же относится к (23). Согласно (21) в условиях леммы 3 во всей области R_0 выполняется

$$\frac{v_k(t)}{v_k(t_0)} = \frac{v_k(t_0) + \lim\limits_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i} (u_k(t_{i-\ell}, V_{i-\ell})h)}{v_k(t_0)} \quad \forall t \in [t_0, \infty),\ \forall k \in \overline{1,n},$$

где рассматриваются только возмущенные решения, так что заведомо $v_k(t_0) \ne 0$. Отсюда и из леммы 3 вытекает

Теорема 1. *В исходных предположениях, в которых, в частности, не требуется выполнения (8), (9) и (10), для устойчивости нулевого решения задачи (1) необходимо и достаточно существование* Δ, $0 < \Delta \le \delta_0$, *такого, что* $\forall V(t)\colon 0 < \| V(t_0) \| \le \Delta$ *выполняется соотношение*

$$\left| \frac{v_k(t)}{v_k(t_0)} \right| \le C^{(1)},\ C^{(1)} = \mathrm{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty),\ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{24}$$

В тех же условиях для асимптотической устойчивости нулевого решения необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво и существовало $\Delta_1 \le \Delta$, такое, что $\forall V(t) : 0 < \| V(t_0) \| \le \Delta_1$ выполняется соотношение

$$\lim_{t \to \infty} \left| \frac{v_k(t)}{v_k(t_0)} \right| = 0 \quad \left(\lim_{t \to \infty} v_k(t) = 0 \right) \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{25}$$

Таким образом, для критериев (24), (25) не требуется иных ограничений кроме существования и единственности решений, а также непрерывной дифференцируемости правой части (1) в R_0. Неравенства (8), (10) были необходимы для обеспечения (13) и, соответственно, (14). Для выполнения (21) этого не требуется – достаточно исходных предположений.

Замечание 2. Ограничения (8)–(10) исключали целые классы уравнений из числа допускающих применение (24), (25). Так, если $u_k(t) = \cos(t),\ v_k(t) = \sin(t)$, то (8) нарушалось бы при всех $t = r\pi,\ r = 0, 1, 2, \ldots$

Поскольку в числителях соотношений (21)–(23) интеграл, приближенно вычисляемый по формуле прямоугольников, то с переходом к пределу при $h \to 0$ обосновывается

Следствие 3. Условия и утверждения теоремы 1 сохранятся, если соотношения (24) и (25) заменить соответственно на соотношение

$$\left| \frac{v_k(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} u_k(t, V, V_0)\, dt}{v_k(t_0)} \right| \le C^{(1)},\quad C^{(1)} = \mathrm{const},\ \forall t \in [t_0, \infty),\ \forall k \in \overline{1,n} \tag{26}$$

и

$$\lim_{t \to \infty} \left| \frac{v_k(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} u_k(t, V, V_0)\, dt}{v_k(t_0)} \right| = 0 \quad \left(\lim_{t \to \infty} \left(v_k(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} u_k(t, V, V_0)\, dt \right) = 0 \right) \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{27}$$

Очевидно, следствие 3 – разновидность теоремы 1. Вместе с тем (26), (27) дают возможность учитывать условия сходимости несобственного интеграла. Так, имеет место

Следствие 4. Если $\forall \Delta_1,\ 0 < \Delta_1 \le \delta_0,\ \exists V_0 = V(t_0) : 0 < \| V(t_0) \| \le \Delta_1$, такое, что $\exists k :\ \exists \lim\limits_{t \to \infty} u_k(t, V, V_0) = \alpha,\ \alpha > 0$, то нулевое решение задачи (1) неустойчиво. Аналогично, в случае $\exists k :\ \exists \lim\limits_{t \to \infty} u_k(t, V, V_0) = \alpha_0,\ \alpha_0 < 0$.

Доказательство. В условиях следствия $\exists k,\ \exists t_1 > t_0,\ \exists \beta > 0,\ \beta < \alpha,\ \beta = \mathrm{const} :\ u_k(t, V, V_0) > \beta \ \ \forall t \in [t_1, \infty)$. Поэтому выполняется соотношение

$$v_k(t) = v_k(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} u_k(t, V, V_0)\, dt = v_k(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1} u_k(t, V, V_0)\, dt + \quad u \quad t\ V\ \ V \quad dt \quad v \quad t \qquad u \quad t\ V$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} u_k(t, V, V_0)\, dt > v_k(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1} u_k(t, V, V_0)\, dt + (t - t_1)\beta \quad \forall t \in [t_1, \infty).$$

Отсюда $v_k(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, что исключает устойчивость нулевого решения.

Случай $\exists k,\ \exists \lim\limits_{t \to \infty} u_k(t, V, V_0) = \alpha_0,\ \alpha_0 < 0$, рассматривается аналогично.

Следствие 5. Если $\forall \Delta_1,\ 0 < \Delta_1 \le \delta_0,\ \exists \left\{ V_{0m} \right\}_{m=1}^{\infty},\ V_{0m} = V_m(t_0),\ 0 < \| V_{0m} \| \le \Delta_1$, такие, что выполняется соотношение

$$\exists\, k: \exists \lim_{v_{km}(t_0)\to 0} \lim_{t\to\infty} \frac{u_k(t,V,V_{0m})}{\left| v_{km}(t_0)\right|} = \alpha_1,\ \alpha_1 > 0,$$

то нулевое решение задачи (1) неустойчиво.

Аналогично, в случае $\exists\, k: \exists \lim\limits_{v_{km}(t_0)\to 0} \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u_k(t,V,V_{0m})}{\left| v_{km}(t_0)\right|} = \alpha_2,\ \alpha_2 < 0$.

Доказательство. В условиях следствия $\exists\, k$, $\exists\, M$, такие, что $\forall\, m \ge M$ выполняется соотношение $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u_k(t,V,V_{0m})}{\left| v_{km}(t_0)\right|} = \beta_1,\ \beta_1 > 0$. Для таких *k, M* выполнены условия следствия 4, поэтому нулевое решение системы (1) неустойчиво.

Случай $\exists\, k: \exists \lim\limits_{v_{km}(t_0)\to 0} \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u_k(t,V,V_{0m})}{\left| v_{km}(t_0)\right|} = \alpha_1,\ \ \alpha_1 < 0$, рассматривается аналогично.

Согласно следствиям 4, 5 существование при некотором $k \in \overline{1,n}$ в любой произвольно малой окрестности нулевых начальных значений конечного и отличного от нуля предела $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u_k(t,V,V_0)}{\left| v_k(t_0)\right|}$ влечет неустойчивость нулевого решения. Отсюда имеет место

Следствие 6. Необходимым условием устойчивости нулевого решения задачи (1) является утверждение, что либо $\forall\, k \in \overline{1,n}, \forall\, \Delta_1,\ 0 < \Delta_1 \le \delta_0,\ \ \forall \left\{ V_{0m} \right\}_{m=1}^{\infty},\ V_{0m} = V_m(t_0)$, $0 < \left\| V_{0m} \right\| \le \Delta_1$

$$\exists \lim_{v_{km}(t_0)\to 0} \lim_{t\to\infty} \frac{u_k(t,V,V_{0m})}{\left| v_{km}(t_0)\right|} = 0, \tag{28}$$

либо $\lim\limits_{v_{km}(t_0)\to 0} \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u_k(t,V,V_{0m})}{\left| v_{km}(t_0)\right|}$ при некоторых $k \in \overline{1,n}$ не существует, а для остальных *k* верно (28).

Замечание 3. Для устойчивости нулевого решения задачи (1) недостаточно стремления к нулю подынтегральной функции $\int\limits_{t_0}^{t} u_k(t,V)\,dt$, недостаточно также выполнения соотношения $\lim\limits_{v_{km}(t_0)\to 0} \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u_k(t,V,V_{0m})}{\left| v_{km}(t_0)\right|} = 0\ \ \forall\, k \in \overline{1,n}$.

Необходимым и достаточным условием устойчивости является выполнение (26) в исходных предположениях, асимптотической устойчивости – одновременно (26) и (27). Аналогично, в исходных предположениях необходимые и достаточные условия устойчивости дает теорема 1.

В (26) $v_k(t_0)$ тривиально вносится под знак интеграла. Значение $v_k(t_0)$ может быть произвольно малым, от него зависит подынтегральная функция, в этой связи используется развернутое обозначение $u_k(t,V) = u_k(t,V,V(t_0))$. Соотношение (26) эквивалентно

$$\left| \int_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_k(t_0)}\,dt \right| \le C_1,\ \ C_1 = \text{const}\ \ \forall t \in [t_0,\infty),\ \forall\, k \in \overline{1,n},$$

(27) – $\lim\limits_{t\to\infty} \left| 1 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_k(t_0)}\,dt \right| = 0\ \ \forall\, k \in \overline{1,n}$, что равносильно

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_k(t_0)}\,dt = -1,\ \text{ или }\ \int_{t_0}^{\infty} \frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_k(t_0)}\,dt = -1\ \ \ \forall\, k \in \overline{1,n}.$$

В результате следствие 3 перейдет в следующее утверждение.

Лемма 4. *В исходных предположениях для устойчивости нулевого решения задачи (1) необходимо и достаточно существование* $\Delta,\ 0<\Delta\le\delta_0$, *такого, что* $\forall V(t)\colon 0<\|V(t_0)\|\le\Delta$ *выполняется соотношение*

$$\left|\int_{t_0}^{t}\frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_k(t_0)}dt\right|\le C_1,\ \ C_1=\mathrm{const}\quad \forall t\in[t_0,\infty),\ \forall k\in\overline{1,n}. \tag{29}$$

В тех же условиях для асимптотической устойчивости нулевого решения необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво и существовало $\Delta_1\le\Delta$, такое, что $\forall V(t)\colon 0<\|V(t_0)\|\le\Delta_1$ верно равенство

$$\lim_{t\to\infty}\left|1+\int_{t_0}^{t}\frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_k(t_0)}dt\right|=0\quad \forall k\in\overline{1,n}, \tag{30}$$

или, что равносильно,

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_k(t_0)}dt=-1\quad \forall k\in\overline{1,n}.$$

На основании леммы 4 для оценки устойчивости можно применить мажоранты. Так, (29) будет выполняться, если $\forall V(t)\colon 0<\|V(t_0)\|\le\Delta$ имеют место соотношения

$$\forall k\in\overline{1,n}\ \ \exists f_k(t)\colon\ \left|\frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_k(t_0)}\right|\le|f_k(t)|,\ \int_{t_0}^{t}|f_k(t)|dt\le C_1,\ \ C_1=\mathrm{const}\ \ \forall t\in[t_0,\infty).$$

В частности, если $0<t_0$ и $u_k(t,V,V(t_0))$ допускает выбор $f_k(t)=\rho t^{-\beta}$, где $1<\beta,\ 0<\rho$, то

$$\int_{t_0}^{t}|f_k(t)|dt=\rho\int_{t_0}^{t}t^{-\beta}dt,\ \text{тогда}\ \int_{t_0}^{t}|f_k(t)|dt=\rho\left(\frac{1}{1-\beta}t^{1-\beta}-\frac{1}{1-\beta}t_0^{\,1-\beta}\right),$$

$$\text{где}\ \frac{\rho}{\beta-1}\left(t_0^{\,1-\beta}-t^{1-\beta}\right)\le\frac{\rho}{\beta-1}t_0^{\,1-\beta}\quad \forall t\in[t_0,\infty),\ \forall k\in\overline{1,n}.$$

В этом случае будет выполняться (29):

$$\left|\int_{t_0}^{t}\frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_k(t_0)}dt\right|\le\int_{t_0}^{t}\left|\frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_k(t_0)}\right|dt\le\int_{t_0}^{t}|f_k(t)|dt\le C_1,\ C \qquad t \qquad C$$

$$C_1=\sup_{0<\|V(t_0)\|\le\Delta}\frac{\rho}{\beta-1}t_0^{\,1-\beta},\ C_1=\mathrm{const}\ \ \forall t\in[t_0,\infty),\ \forall k\in\overline{1,n}. \tag{31}$$

Если данный выбор ρ и β в $\dfrac{\rho}{\beta-1}t_0^{\,1-\beta}$ возможен в некоторой Δ-окрестности начальных значений, то (31) верно $\forall V(t)\colon 0<\|V(t_0)\|\le\Delta$, и нулевое решение задачи (1) будет устойчиво в силу леммы 4. В этом же случае нулевое решение будет асимптотически устойчиво, если при условии $0<\|V_0\|\le\Delta_1$ выполняются соотношения

$$\forall k\in\overline{1,n}\ \ \exists g_k(t),\ \exists c=\mathrm{const}:\ \left|1+\int_{t_0}^{t}\frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_k(t_0)}dt\right|\le c\left|1+\int_{t_0}^{t}g_k(t)\,dt\right|,\ \int_{t_0}^{t}g_k(t)\,dt\to-1,\ t\to\infty.$$

Так, если при значениях параметров из предыдущего примера функция $u_k(t,V,V(t_0))$ допускает выбор $g_k(t)=-\rho t^{-\beta}$, то

$$\int_{t_0}^{t}g_k(t)\,dt=-\rho\int_{t_0}^{t}t^{-\beta}dt=-\rho\left(\frac{1}{1-\beta}t^{1-\beta}-\frac{1}{1-\beta}t_0^{\,1-\beta}\right)\to-\rho\frac{1}{\beta-1}t_0^{\,1-\beta},\ t\to\infty,$$

и, при выборе $\rho=\dfrac{\beta\text{-}1}{t_0^{1-\beta}}$, будет выполнено $\int\limits_{t_0}^{t} g_k(t)\,dt \to -1$, следовательно, выполнится

$$\left|1+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_k(t_0)}dt\right| \le c\left|1+\int\limits_{t_0}^{t} g_k(t)\,dt\right| \to 0\ ,\ t\to\infty. \qquad (32)$$

Если данный выбор ρ и β в $\rho=\dfrac{\beta\text{-}1}{t_0^{1-\beta}}$ возможен в Δ_1-окрестности начальных значений, то это будет означать, что (32) выполняется для всех решений $V(t)$, при условии $0<\left\| V(t_0)\right\| \le \Delta_1$. Соответственно, в тех же условиях будет выполняться (30), что будет означать асимптотическую устойчивость нулевого решения задачи (1). Напротив, если $\forall\Delta>0$, $\forall N>0,\ \ N=\text{const}$, $\exists\, V(t)$, $V(t_0)=V_0$, такое, что при ограничении $0<\left\| V_0\right\|\le\Delta$ выполняется соотношение

$$\exists\, k\in\overline{1,n},\ \exists\,\Phi_k(t):\ \left|\int\limits_{t_0}^{t}\frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_k(t_0)}dt\right| \ge \left|\int\limits_{t_0}^{t}\Phi_k(t)\,dt\right| \ge N\ \ \forall t\in[t_0,\infty),$$

то нулевое решение будет неустойчиво. Например, если данному неравенству в рассматриваемых условиях будет удовлетворять $\Phi_k(t)=\rho t^{-\beta}$, $0<\beta<1,\ 0<\rho$, то

$$\int\limits_{t_0}^{t}\Phi_k(t)\,dt=\rho\int\limits_{t_0}^{t} t^{-\beta}\,dt=\rho\left(\frac{1}{1\text{-}\beta}t^{1-\beta}\text{-}\frac{1}{1\text{-}\beta}t_0^{\,1-\beta}\right)\to\infty,\quad t\to\infty,$$

что влечет неустойчивость нулевого решения.

В результате имеет место

Предложение 1. *Пусть для задачи (1) выполнены исходные предположения. Если* $\exists\,\Delta$, *такое, что* $\forall V(t)\colon 0<\left\| V(t_0)\right\|\le\Delta$ *выполняется соотношение*

$$\forall k\in\overline{1,n}\ \ \exists f_k(t):\ \left|\frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_k(t_0)}\right| \le \left| f_k(t)\right|,\ \int\limits_{t_0}^{t}\left| f_k(t)\right| dt \le C_1,\ \ C_1=\text{const}\ \ \forall t\in[t_0,\infty), \qquad (33)$$

то нулевое решение задачи (1) устойчиво. В частности, это так, если в (33) можно выбрать $f_k(t)=\rho t^{-\beta}\ \ \forall k\in\overline{1,n}$, *где* $0<\rho,\ 1<\beta,\ \beta=\text{const},\ \rho=\text{const}$. *Если нулевое решение устойчиво и при этом* $\exists\,\Delta_1$, $0<\Delta_1\le\Delta$, *такое, что неравенство* $0<\left\| V(t_0)\right\|\le\Delta_1$ *влечет выполнение соотношения*

$$\forall k\in\overline{1,n}\ \ \exists g_k(t),\ \exists\, c=\text{const}:\ \left|1+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_k(t_0)}dt\right| \le c\left|1+\int\limits_{t_0}^{t} g_k(t)\,dt\right|,\quad g\quad t\quad dt\qquad t$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} g_k(t)\,dt \to -1\ ,\ t\to\infty, \qquad (34)$$

то нулевое решение асимптотически устойчиво. В частности, это так, если в (34) можно выбрать $g_k(t)=-\rho t^{-\beta},\ 0<\rho,\ \ \rho=\text{const},\ \ 1<\beta,\ \ \beta=\text{const}$, *при значении* $\rho=(\beta\text{-}1)\,t_0^{\,\beta\text{-}1}$. *Если* $\forall\Delta>0$, $\forall N>0,\ \ N=\text{const}$, $\exists\, V(t)$, *такое, что при ограничении* $0<\left\| V(t_0)\right\|\le\Delta$ *выполняется*

$$\exists\, k\in\overline{1,n},\ \exists\,\Phi_k(t):\ \left|\int\limits_{t_0}^{t}\frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_k(t_0)}dt\right| \ge \left|\int\limits_{t_0}^{t}\Phi_k(t)\,dt\right| \ge N\ \ \forall t\in[t_0,\infty), \qquad (35)$$

то нулевое решение неустойчиво. В частности, это так, если в (35) можно выбрать $\Phi_k(t)=\rho t^{-\beta},\ \ 0<\beta<1,\ \ \beta=\text{const},\ \ 0<\rho,\ \ \rho=\text{const}$.

Непосредственно ниже в интегралах из (29), (30) рассматривается замена переменной $x = t / v_k(t_0)$ с обозначением $v_{k0} = v_k(t_0)$ и $x_{k0} = t_0 / v_{k0}$. Из $t = v_{k0}x$ следует $dt = v_{k0}\,dx$. Нижний предел интегрирования t_0 переходит в x_{k0}, верхний предел интегрирования t переходит в $x = t / v_{k0}$:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_k(t_0)}\,dt = \int_{t_0/v_{k0}}^{t/v_{k0}} \frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_{k0}} v_{k0}dx = \int_{x_{k0}}^{x} u_k(v_{k0}x, V(v_{k0}x), V(v_{k0}x_0))\,dx.$$

Окончательно

$$\int_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V,V(t_0))}{v_k(t_0)}\,dt = \int_{x_{k0}}^{x} u_k(v_{k0}x, V(v_{k0}x), V(v_{k0}x_0))\,dx. \qquad (36)$$

При использовании (36) лемма 4 перейдет в следующую лемму.

Лемма 5. *В исходных предположениях для устойчивости нулевого решения задачи (1) необходимо и достаточно существование* $\Delta,\ 0 < \Delta \le \delta_0$, *такого, что* $\forall V(t)\colon 0 < \left\| V(t_0) \right\| \le \Delta$ *выполняется соотношение*

$$\left| \int_{x_{k0}}^{x} u_k(v_{k0}x, V(v_{k0}x), V(v_{k0}x_0))\,dx \right| \le C^{(1)},$$

$$C^{(1)} = \text{const},\ \ x = t / v_{k0},\ x_{k0} = t_0 / v_{k0},\ \forall t \in [t_0, \infty),\ \forall k \in \overline{1,n}. \qquad (37)$$

Для асимптотической устойчивости нулевого решения необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво и существовало $\Delta_1 \le \Delta$, *такое, что* $0 < \left\| V(t_0) \right\| \le \Delta_1$ *влечет*

$$\lim_{x\to\infty} \left| 1 + \int_{x_{k0}}^{x} u_k(v_{k0}x, V(v_{k0}x), V(v_{k0}x_0))\,dx \right| = 0 \quad \forall k \in \overline{1,n}, \qquad (38)$$

или,

$$\int_{x_{k0}}^{\infty} u_k(v_{k0}x, V(v_{k0}x), V(v_{k0}x_0))\,dx = -1 \quad \forall k \in \overline{1,n}.$$

С той же заменой переменной следствие 3 примет следующий вид.

Следствие 7. В условиях и обозначениях леммы 5 утверждения этой леммы сохранятся, если (37) и (38) представить соответственно в разновидностях

$$\left| \int_{x_{k0}}^{x} u_k(v_{k0}x, V(v_{k0}x), V(v_{k0}x_{k0}))\,dx \right| \le C_1,\ \ C_1 = \text{const}\ \ \forall x \in [x_{k0}, \infty),\ \forall k \in \overline{1,n}, \qquad (39)$$

что равносильно

$$\left| \frac{1}{v_{k0}} v_k(v_{k0}x) \right| \le C^{(1)},\ \ C^{(1)} = \text{const}\ \ \forall x \in [x_{k0}, \infty),\ \forall k \in \overline{1,n}, \qquad (40)$$

и

$$\lim_{x\to\infty} \left| 1 + \int_{x_{k0}}^{x} u_k(v_{k0}x, V(v_{k0}x), V(v_{k0}x_{k0}))\,dx \right| = 0 \quad \left(\int_{x_{k0}}^{\infty} u_k(v_{k0}x, V(v_{k0}x), V(v_{k0}x_0))\,dx = -1 \right) \quad \forall k \in \overline{1,n},$$

что равносильно

$$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{1}{v_{k0}} (v_k(v_{k0}x)) \right| = 0 \quad \left(\lim_{x\to\infty} v_k(v_{k0}x) = 0 \right) \ \forall k \in \overline{1,n}. \qquad (41)$$

Доказательство. Из (26) и (36)

$$\frac{v_k(t_0)+\int_{t_0}^{t} u_k(t,V,V_0)\,dt}{v_k(t_0)} = 1+\int_{t_0}^{t}\frac{u_k(t,V,V_0)}{v_k(t_0)}dt =$$

$$=1+\int_{x_{k0}}^{x} u_k(v_{k0}x, V(v_{k0}x), V(v_{k0}x_0))\,dx = 1+\frac{1}{v_{k0}}\int_{x_{k0}}^{x} dv_k(v_{k0}x, V(v_{k0}x), V(v_{k0}x_0)),$$

где

$$1+\frac{1}{v_{k0}}\int_{x_{k0}}^{x} d\,v_k(v_{k0}x) = 1+\frac{1}{v_{k0}}(v_k(v_{k0}x)-v_k(v_{k0}x_{k0})) = 1+\frac{1}{v_{k0}}(v_k(v_{k0}x)-v_{k0}) = \frac{1}{v_{k0}}v_k(v_{k0}x).$$

Отсюда следует (40), (41), эквивалентность (40) и (39), эквивалентность (41) и (38). Следствие доказано.

На основе (36)–(41) тривиально формулируется аналог предложения 1. Соотношения (38)–(41) могут применяться для аналитических оценок устойчивости с учетом обратной пропорции $v_k(t_0)$.

Условия устойчивости с учетом знаков компонентов функции правой части и их производных. Для краткости компоненты $u_k(t\ V)$ из (1) ниже обозначаются $u_k(t)$ и u_k. Следующие утверждения указывают на роль обратной пропорции начальным значениям в представленных выше условиях устойчивости. Имеет место

Теорема 2. *Пусть для задачи (1) выполнены исходные предположения и пусть* $\exists\,\Delta$ *, такое, что* $\forall\ V(t)\colon\ 0<\|V(t_0)\|\le\Delta$ *неравенства* $u_k(t)<0,\ 0<u'_k(t)$ *и соотношения*

$$\left|\frac{u_k(t)}{u'_k(t)}/v_k(t_0)\right|\le c_0,\ c_0=\text{const}\ ,\ \left|u_k(t)/v_k(t_0)\right|\le c_1,\ c_1=\text{const}\ \textit{выполняются}$$

$\forall t\in[t_0,\infty),\ \ \forall k\in\overline{1,n}$ *. Тогда нулевое решение задачи (1) устойчиво, при этом* $\exists\lim\limits_{t\to\infty}u_k(t)=0$ *и* $\exists\lim\limits_{t\to\infty}v_k(t)=q_{\lim vk}$ *,* $\left|q_{\lim vk}\right|<\infty,\ \forall k\in\overline{1,n}$*.*

Аналогичные утверждения имеют место при условии $0<u_k(t),\ u'_k(t)<0$*.*

Доказательство. Пусть произвольно зафиксировано $k\in\overline{1,n}$ и рассматривается случай $u_k(t)<0,\ 0<u'_k(t)$. Исходные предположения и неравенства $u_k(t)<0,\ 0<u'_k(t)$ $\forall t\in[t_0,\infty)$ обеспечивают условия теоремы Коши о среднем значении [14] для функций $v_k(t)$ и $u_k(t)$ $\forall t\in[t_0,\bar t\,],\ \forall\bar t\in[t_0,\infty),\ \forall\ V(t)\colon\ 0<\|\ V(t_0)\|\le\Delta$ (функции $v_k(t)$ и $u_k(t)$ непрерывны на $[t_0,\bar t\,]$, дифференцируемы $\forall t\in(t_0,\bar t\,)$, $u'_k(t)\ne0\ \ \forall t\in(t_0,\bar t\,)$). В силу этой теоремы

$$\frac{v_k(t)-v_k(t_0)}{u_k(t)-u_k(t_0)}=\frac{u_k(\xi_k)}{u'_k(\xi_k)},\ \ \xi_k\in(t_0,t),$$

$$\forall t\in[t_0,\bar t\,],\ \forall\bar t\in[t_0,\infty),\ \forall V(t):0<\|V(t_0)\|\le\Delta,\ \ \forall k\in\overline{1,n}. \tag{42}$$

Из (42) $v_k(t)=\dfrac{u_k(\xi_k)}{u'_k(\xi_k)}(u_k(t)-u_k(t_0))+v_k(t_0)$,

поэтому $|\,v_k(t)\,|\le\left|\dfrac{u_k(\xi_k)}{u'_k(\xi_k)}\right|\big(\,|\,u_k(t)\,|+|\,u_k(t_0)\,|\,\big)+|\,v_k(t_0)\,|$.

Неравенство $|\,u_k(t)/v_k(t_0)\,|\le c_1$ влечет $|\,u_k(t)\,|\le c_1|\,v_k(t_0)\,|\le c_1\Delta$.

Отсюда

$$|\,v_k(t)/v_k(t_0)\,|\le\left|\frac{u_k(\xi_k)}{u'_k(\xi_k)}/v_k(t_0)\right|\big(\,c_1\Delta+c_1\Delta\,\big)+|\,v_k(t_0)/v_k(t_0)\,|,\ \text{где}\ v_k(t_0)\ne0.$$

По условию первый сомножитель правой части неравенства ограничен константой c_0, в результате $\left| v_k(t)/v_k(t_0) \right| \le C^{(1)}$, $C^{(1)} = c_0 \times 2c_1\Delta + 1$, $C^{(1)} = \text{const}$ $\forall t \in [t_0, \infty)$, $k \in \overline{1,n}$, $\forall\, V(t): 0 < \| V(t_0) \| \le \Delta$. Тем самым, с учетом произвольного выбора $k \in \overline{1,n}$, выполнено (24), и по теореме 1 нулевое решение задачи (1) устойчиво. Далее, функция $u_k(t) < 0$ возрастает ($0 < u_k'(t)$). Следовательно, $\exists \lim\limits_{t\to\infty} u_k(t) = q_{\lim u k} \le 0$. Требуется доказать, что $q_{\lim u k} = 0$. Если предположить иное, то $q_{\lim u k} < 0$. Тогда $u_k(t)$ приближается к этому пределу, возрастая. Найдутся $\sigma < q_{\lim u k}$, $t_{u\sigma} \ge t_0$, такие, что $\sigma \le u_k(t) \le q_{\lim u k}$ $\forall t \in [t_{u\sigma}, \infty)$, при этом $\left| q_{\lim u k} \right| \le \left| u_k(t) \right|$.

Очевидно, $\left| v_k(t) \right| = \left| v_k(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_{u\sigma}} u_k(t)\,dt + \int\limits_{t_{u\sigma}}^{t} u_k(t)\,dt \right|$.

Отсюда $\left| v_k(t) \right| \ge \left| \left| \int\limits_{t_{u\sigma}}^{t} u_k(t)\,dt \right| - \left| v_k(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_{u\sigma}} u_k(t)\,dt \right| \right|$,

где $\left| \int\limits_{t_{u\sigma}}^{t} u_k(t)\,dt \right| = \left| -\int\limits_{t_{u\sigma}}^{t} \left| u_k(t) \right| dt \right| = \int\limits_{t_{u\sigma}}^{t} \left| u_k(t) \right| dt$.

В результате $\left| v_k(t) \right| \ge \left| \int\limits_{t_{u\sigma}}^{t} \left| u_k(t) \right| dt - \left| v_k(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_{u\sigma}} u_k(t)\,dt \right| \right|$.

В то же время $\int\limits_{t_{u\sigma}}^{t} \left| u_k(t) \right| dt \ge \int\limits_{t_{u\sigma}}^{t} \left| q_{\lim u k} \right| dt = \left| q_{\lim u k} \right| \times (t - t_{u\sigma}) \to \infty$, если $t \to \infty$.

Отсюда $\left| v_k(t) \right| \to \infty$ при $t \to \infty$, что противоречит устойчивости нулевого решения. Таким образом, предположение $q_{\lim u k} < 0$ неверно, следовательно, $q_{\lim u k} = \lim\limits_{t\to\infty} u_k(t) = 0$ $\forall k \in \overline{1,n}$. Далее, в продолжение доказательства, случай, когда функция $v_k(t)$ не ограничена снизу, в условиях теоремы невозможен. Если допустить обратное, то эта функция монотонно убывает ($v_k'(t) = u_k < 0$) $\forall t \in [t_0, \infty)$, и поскольку не ограничена снизу, то $\lim\limits_{t\to\infty} v_k(t) = -\infty$, что противоречит устойчивости нулевого решения. Остается принять, что функция $v_k(t)$ ограничена снизу, тогда в силу ее убывания $\exists \lim\limits_{t\to\infty} v_k(t) = q_{\lim v k}$, $\left| q_{\lim v k} \right| < \infty$. Случай $0 < u_k(t)$, $u_k'(t) < 0$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Из хода доказательства вытекает

Следствие 8. Все утверждения теоремы 2 сохранятся, если в условиях этой теоремы для некоторых компонентов системы (1) с номерами $k = k_i$ выполняются неравенства $u_k(t) < 0$, $0 < u_k'(t)$, а для остальных, с номерами $k = k_j$, $k_j \ne k_i$, выполняются неравенства $0 < u_k(t)$, $u_k'(t) < 0$, те и другие в совокупности выполняются $\forall t \in [t_0, \infty)$, $\forall k \in \overline{1,n}$, $\forall V(t): 0 < \| V(t_0) \| \le \Delta$.

Имеет место

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2 и изменения условий, допустимые следствием 8. Тогда, если* $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u_k(\xi_k)}{u_k'(\xi_k)} = 0$, *где* ξ_k *из (42),* $\forall k \in \overline{1,n}$, $\forall\, V(t): 0 < \| V(t_0) \| \le \Delta$, *то нулевое решение задачи (1) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть рассматриваются первоначальные условия теоремы 2 и случай $u_k(t) < 0$, $0 < u_k'(t)$ $\forall t \in [t_0, \infty)$, $\forall k \in \overline{1,n}$, $\forall\, V(t): 0 < \| V(t_0) \| \le \Delta$. По теореме 2 в этих условиях нулевое решение устойчиво, $\exists \lim\limits_{t\to\infty} u_k(t) = 0$ и $\exists \lim\limits_{t\to\infty} v_k(t) = q_{\lim v k}$, $\left| q_{\lim v k} \right| < \infty$, $\forall k \in \overline{1,n}$. Отсюда следует, что существует предел левой части (42) при $t \to \infty$ и, в силу равенства в этом соотношении, существует предел правой части: $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u_k(\xi_k)}{u_k'(\xi_k)}$ $\forall k \in \overline{1,n}$.

По условию доказываемой теоремы $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{u_k(\xi_k)}{u'_k(\xi_k)}=0\ \ \forall k\in\overline{1,n}\ ,\ \forall\ V(t):0<\|\ V(t_0)\|\le\Delta$.

Пусть произвольно зафиксировано $k\in\overline{1,n}$.

Требуется доказать, что $q_{\lim vk}=0\ \ \forall V(t):0<\|\ V(t_0)\|\le\Delta$. Из (42) $\overline{t}$ можно исключить, тогда

$$v_k(t)-v_k(t_0)=\frac{u_k(\xi_k)}{u'_k(\xi_k)}(u_k(t)-u_k(t_0)),\ \ \xi_k\in(t_0\,,\,t),\ \forall t\in[t_0,\infty),\ \ \forall\ V(t):0<\|\ V(t_0)\|\le\Delta. \quad (43)$$

В (43) знак начального значения допустимо изменить на противоположный, положив $\overline{v}_k(t_0)=-v_k(t_0)$. Соответственные изменения всех переменных аналогично отмечаются чертой:

$$\overline{v}_k(t)-\overline{v}_k(t_0)=\frac{\overline{u}_k(\overline{\xi}_k)}{\overline{u}'_k(\overline{\xi}_k)}(\overline{u}_k(t)-\overline{u}_k(t_0)),\ \ \overline{\xi}_k\in(t_0\,,\,t),\ \ \forall t\in[t_0,\infty),\ \ \forall\ \overline{V}(t):0<\|\ \overline{V}(t_0)\|\le\Delta. \quad (44)$$

При этом для $\overline{v}_k(t_0)$ и $\forall\ \overline{V}(t):0<\|\ \overline{V}(t_0)\|\le\Delta$ сохраняются все условия теоремы 2 и доказываемой теоремы, поскольку они предполагались выполненными $\forall\ V(t):0<\|\ V(t_0)\|\le\Delta$. Если теперь предположить противоположное тому, что надо доказать, именно, что $\lim\limits_{t\to\infty}v_k(t)=q_{\lim vk}\ne 0$, то правомерны приводимые ниже рассуждения и оценки, вследствие которых предельный переход в равенстве приведет к противоречию. Равенства (43) и (44) складываются, с учетом $\overline{v}_k(t_0)=-v_k(t_0)$ получится

$$v_k(t)+\overline{v}_k(t)=\frac{u_k(\xi_k)}{u'_k(\xi_k)}(u_k(t)-u_k(t_0))+\frac{\overline{u}_k(\overline{\xi}_k)}{\overline{u}'_k(\overline{\xi}_k)}(\overline{u}_k(t)-\overline{u}_k(t_0)),$$
$$\xi_k\in(t_0\,,\,t),\ \ \overline{\xi}_k\in(t_0\,,\,t),\ \ \forall t\in[t_0,\infty). \quad (45)$$

По теореме Лагранжа о среднем $v_k(t)-v_k(t_0)=u_k(\tilde{\xi}_k)(t-t_0)<0,\ \ \tilde{\xi}_k\in(t_0\,,\,t)$, с учетом $u_k(t)<0\ \ \forall t\in[t_0,\infty)$. Аналогично, $\overline{v}_k(t)-\overline{v}_k(t_0)=\overline{u}_k(\hat{\xi}_k)(t-t_0)<0,\ \ \hat{\xi}_k\in(t_0\,,\,t)$. Сложение этих отрицательных функций с учетом $\overline{v}_k(t_0)=-v_k(t_0)$ даст в сумме отрицательную функцию: $v_k(t)+\overline{v}_k(t)<0$. Одно из слагаемых левой части неравенства (левой части (45)) является всюду отрицательной на полуоси функцией, такой, что ее модуль строго больше модуля начального значения $|\,v_k(t_0)\,|$. Именно, это та функция, которая соответствует отрицательному начальному значению. Одно из пары начальных значений отрицательно в силу $\overline{v}_k(t_0)=-v_k(t_0)$. Рассматриваемая функция убывает вследствие $u_k(t)<0\ \ \forall t\in[t_0,\infty)$. Отсюда $\exists\ \tau>0$, такое, что в пределе по $t\to\infty$ эта функция не превзойдет $-(\,|\,v_k(t_0)\,|+\tau)$. Другое слагаемое левой части (45) также убывает, по такой же причине, и либо начиная с некоторого места такое слагаемое всюду отрицательно на полуоси, либо изначально всюду на полуоси неотрицательно, но вследствие убывания его модуль будет строго меньше модуля начального значения $|\,v_k(t_0)\,|$. Отсюда $\exists\ \overline{\tau}>0,\ \ \overline{\tau}<|\,v_k(t_0)\,|$, такое, что в случае неотрицательности в пределе по $t\to\infty$ эта функция не превосходит $|\,v_k(t_0)\,|-\overline{\tau}$. В результате сумма $v_k(t)+\overline{v}_k(t)$ строго меньше нуля, причем либо в пределе по $t\to\infty$ она не больше $-(\,|\,v_k(t_0)\,|+\tau)$, либо в пределе по $t\to\infty$ она не больше $-(\,|\,v_k(t_0)\,|+\tau)+(\,|\,v_k(t_0)\,|-\overline{\tau})=-\tau-\overline{\tau}=\text{const}\,,\ -\tau-\overline{\tau}<0$. В любом случае

$$\lim_{t\to\infty}(v_k(t)+\overline{v}_k(t))\le-\tau_0<0,\ \ \tau_0=\min\left((\,|\,v_k(t_0)\,|+\tau),\ \tau+\overline{\tau}\ \right).$$

Предельный переход в равенстве (45) влечет

$$\lim_{t\to\infty}(v_k(t)+\overline{v}_k(t))=\lim_{t\to\infty}\frac{u_k(\xi_k)}{u'_k(\xi_k)}(\lim_{t\to\infty}u_k(t)-u_k(t_0))+\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{u}_k(\overline{\xi}_k)}{\overline{u}'_k(\overline{\xi}_k)}(\lim_{t\to\infty}\overline{u}_k(t)-\overline{u}_k(t_0))\,,$$

где пределы дробей существуют и по условию равны нулю, кроме того, согласно теореме 2, $\lim\limits_{t\to\infty}u_k(t)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\overline{u}_k(t)=0$. В результате правая часть равенства равна нулю.

Тогда $\lim_{t\to\infty}(v_k(t)+\overline{v}_k(t))=0$, однако было показано, что $\lim_{t\to\infty}(v_k(t)+\overline{v}_k(t))\le-\tau_0<0$. Полученное противоречие разрешается, если $\lim_{t\to\infty}v_k(t)=0$ и $\lim_{t\to\infty}\overline{v}_k(t)=0$, так что $\lim_{t\to\infty}(v_k(t)+\overline{v}_k(t))=\lim_{t\to\infty}v_k(t)+\lim_{t\to\infty}\overline{v}_k(t)=0$. Следовательно, предположение $\lim_{t\to\infty}v_k(t)=q_{\lim vk}\ne0$ неверно. В результате $\lim_{t\to\infty}v_k(t)=0$, где $k\in\overline{1,n}$ – произвольно выбранный номер компонента ненулевого решения. Равенство выполняется $\forall\ V(t):0<\|\ V(t_0)\|\le\Delta$, поэтому в качестве Δ_1 можно взять Δ. Нулевое решение задачи (1) устойчиво и $\lim_{t\to\infty}v_k(t)=0\quad\forall\ V(t):0<\|\ V(t_0)\|\le\Delta_1\le\Delta,\ \forall k\in\overline{1,n}$, так что это решение асимптотически устойчиво. Другие варианты условий рассматриваются аналогично. Теорема доказана.

Пусть снова произвольно зафиксировано $k\in\overline{1,n}$ и рассматривается случай $u_k(t)<0$, $0<u_k'(t)\quad\forall t\in[t_0,\infty)$. В условиях теоремы 3 выполнено $\lim_{t\to\infty}u_k(t)=0$, $\lim_{t\to\infty}v_k(t)=0$, согласно условиям $\dfrac{u_k(t)}{u_k'(t)}<0$.

Если $\exists\ u_k''(t)\ \forall t\in[t_0,\infty)$, очевидно, $\left(\dfrac{u_k(t)}{u_k'(t)}\right)'=\dfrac{(u_k'(t))^2-u_k(t)\times u_k''(t)}{(u_k'(t))^2}$, где $-u_k(t)>0$.

Если при этом $0\le u_k''(t)$, то $0<\left(\dfrac{u_k(t)}{u_k'(t)}\right)'$. Тогда функция $\dfrac{u_k(t)}{u_k'(t)}$ возрастает, при этом ограничена сверху $\forall t\in[t_0,\infty)$.

Следовательно, $\exists\ \lim_{t\to\infty}\dfrac{u_k(t)}{u_k'(t)}$, $\lim_{t\to\infty}\dfrac{u_k(t)}{u_k'(t)}\le0$.

То же получится, если $|u_k''(t)|\le|(u_k'(t))^2|/|u_k(t)|$.

Пусть теперь рассматривается случай $0<u_k(t),\ \ u_k'(t)<0\ \ \forall t\in[t_0,\infty)$. По-прежнему $\dfrac{u_k(t)}{u_k'(t)}<0$, но $0<\left(\dfrac{u_k(t)}{u_k'(t)}\right)'$ при условии $u_k''(t)\le0$, или, если $|u_k''(t)|\le|(u_k'(t))^2|/|u_k(t)|$, далее сохраняются предыдущие рассуждения. Рассуждения распространяются на условия следствия 8.

Отсюда вытекает

Следствие 9. Пусть выполнены все условия теоремы 3 и рассматривается случай $u_k(t)\le0$, $0<u_k'(t)\quad\forall t\in[t_0,\infty)$, $k\in\overline{1,n}$. Если $\exists\ u_k''(t)$, и при этом $0<u_k''(t)\quad\forall t\in[t_0,\infty),\forall k\in\overline{1,n}$, то выполнены условия применения правила Лопиталя, согласно которому $\exists\ \lim_{t\to\infty}\dfrac{v_k(t)}{u_k(t)}$ и

$$\lim_{t\to\infty}\frac{v_k(t)}{u_k(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{u_k(t)}{u_k'(t)},\ \ k\in\overline{1,n}. \tag{46}$$

В случае $0<u_k(t),\ \ u_k'(t)<0\ \ \forall t\in[t_0,\infty)$ тот же результат получится, если $u_k''(t)\le0$. В обоих случаях результат сохранится, если $|u_k''(t)|\le|(u_k'(t))^2|/|u_k(t)|$.

В (46) $\lim_{t\to\infty}\dfrac{v_k(t)}{u_k(t)}\le0$ и $\lim_{t\to\infty}\dfrac{u_k(t)}{u_k'(t)}\le0\quad\forall k\in\overline{1,n}$, поэтому решение $v_k(t)$ в условиях следствия не может иметь одинакового знака с $u_k(t)$. Все утверждения данного следствия сохраняются $\forall k\in\overline{1,n}$ в условиях следствия 8.

Если в (42) знаменатель дроби равномерно отделен от нуля,

$$\inf_{\xi\in[t_0,\infty)}|u_k'(\xi)|=\delta,\ 0<\delta,\ \forall t\in[t_0,\infty),\ \forall V(t):\ 0<\|V(t_0)\|\le\Delta,\ \ \forall k\in\overline{1,n}, \tag{47}$$

то, как нетрудно видеть, теоремы 2, 3 можно объединить с упрощением условий.

Теорема 4. *Пусть для задачи (1) выполнены исходные предположения и, кроме того, выполняется (47). Пусть* $\exists\,\Delta$, *такое, что* $\forall V(t):\ 0<\left\|V(t_0)\right\|\le\Delta$ *неравенства* $u_k(t)<0,\ 0<u_k'(t)$, *а также соотношения* $\left|u_k(t)/v_k(t_0)\right|\le c_1,\ c_1=\text{const}$, *выполняются* $\forall t\in[t_0,\infty),\ \forall k\in\overline{1,n}$. *Тогда нулевое решение задачи (1) устойчиво, при этом* $\lim\limits_{t\to\infty}u_k(t)=0$ $\forall k\in\overline{1,n}$, *и если* $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{u_k(\xi_k)}{u_k'(\xi_k)}=0$, *где* ξ_k *из (42),* $\forall k\in\overline{1,n}$, $\forall\ V(t):0<\left\|V(t_0)\right\|\le\Delta$, *то оно асимптотически устойчиво. Аналогичные утверждения верны в случае* $0<u_k(t)$, $u_k'(t)<0$ *и сохраняются при изменениях условий следствия 8.*

Замечание 4. Теоремы 3 и 4 сохранят свои утверждения, если в их условиях соотношение $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{u_k(\xi_k)}{u_k'(\xi_k)}=0$ заменить соотношением

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u_k(t)}{u_k'(t)}=0, \tag{48}$$

поскольку значения $\dfrac{u_k(\xi_k)}{u_k'(\xi_k)}$ образуют числовую подпоследовательность некоторой сходящейся последовательности $\left\{\dfrac{u_k(t_r)}{u_k'(t_r)}\right\}_{r=0}^{\infty}$, образованной значениями независимой переменной *t*, – такими, что $\lim\limits_{t_r\to\infty,\ r\to\infty}\dfrac{u_k(t_r)}{u_k'(t_r)}=0$. По теореме 2 $\lim\limits_{t\to\infty}u_k(t)=0$, отсюда (48) будет выполняться, если $\exists\lim\limits_{t\to\infty}u_k'(t)$ и $\lim\limits_{t\to\infty}u_k'(t)\ne0$. Поэтому теоремы 3 и 4 сохранятся, если вместо (48) в их условиях потребовать существования $\lim\limits_{t\to\infty}u_k'(t)\ne0$.

С учетом этого замечания теорема 3 перейдет в следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть для задачи (1) выполнены исходные предположения. Пусть* $\exists\,\Delta$, *такое, что* $\forall V(t):\ 0<\left\|V(t_0)\right\|\le\Delta$ *неравенства* $u_k(t)<0,\ 0<u_k'(t)$, *а также соотношения* $\left|u_k(t)/v_k(t_0)\right|\le c_1,\ c_1=\text{const}$, *выполняются* $\forall t\in[t_0,\infty),\ \forall k\in\overline{1,n}$. *Тогда нулевое решение задачи (1) устойчиво, при этом* $\lim\limits_{t\to\infty}u_k(t)=0$ $\forall k\in\overline{1,n}$. *Если, кроме того,* $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{u_k(t)}{u_k'(t)}=0$ *или если* $\lim\limits_{t\to\infty}u_k'(t)\ne0$ $\forall k\in\overline{1,n}$, $\forall\ V(t):0<\left\|V(t_0)\right\|\le\Delta$, *то нулевое решение асимптотически устойчиво. Аналогичные утверждения верны в случае* $0<u_k(t)$, $u_k'(t)<0$ *и сохраняются при изменениях условий, допустимых следствием 8.*

Производная компонента $u_k'(t)$ из (1) аналитически определяется по формуле полной производной сложной функции [14]

$$\frac{du_k}{dt}=\frac{\partial u_k}{\partial t}+\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial u_k}{\partial v_\ell}\frac{dv_\ell}{dt},\ \text{или}\ \frac{du_k}{dt}=\frac{\partial u_k}{\partial t}+\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial u_k}{\partial v_\ell}u_\ell\ ,\quad k\in\overline{1,n}.$$

В случае выполнения (47) условия устойчивости можно сформулировать без предположения о постоянстве знаков $u_k(t)$ и $u'_k(t)$. Имеет место

Предложение 2. *Пусть для задачи (1) выполнены исходные предположения и пусть* $\exists\,\Delta>0$, *такое, что* $\forall V(t):\ 0<\left\|V(t_0)\right\|\le\Delta$ *неравенства* $\left|u_k(t)/v_k(t_0)\right|\le c_1,\ c_1=\text{const}$, *выполняются* $\forall t\in[t_0,\infty),\ \forall k\in\overline{1,n}$. *Пусть, кроме того, выполняется соотношение (47) и выполнены условия теоремы Коши в форме (42). Тогда нулевое решение задачи (1) устойчиво. Утверждение сохраняется при изменениях условий, допустимых следствием 8.*

Доказательство. По условию (42) верно $\forall k\in\overline{1,n}$, $\forall\ V(t):\ 0<\left\|V(t_0)\right\|\le\Delta$, что влечет

$$\left|v_k(t)\right|\le\left|\frac{u_k(\xi_k)}{u_k'(\xi_k)}\right|\left(\left|u_k(t)\right|+\left|u_k(t_0)\right|\right)+\left|v_k(t_0)\right|.$$

Из $\left|u_k(t)/v_k(t_0)\right|\le c_1$ следует $\left|u_k(t)\right|\le c_1\Delta$.

Отсюда $\left|v_k(t)/v_k(t_0)\right|\le 2c_1\Delta\times\left|\dfrac{u_k(\xi_k)}{u_k'(\xi_k)}/v_k(t_0)\right|+1$, где $v_k(t_0)\ne0$.

Далее, $\left|\dfrac{u_k(\xi_k)}{u_k'(\xi_k)} / v_k(t_0)\right| = \left|\dfrac{u_k(\xi_k)}{v_k(t_0)}\right| / \left|u_k'(\xi_k)\right| \le c_1/\delta$, где δ из (47).

В результате $\left|v_k(t)/v_k(t_0)\right| \le C^{(1)}$, $C^{(1)} = 2\dfrac{c_1^2\Delta}{\delta}+1$, $C^{(1)} = \text{const}$ $\forall t \in [t_0, \infty)$, $k \in \overline{1,n}$, $\forall\, V(t): 0 < \| V(t_0) \| \le \Delta$, что означает выполнение (24) в условиях теоремы 1. Поэтому нулевое решение задачи (1) устойчиво. Предложение доказано.

Выражение $v_k(t)$ из (42) влечет формально общий вид условий устойчивости.

Предложение 3. *Пусть для задачи (1) выполнены условия применения теоремы Коши в форме (42). Тогда для устойчивости нулевого решения необходимо и достаточно существование* $\Delta > 0$*, такого, что* $\forall\, V(t): 0 < \| V(t_0) \| \le \Delta$ *выполняется соотношение*

$$\left| \frac{1}{v_k(t_0)} \left(\frac{u_k(\xi_k)}{u_k'(\xi_k)}(u_k(t)-u_k(t_0)) + v_k(t_0) \right) \right| \le C^{(1)},\ C^{(1)} = \text{const},\ \xi_k \in (t_0, t), \forall t \in [t_0, \infty), \forall k \in \overline{1,n}.$$

Для асимптотической устойчивости нулевого решения необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво и существовало $\Delta_1 \le \Delta$, такое, что $0 < \| V(t_0) \| \le \Delta_1$ влечет

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{u_k(\xi_k)}{u_k'(\xi_k)}(u_k(t)-u_k(t_0)) + v_k(t_0) \right) = 0 \quad \forall k \in \overline{1,n}.$$

Утверждения предложения сохраняются в условиях следствия 8.

Достаточное условие неустойчивости включает

Теорема 6. *Пусть для задачи (1) выполнены исходные предположения. Если* $\forall \Delta > 0$ *можно указать* $k \in \overline{1,n}$*, такое, что неравенства* $0 < u_k(t)$ *и* $0 < u_k'(t)$ *выполняются* $\forall t \in [t_0, \infty)$*,* $\forall V(t_0): 0 < \| V(t_0) \| \le \Delta$*, то нулевое решение задачи (1) неустойчиво. Утверждение сохраняется, если в тех же условиях* $u_k(t) < 0$ *и* $u_k'(t) < 0$ $\forall t \in [t_0, \infty)$*,* $\forall V(t_0): 0 < \| V(t_0) \| \le \Delta$.

Доказательство. Пусть $\forall \Delta > 0$ для номера $k \in \overline{1,n}$ неравенства $0 < u_k(t)$ и $0 < u_k'(t)$ выполняются $\forall t \in [t_0, \infty)$, $\forall\, V(t_0): 0 < \| V(t_0) \| \le \Delta$. Тогда с учетом исходных предположений выполнены условия теоремы Коши, в силу которой верно (42). В рассматриваемых условиях $u_k(t)$ монотонно возрастает ($0 < u_k'(t)$) и, в силу $(v_k(t)-v_k(t_0))' = u_k(t)$, $u_k(t) > 0$, монотонно возрастает функция $v_k(t)-v_k(t_0) = \dfrac{u_k(\xi_k)}{u_k'(\xi_k)}(u_k(t)-u_k(t_0))$. При этом по монотонности $u_k(t) > u_k(t_0) > 0$, так что $v_k(t)-v_k(t_0) = \dfrac{u_k(\xi_k)}{u_k'(\xi_k)}(u_k(t)-u_k(t_0)) > 0$. Отсюда, в силу монотонного роста, найдутся $\overline{\Delta} > 0$ и $\overline{t_0} \ge t_0$, такие, что $\dfrac{u_k(\xi_k)}{u_k'(\xi_k)}(u_k(t)-u_k(t_0)) > \overline{\Delta}$ $\forall t \ge \overline{t_0}$, тогда $v_k(t)-v_k(t_0) > \overline{\Delta}$ $\forall t \ge \overline{t_0}$. Можно считать априори выбранным значение $v_k(t_0) > 0$, при этом оно может быть сколь угодно мало. Тогда $v_k(t) > \overline{\Delta}$ $\forall t \ge \overline{t_0}$, следовательно, $\dfrac{v_k(t)}{v_k(t_0)} > \dfrac{\overline{\Delta}}{v_k(t_0)}$ $\forall t \ge \overline{t_0}$, и $\forall N > 0$, где N может иметь сколь угодно большое числовое значение, выполняется $\dfrac{v_k(t)}{v_k(t_0)} > N$ лишь только $0 < v_k(t_0) < \dfrac{N}{\overline{\Delta}}$. Тем самым нарушается (24) – необходимое условие устойчивости теоремы 1. Поэтому нулевое решение задачи (1) неустойчиво. Случай $u_k(t) < 0$ и $u_k'(t) < 0$ $\forall t \in [t_0, \infty)$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Необходимо заметить, что условия теоремы Коши исключают смену знака в знаменателе левой части (42), а условие (47) – смену знака в правой части (42). Поэтому рассмотренные утверждения носят ограниченный характер, они не выводят из области постоянства знаков компонентов правой части (1), их нельзя перенести на общий случай переменных знаков функций $u_k(t)$ и $u_k'(t)$ в произвольных точках полуоси. Значение утверждений можно видеть в том, что на их основе строятся знакопостоянные мажоранты для знакопеременных компонентов правых частей системы (1) в условиях предложения 1. Чтобы при этом аналитически учитывать обратную пропорцию начальным значениям, можно выполнить переход к интегральной форме мажорирующих функций с заменой переменной согласно (37), (38).

Общие условия устойчивости с обратной пропорцией начальным значениям компонентов правой части. Пусть на полуоси последовательными индексами отмечены равные по длине отрезки с общими границами

$$[t_0, \infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} [t_i, t_{i+1}], \quad t_{i+1} = t_i + h_c, \quad h_c = \text{const}, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{49}$$

где h_c задается произвольно. Искомая оценка устойчивости будет опираться на теорему Лагранжа о среднем, применяемую к каждому отрезку из (49). Для решения задачи (1) будут рассматриваться следующие разновидности формул средних значений

$$v_k(t) - v_k(t_\ell) = v_k'(\overline{\xi}_{k\ell}) \times (t - t_\ell), \ \forall t \in [t_\ell, t_{\ell+1}], \ \ \overline{\xi}_{k\ell} \in (t_\ell, t) \ \ \forall \ell = 0, 1, \ldots, \ \forall k \in \overline{1, n}, \tag{50}$$

или

$$v_k(t) - v_k(t_\ell) = u_k(\overline{\xi}_{k\ell}) \times (t - t_\ell), \ \forall t \in [t_\ell, t_{\ell+1}], \ \ \overline{\xi}_{k\ell} \in (t_\ell, t) \ \ \forall \ell = 0, 1, \ldots, \ \forall k \in \overline{1, n}, \tag{51}$$

а также

$$v_k(t_{\ell+1}) - v_k(t_\ell) = u_k(\xi_{k\ell}) \times (t_{\ell+1} - t_\ell), \ \xi_{k\ell} \in (t_\ell, t_{\ell+1}) \ \ \forall \ell = 0, 1, \ldots, \ \forall k \in \overline{1, n}. \tag{52}$$

Имеет место

Теорема 7. *Пусть для задачи (1) выполнены исходные предположения. Пусть предполагается, кроме того, что в условиях разбиения (49), при любом выборе* $h_c = \text{const}$, $\exists \Delta > 0$, *такое, что* $\forall V(t): \ 0 < \|V(t_0)\| \le \Delta, \forall k \in \overline{1, n}$, *выполняются неравенства*

$$\left| \frac{1}{v_k(t_0)} \sum_{\ell=0}^{i} u_k(\xi_{k\ell}) \right| \le c, \ \ c = \text{const}, \ \xi_{k\ell} \in (t_\ell, t_{\ell+1}), \ t_{\ell+1} - t_\ell = h_c, \ \forall \ell \in \overline{0, i}, \ \forall i = 0, 1, \ldots, \tag{53}$$

где $\xi_{k\ell}$ *из (52), аналогично, для каждого слагаемого из левой части (53)*

$$\left| \frac{u_k(\xi_{k\ell})}{v_k(t_0)} \right| \le \overline{c}, \ \ \overline{c} = \text{const}, \ \ \xi_{k\ell} \in (t_\ell, t_{\ell+1}), \ \ t_{\ell+1} - t_\ell = h_c, \ \ \forall \ell \in \overline{0, i}, \ \ \forall i = 0, 1, \ldots. \tag{54}$$

Тогда нулевое решение задачи (1) устойчиво.

Доказательство. Пусть в (49) h_c произвольно выбрано и зафиксировано. Пусть произвольно зафиксировано $k \in \overline{1, n}$. Исходные предположения для функции $v_k(t)$ обеспечивают выполнение условий теоремы Лагранжа о среднем на каждом отрезке из (49), в частности выполняются соотношения (50)–(52). Из (52) при $\ell = i$

$$v_k(t_{i+1}) = u_k(\xi_{ki}) \times h_c + v_k(t_i), \ \xi_{ki} \in (t_i, t_{i+1}), \ \ \forall i = 0, 1, \ldots \tag{55}$$

Из (55) $v_k(t_{i+1}) = u_k(\xi_{ki}) \times h_c + u_k(\xi_{k(i-1)}) \times h_c + v_k(t_{i-1}) \ \ \forall i = 1, 2, \ldots$, и, далее, по рекуррентности,

$$v_k(t_{i+1}) = u_k(\xi_{ki}) \times h_c + u_k(\xi_{k(i-1)}) \times h_c + u_k(\xi_{k(i-2)}) \times h_c + \cdots + u_k(\xi_{k(i-i)}) \times h_c + v_k(t_{i-i}). \tag{56}$$

Отсюда

$$|v_k(t_{i+1})| \le \left| \sum_{\ell=0}^{i} u_k(\xi_{k\ell}) \right| \times h_c + |v_k(t_0)|. \tag{57}$$

Из (57) $|v_k(t_{i+1}) / v_k(t_0)| \le h_c \left| \dfrac{1}{v_k(t_0)} \sum_{\ell=0}^{i} u_k(\xi_{k\ell}) \right| + 1$.

Отсюда, с учетом (53), $|v_k(t_{i+1}) / v_k(t_0)| \le h_c \times c + 1$. Для оценки $v_k(t), \ \forall t \in [t_i, t_{i+1})$, используется неравенство $v_k(t) \le |v_k(t_{i+1}) - v_k(t)| + |v_k(t_{i+1})|$, согласно которому с учетом (51) $|v_k(t)| \le |u_k(\overline{\xi}_{ki})| \times (t_{i+1} - t) + |v_k(t_{i+1})|$, где $\overline{\xi}_{ki} \in (t, t_{i+1})$. Далее, с учетом (53), $|v_k(t_{i+1})| < (h_c \times c + 1) |v_k(t_0)|$. В результате $|v_k(t)| \le \overline{c} \times |v_k(t_0)| \times (t_{i+1} - t_i) + |v_k(t_{i+1})|$, где $\overline{c}$ из (54), и

$$|v_k(t)| < C^{(1)} |v_k(t_0)|, \ \ C^{(1)} = (c + \overline{c}) \times h_c + 1, \ \forall t \in [t_i, t_{i+1}] \ \ \ \forall i = 0, 1, \ldots. \tag{58}$$

Окончательно

$$\left| v_k(t)/v_k(t_0) \right| \le C^{(1)},\ C^{(1)} = \text{const},\ \forall t \in [t_0, \infty),\ \forall k \in \overline{1,n},\ \forall V(t):\ 0 < \left\| V(t_0) \right\| \le \Delta. \quad (59)$$

Выполнено соотношение (24) теоремы 1, и рассматриваемая теорема доказана.

Замечание 5. Теорема 7 не требует выполнения всех исходных предположений – при ее доказательстве, до оценки (58) включительно, нигде не использовалось предположение непрерывной дифференцируемости правой части (1). В условиях теоремы достаточно было бы ограничиться непрерывностью правой части, при этом из (58) непосредственно вытекает устойчивость нулевого решения задачи (1). Формально дифференцируемость $U(t)$ была нужна в доказательстве как часть условия теоремы 1 – для ссылки на (24) исходя из (59), но фактически (59) излишне – устойчивость непосредственно следует из (58): $\left| v_k(t) \right| \le C^{(1)}\Delta$.

Имеет место

Теорема 8. *Пусть выполнены все условия теоремы 7. Если, кроме того,* $\exists\, \Delta_1 > 0$, $0 < \Delta_1 \le \Delta$, *такое, что при любом выборе* $h_c = \text{const}$ *из (49),* $\forall\, V(t):\ 0 < \left\| V(t_0) \right\| \le \Delta_1$ *выполняются соотношения*

$$\frac{1}{v_k(t_0)} \sum_{\ell=0}^{i} u_k(\xi_{k\ell}) h_c + 1 \to 0,\ t \to \infty,\ t \in [t_i, t_{i+1}),\ \forall i = 0, 1, \ldots,\ (i \to \infty),$$
$$\xi_{k\ell} \in (t_\ell, t_{\ell+1}),\ t_{\ell+1} - t_\ell = h_c,\ \ \forall \ell \in \overline{0, i},\ \forall k \in \overline{1,n}, \quad (60)$$

где $\xi_{k\ell}$ *из (52), а также*

$$u_k(t) \to 0,\ t \to \infty\ \ \forall k \in \overline{1,n}, \quad (61)$$

то нулевое решение задачи (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Пусть произвольно зафиксировано $k \in \overline{1,n}$. По теореме 7 нулевое решение задачи (1) устойчиво. Имеет место разложение (56), для которого верно равенство

$$v_k(t_{i+1})/v_k(t_0) = \frac{1}{v_k(t_0)} \sum_{\ell=0}^{i} u_k(\xi_{k\ell}) h_c + 1.$$

Отсюда и из (60)

$$v_k(t_{i+1})/v_k(t_0) \to 0,\ t \to \infty,\ t \in [t_i, t_{i+1}),\ i = 0, 1, \ldots (i \to \infty). \quad (62)$$

Очевидно, $v_k(t) \le \left| v_k(t_{i+1}) - v_k(t) \right| + \left| v_k(t_{i+1}) \right|,\ \forall t \in [t_i, t_{i+1})\ \ \forall i = 0, 1, \ldots$, следовательно, $\left| v_k(t) \right| \le \left| u_k(\overline{\xi}_{ki}) \right| \times (t_{i+1} - t) + \left| v_k(t_{i+1}) \right|$, где $\overline{\xi}_{ki} \in (t, t_{i+1})$ из (51).

Отсюда $\left| v_k(t) \right| \le \left| u_k(\overline{\xi}_{ki}) \right| \times (t_{i+1} - t_i) + \left| v_k(t_{i+1}) \right| \le \max\limits_{\forall t \in [t_i, t_{i+1}]} \left| u_k(t) \right| \times h_c + \left| v_k(t_{i+1}) \right|$.

По условию $u_k(t) \to 0,\ t \to \infty$, поэтому $\max\limits_{\forall t \in [t_i, t_{i+1}]} \left| u_k(t) \right| \times h_c \to 0,\ t \to \infty$. Кроме того, согласно (62) $\left| v_k(t_{i+1}) \right| \to 0,\ t \to \infty$. В результате

$$\left| v_k(t) \right| \to 0,\ t \to \infty. \quad (63)$$

Соотношение (63) получено $\forall k \in \overline{1,n},\ \forall V(t):\ 0 < \left\| V(t_0) \right\| \le \Delta$, в качестве Δ_1 можно взять $\Delta_1 = \Delta$. Окончательно $v_k(t) \to 0,\ t \to \infty\ \forall k \in \overline{1,n},\ \forall V(t):\ 0 < \left\| V(t_0) \right\| \le \Delta_1$.

Теорема доказана.

Замечание 6. В условиях теоремы 8 стремление к нулю решения следует из стремления к нулю производной в (61), а также из существования предела суммы производных равного $-v_k(t_0)$ в (60), где производные слагаемых взяты из (52).

Разложение (56) допускает различные оценки сверху, (57) – одна из них. Можно находить разнообразные мажоранты для (56) или (57) с целью получить достаточные условия устойчивости. В частности, (57) вытекает из неравенств

$$\left| v_k(t_{i+1}) \right| \le \sum_{\ell=0}^{i} \left| u_k(\xi_{k\ell}) \right| \times h_c + \left| v_k(t_0) \right| \le \sum_{\ell=0}^{i} \max_{t \in [t_\ell, t_{\ell+1}]} \left| u_k(t) \right| \times h_c + \left| v_k(t_0) \right|. \quad (64)$$

Если $u_k(t)$ такова, что

$$\max_{t\in[t_\ell,\,t_{\ell+1}]}|\,u_k(t)\,|\le\frac{1}{t_0+\ell h_c}\times\bar c\times|\,v_k(t_0)\,|,\ \bar c=\text{const},\tag{65}$$

то этого недостаточно для устойчивости, требуется усиление неравенства. Из (65)

$$\max_{t\in[t_\ell,\,t_{\ell+1}]}|\,u_k(t)\,|\le\frac{1}{\ell}\times\bar c\times|\,v_k(t_0)\,|/h_c,\ \bar c=\text{const},$$

$$\text{и}\ \max_{t\in[t_\ell,\,t_{\ell+1}]}|\,u_k(t)\,|\le\frac{1}{\ell}\times\tilde c,\quad \tilde c=\bar c\times\Delta/h_c,\quad \tilde c=\text{const}.$$

Подстановка в (64) влечет

$$|\,v_k(t_{i+1})\,|\le\bar c\Delta\left(\sum_{\ell=0}^{i}\frac{1}{\ell}+1\right)\tag{66}$$

Поскольку $\sum_{\ell=0}^{i}\frac{1}{\ell}=\ln i+\gamma+\varepsilon_i$, $\gamma=0.5772...=\text{const}$, $\varepsilon_i\to 0$ [15], то вместо мажоранты из (66) можно рассмотреть частное от деления на $\ln i+\gamma+\varepsilon_i$ (с точностью до постоянного множителя) –

$$|\,v_k(t_{i+1})\,|\le\bar c\Delta\left(\frac{1}{\bar c_0\ln i}\sum_{\ell=0}^{i}\frac{1}{\ell}+1\right),\ \ \bar c_0>1,\ \bar c_0=\text{const},\tag{67}$$

что повлечет $|\,v_k(t_{i+1})\,|\le\tilde C\Delta,\ \tilde C=\text{const},\ \forall i=1,2,\dots$.
Отсюда последует $|\,v_k(t)\,|\le\tilde C_0\,\Delta,\ \tilde C_0=\text{const},\ \forall t\in[t_0,\infty)$, что будет означать устойчивость нулевого решения задачи (1) при условии

$$\sum_{\ell=0}^{i}\max_{t\in[t_\ell,\,t_{\ell+1}]}|\,u_k(t)\,|\times h_c+|\,v_k(t_0)\,|\le\bar c\Delta\left(\frac{1}{\bar c_0\ln i}\sum_{\ell=0}^{i}\frac{1}{\ell}+1\right),$$

где константы взяты из (67), учтено (64) и значение *i* предполагается достаточно большим. Наряду с этим как достаточное условие устойчивости нулевого решения задачи (1) можно рассматривать соотношение

$$\frac{1}{\bar c\,|\,v_k(t_0)\,|}\sum_{\ell=0}^{i}|\,u_k(\xi_{k\ell})\,|\le\left(\frac{1}{\bar c_0\ln i}\sum_{\ell=0}^{i}\frac{1}{\ell}+1\right)\ \forall t\in[t_0,\infty),\forall k\in\overline{1,n},\ \forall V(t):0<\|\,V(t_0)\,\|\le\Delta.\tag{68}$$

С точностью до постоянного множителя $\forall\varepsilon>0$, начиная с некоторого *i*, выполняется

$$\frac{1}{\bar c_0}\sum_{\ell=0}^{i}\frac{1}{\ell^{1+\varepsilon}}+1\le\frac{1}{\bar c_0\ln i}\sum_{\ell=0}^{i}\frac{1}{\ell}+1\le\frac{1}{\bar c_0}\sum_{\ell=0}^{i}\frac{1}{\ell}+1,$$

поэтому правая часть (68) имеет промежуточный порядок роста между гармоническим и субгармоническим рядом.

На основе (49)–(52) и (56) можно сформулировать необходимые и достаточные условия устойчивости. Пусть снова произвольно зафиксировано $k\in\overline{1,n}$. Если (51) преобразовать к виду $v_k(t)-v_k(t_{i+1})=u_k(\bar\xi_{k(i+1)})\times(t-t_{i+1}),\ \forall t\in[t_{i+1},t_{i+2}],\ \xi_{k(i+1)}\in(t_{i+1},t)\ \forall i=0,1,\dots$ и сложить с (56), то равенство сохранится:

$$v_k(t)-v_k(t_{i+1})+v_k(t_{i+1})=u_k(\bar\xi_{k(i+1)})\times(t-t_{i+1})+u_k(\xi_{ki})\times h_c+u_k(\xi_{k(i-1)})\times h_c+$$
$$+u_k(\xi_{k(i-2)})\times h_c+\dots+u_k(\xi_{k0})\times h_c+v_k(t_0).$$

В результате

$$v_k(t)=u_k(\bar\xi_{k(i+1)})\times(t-t_{i+1})+h_c(u_k(\xi_{ki})+u_k(\xi_{k(i-1)})+u_k(\xi_{k(i-2)})+\dots+u_k(\xi_{k0}))+v_k(t_0),$$

где $\bar\xi_{k(i+1)}$ из (51) при $\ell=i+1$, $\xi_{k\ell}$ из (52) при $\ell=i-r,\ r\in\overline{0,i}$.

Деление на $v_k(t_0)$ влечет

$$\frac{v_k(t)}{v_k(t_0)} = \frac{1}{v_k(t_0)}\left(u_k(\overline{\xi}_{k(i+1)}) \times (t - t_{i+1}) + h_c \sum_{\ell=0}^{i} u_k(\xi_{k\ell})\right) + 1,$$
$$\forall t \in [t_{i+1}, t_{i+2}],\ \overline{\xi}_{k(i+1)} \in (t_{i+1}, t)\ \ \forall i = 0, 1, \dots \tag{69}$$

Согласно (49) равенство (69) верно $\forall t \in [t_0, \infty)$. Преобразования, в результате которых получено (69), верны $\forall k \in \overline{1,n}$, $\forall V(t):\ 0 < \left\| V(t_0) \right\| \le \Delta$. Отсюда, с учетом замечания 5, вытекает

Теорема 9. *Пусть для задачи (1) выполнены исходные предположения (за вычетом предположения о непрерывной дифференцируемости $U(t, V)$). Пусть выполнено разбиение (49), где $h_c = \mathrm{const}$ выбрано произвольно. Тогда для устойчивости нулевого решения задачи (1) необходимо и достаточно существование $\Delta > 0$, такого, что $\forall\ V(t):\ 0 < \left\| V(t_0) \right\| \le \Delta$, $\forall k \in \overline{1,n}$, имеет место соотношение*

$$\left| \frac{1}{v_k(t_0)}\left(u_k(\overline{\xi}_{k(i+1)})(t - t_{i+1}) + h_c \sum_{\ell=0}^{i} u_k(\xi_{k\ell})\right) + 1 \right| \le c,\ c = \mathrm{const}, \tag{70}$$

$$\forall t \in [t_0, \infty):\ t \in [t_{i+1}, t_{i+2}],\ \forall i = 0, 1, \dots,\ \overline{\xi}_{k(i+1)} \in (t_{i+1}, t_{i+2}),\ \xi_{k\ell} \in (t_\ell, t_{\ell+1})\ \ \forall \ell \in \overline{0, i},$$

где $\overline{\xi}_{k(i+1)}$ из (51) при $\ell = i+1$, $\xi_{k\ell}$ $\forall \ell \in \overline{0, i}$ – из (52). Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось это условие и существовало Δ_1, $0 < \Delta_1 \le \Delta$, такое, что $\forall k \in \overline{1,n}$, $\forall V(t):\ 0 < \left\| V(t_0) \right\| \le \Delta_1$ верно соотношение

$$u_k(\overline{\xi}_{k(i+1)}) \times (t - t_{i+1}) + h_c \sum_{\ell=0}^{i} u_k(\xi_{k\ell}) + v_k(t_0) \to 0,$$
$$t \to \infty\ (i \to \infty),\ \xi_{k\ell} \in (t_\ell, t_{\ell+1}),\ \overline{\xi}_{k(i+1)} \in (t_{i+1}, t_{i+2}). \tag{71}$$

Замечание 7. Необходимо принять во внимание разницу между теоремой 9 и леммой 2. В отличие от (22) соотношение (70) использует точные значения $u_k(\xi_{k\ell})$ компонентов правой части (1), $h_c = \mathrm{const}$, и не предполагает перехода к пределу по $h \to 0$. Кроме того, (70) не использует дифференцируемости $u_k(t)$ из (1). То же можно сказать относительно сопоставления (23) и (70), (71).

Теорема 9, в выражении через компоненты правой части (1), при условии их непрерывности на полуоси, дает необходимые и достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения задачи (1) для системы ОДУ общего вида в предположении существования и единственности решения в R_0.

Замечание 8. Равенство (56), левые части (70) и (71) близко связаны с теоремой о среднем, в том числе применительно к значению интеграла. Они также сходны с разложением (22) и с интегральной суммой, определяющей интеграл [15]. Существенное отличие в том, что в (70) используется обратная пропорция значению $v_k(t_0)$, произвольно выбранному из неравенства $0 < \left\| V(t_0) \right\| \le \Delta$. Отличие, кроме того, в том, что рассматриваемые соотношения применяются для оценки устойчивости решения ОДУ.

Для практических целей существует возможность определить значения $\xi_{k\ell}$ в $u_k(\xi_{k\ell})$ с высокой точностью. Именно, из (52)

$$\frac{v_k(t_{\ell+1}) - v_k(t_\ell)}{(t_{\ell+1} - t_\ell)} = u_k(\xi_{k\ell}),\ \ \xi_{k\ell} \in (t_\ell, t_{\ell+1}),$$

или $$\frac{v_k(t_{\ell+1}) - v_k(t_\ell)}{h_c} = u_k(\xi_{k\ell}),\ \ \xi_{k\ell} \in (t_\ell, t_{\ell+1}),\ h_c = (t_{\ell+1} - t_\ell),$$

что равносильно $h_c^{-1}(v_k(t_{\ell+1}) - v_k(t_\ell)) - u_k(\xi_{k\ell}) = 0$. Отсюда найти $\xi_{k\ell}$ можно как минимум модуля левой части равенства

$$\min_{\xi_{k\ell} \in [t_\ell, t_{\ell+1}]} \left| h_c^{-1}(v_k(t_{\ell+1}) - v_k(t_\ell)) - u_k(\xi_{k\ell}) \right| = 0. \tag{72}$$

Все значения под знаком модуля в (72) представимы в компьютерной реализации приближенного решения задачи (1). Минимум модуля любой функции на любом конечном отрезке с высокой точностью определяется с помощью программы на основе алгоритма сортировки [16].

Ниже материал дополняется особенностями оценок устойчивости линейных систем.

Об устойчивости линейной системы ОДУ. Наблюдается аналогия между решением системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) по методу простой итерации и решением задачи Коши для линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами по методу Эйлера. Пусть рассматривается СЛАУ в приведенной форме

$$x = Ax + b, \tag{73}$$

где матрица $A = (a_{ij})$, $n \times n$, общего вида, $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$, $\det(E - A) \neq 0$, $\|A\| < 1$, E – единичная матрица. В этих условиях метод простой итерации

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)} + b, \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{74}$$

сходится к единственному решению СЛАУ (73) при любом выборе $x^{(0)}$. Количество итераций (74) можно сократить, возводя матрицу в степень. Так, если найти $A_1 = A^2$ и $b_1 = Ab + b$, то (74) эквивалентно схеме $x^{(k)} = A_1 x^{(k-2)} + b_1$, число итераций которой вдвое меньше, чем в (74). Аналогично, $x^{(k)} = A_2 x^{(k-4)} + b_2$, где $A_2 = A_1^{\,2}$, $b_2 = A_1 b_1 + b_1$, и число последующих итераций сократится вчетверо и т.д. В случае параллельного вычисления требуемых степеней матриц и соответственных векторов, путем данных преобразований можно существенно сократить время решения системы (73). В общем случае итерационная схема решения СЛАУ с логарифмическим числом итераций записывается следующим образом

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = A^2, \quad x^{(1)} = Ax^{(0)} + b, \quad b^{(1)} = Ab + b, \ \ldots, \\ A_\ell = A_{\ell-1}^2, \quad x^{(\ell)} = A_{\ell-1} x^{(\ell-1)} + b^{(\ell-1)}, \quad b^{(\ell)} = A_{\ell-1} b^{(\ell-1)} + b^{(\ell-1)}; \quad \ell = 2,\ 3,\ \ldots . \end{array}\right\} \tag{75}$$

Схема (75) эквивалентна (74) [17]. При этом если в (74) для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\left\| x - x^{(k)} \right\| \le \varepsilon \ \ \forall\, k \ge k_0(\varepsilon), \tag{76}$$

то для $x^{(\ell)}$ из (75) то же верно $\forall \ell \ge \lceil \log_2(k_0 + 1) \rceil$, число итераций k сокращается до $\log_2 k$. Однако итерации (75) существенно сложнее. Максимально параллельное выполнение одной итерации (74) и одного шага (75) происходит за одинаковое время (здесь время – синоним временной сложности). Шаг (75) выполняется за время $T(n^3 + 2n^2) \le t_y + \lceil \log_2(n+1) \rceil\, t_c$, шаг (74) – за время $T(n^2) \le t_y + \lceil \log_2(n+1) \rceil\, t_c$, где t_c и t_y – время арифметического сложения и умножения, в скобках левой части – число процессоров. В результате метод (75) достигает приближения (76) к решению СЛАУ (73) за время

$$T(n^3 + 2n^2) \le \lceil \log_2(k_0 + 1) \rceil \left(t_y + \lceil \log_2(n+1) \rceil\, t_c \right) = \lceil \log_2(k_0 + 1) \rceil\ O\!\left(\log_2 n\right).$$

Пусть теперь рассматривается задача Коши для линейной системы ОДУ

$$Y' = BY + d\,,\ Y(t_0) = Y_0, \tag{77}$$

с матрицей постоянных коэффициентов B, $n \times n$, и постоянным вектором d, $Y = Y(t)$ $t \in [t_0, \infty)$. Для приближенного решения (77) применяется метод Эйлера

$$Y_{i+1} = Y_i + h \times BY_i + d\,,\ \ i = 0, 1, \ldots, \text{ или,}$$

$$Y_{i+1} = AY_i + d\,,\ \ i = 0, 1, \ldots, \tag{78}$$

где $A = E + h \times B$, шаг h определяется из (3). Внешне (78) сходно с (74). Устойчивость линейной системы совпадает с устойчивостью соответствующей однородной системы $Y' = BY$, поэтому ниже полагается $d = \vec{0}$. Схема (78) примет вид

$$Y_{i+1} = AY_i,\ \ i = 0, 1, \ldots,\ \ A = E + h \times B\,. \tag{79}$$

Метод Эйлера рассматривается в условиях сходимости, поэтому в (79)

$$h = (t - t_0)/i,\ \ \forall t = \text{const}:\ h \to 0\ \ (i \to \infty)\,. \tag{80}$$

Если теперь по аналогии с (75) возводить матрицу A в степень, то сокращение числа итераций не произойдет, и это было бы излишне для пошагового приближения решения ОДУ, однако при фиксированном h происходит удаление Y_{i+1} от начальной точки t_0 в геометрической прогрессии:

$$Y_{i+1} = AY_i = A^2Y_{i-1} = A^3Y_{i-2} = \cdots = A^{i+1}Y_0 . \tag{81}$$

Фиксирование h нарушает (80), но при достаточно малом h реализуется численное моделирование устойчивости линейной системы. Удобно выполнять умножение текущей матрицы на себя, моделирующий процесс примет вид

$$Y_{2^{i+1}} = A^{2^{i+1}} Y_0 . \tag{82}$$

Из (81), (82) поведение A^{i+1} ($A^{2^{i+1}}$) на полуоси полностью определяет рост, ограниченность или убывание возмущения нулевого решения при условии, что шаг из (80). Процесс следует рассматривать при произвольном t как $Y(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, (81) переходит в соотношение

$$Y(t) = A^{i+1}Y_0, \;\; t \in [t_0, \infty), \;\; h = (t - t_0)/i, \tag{83}$$

точное значение решения для любого t получается путем предельного перехода

$$Y(t) = \lim_{h\to 0,\, h=(t-t_0)/i} A^{i+1}Y_0, \;\; t \in [t_0, \infty),$$

что эквивалентно

$$Y(t) = \lim_{i\to\infty\,(h\to 0)} A^{i+1}Y_0, \;\; t \in [t_0, \infty), \;\; h = (t - t_0)/i . \tag{84}$$

Из (84) именно асимптотическое поведение $\lim\limits_{i\to\infty\,(h\to 0)} A^{i+1}$ полностью определяет характер устойчивости нулевого решения, соответственно – всей системы [1]. Отсюда вытекает

Теорема 10. *Для устойчивости системы (77) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\left\| \lim_{i\to\infty\,(h\to 0)} A^{i+1} \right\| \le C_0, \;\; C_0 = \text{const}, \;\; \forall t \in [t_0, \infty), \;\; h = (t - t_0)/i, \tag{85}$$

где $A = E + h \times B$. *Если условие (85) выполняется, то для асимптотической устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \lim_{i\to\infty\,(h\to 0)} A^{i+1} \right\| = 0, \;\; h = (t - t_0)/i . \tag{86}$$

Следствие 10. Теорема сохраняется, если в (85) и в (86) A^{i+1} заменить на $A^{2^{i+1}}$ и $h = (t - t_0)/i$ заменить на $h = (t - t_0)/2^i$.

В случае если система (77) линейна, но матрица B не постоянна, $B = B(t)$, все элементы $B(t)$ предполагаются непрерывными функциями на полуоси, что влечет равномерную сходимость метода Эйлера $\forall t \in [t_0, \bar{t}\,]$, $\forall \bar{t} \in [t_0, \infty)$. Выполняется переход от (78) к (79), (80). Поскольку теперь матрица $A = E + h \times B(t) = A(t)$ переменная, переход к (83) невозможен. Аналог предыдущего процесса строится пошагово. Пусть в (80) t обозначается как t_i:

$$h = (t - t_0)/i, \quad t = t_0 + ih, \;\; t_i = t .$$

Вместо (81) получится $Y_{i+1} = A(t_i)Y_i = A(t_i)A(t_{i-1})Y_{i-1} = \cdots = \prod\limits_{\ell=0}^{i} A(t_{i-\ell})Y_0$. Отсюда вытекает

Теорема 11. *Для устойчивости линейной системы (77) с матрицей $B = B(t)$, все элементы которой непрерывны $\forall t \in [t_0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\left\| \lim_{i\to\infty\,(h\to 0)} \prod_{\ell=0}^{i} A(t_{i-\ell}) \right\| \le \bar{C}_0, \;\; \bar{C}_0 = \text{const}, \;\; \forall t \in [t_0, \infty), \;\; h = (t - t_0)/i, \tag{87}$$

где $A(t) = E + h \times B(t)$, $t_{i-\ell} = t_0 + (i - \ell)h \;\; \forall \ell \in \overline{0, i}$. Если это условие выполнено, то для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы при h из (87) выполнялось

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \lim_{i\to\infty\,(h\to 0)} \prod_{\ell=0}^{i} A(t_{i-\ell}) \right\| = 0 . \tag{88}$$

Замечание 9. Описанные ранее способы анализа устойчивости, независимо от способов теорем 8, 9, могут использоваться для задачи (77) как для частного случая задачи (1).

Численное моделирование устойчивости системы (77) на основе (85), (86) и (87), (88) при малом h на большом интервале, как правило, соответствует аналитической оценке устойчивости [17]. Стоит дополнить, что методом на основе сортировки, упоминавшемся относительно (72), можно с высокой точностью вычислить все корни характеристического полинома матрицы B из (77) [16] и на этой основе сделать полный вывод об устойчивости системы.

О линеаризации системы ОДУ для оценки устойчивости. Пусть для приближенного решения задачи (1) применяется кусочно-интерполяционный метод с итерационным уточнением [18, 19]. На каждом подынтервале интерполирующие компоненты правой части полиномы имеют вид алгебраических полиномов фиксированной степени от одной переменной t, они непрерывно склеиваются на каждой границе смежных подынтервалов. В результате получается непрерывное приближение функцией одной переменной каждого компонента правой части системы (1) на всем отрезке приближенного решения. Приближение выполняется с наперед заданной точностью. Система (1) оказывается преобразованной к приближению линейной системой вида (77), где матрица $B = B(t)$ непрерывна на всем отрезке приближения. С априори заданной точностью приближается также само решение. Массивы полиномов, приближающих правую часть и приближающих решение на промежутке большой длины, можно хранить в виде типизированных файлов. В результате достигается возможность численного моделирования устойчивости решения задачи (1) на основе преобразования к линеаризованной системе. Ниже описание метода детализируется согласно [19]. В (1) меняется обозначение независимой переменной:

$$V' = U(x, V), \quad V(x_0) = V_0, \quad x \in [x_0, \infty), \tag{89}$$

где $U(x, V) = (u_1(x, V), u_2(x, V), \ldots, u_n(x, V))$, $V = (v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x))$, $V_0 = (v_{10}, v_{20}, \ldots, v_{n0})$. Отрезок приближенного решения разбивается на подынтервалы равной длины

$$[a, b] = \bigcup_{i=0}^{p-1} [a_i, b_i], \quad b_i - a_i = (b-a)p^{-1}, \; a_{i+1} = b_i, \; i = 0, 1, \ldots, p-2. \tag{90}$$

Пусть произвольно зафиксировано $k \in \overline{1, n}$. Выполняется приближение функции $u_k(x)$ из (89) на $[a, b]$ из (90). Для этого на каждом подынтервале $[a_i, b_i]$ строится интерполяционный полином Ньютона степени $\overline{n}$ с равноотстоящими узлами для интерполирования $u_k(x)$:

$$\Psi_{ki\overline{n}}(t) = u_k(x_{i0}) + \sum_{j=1}^{\overline{n}} \frac{\Delta^j u_{ki0}}{j!} \prod_{r=0}^{j-1} (t - r),$$
$$x \in [a_i, b_i], \; t = (x - x_{i0}) h_i^{-1}, \; h_i = (b_i - a_i)\overline{n}^{-1}, \; x_{i0} = a_i, \; i \in \overline{0, p-1}. \tag{91}$$

Полином (91) преобразуется к виду полинома с числовыми коэффициентами

$$\Psi_{ki\overline{n}}(t) = u_k(x_{i0}) + \sum_{\ell=1}^{\overline{n}} c_{ki\ell} t^{\ell}, \tag{92}$$

где $c_{ki\ell} = \sum_{j=\ell}^{\overline{n}} \Delta^j u_{ki0} \dfrac{d_{j\ell}}{j!}$. В основе преобразования – алгоритм восстановления коэффициентов полинома по его корням [18], согласно которому в $\prod_{r=0}^{j-1}(t - r)$ следует положить $t_r = r$, $r \in \overline{0, j-1}$, значения коэффициентов рекуррентно восстанавливаются из соотношений

$$d_{mm} = d_{(m-1)(m-1)}, \quad d_{m(m-\ell)} = d_{(m-1)(m-\ell-1)} - d_{(m-1)(m-\ell)} t_{m-1},$$
$$d_{m0} = -d_{(m-1)0} t_{m-1}, \; \ell = 1, 2, \ldots, m-1, \; m = 1, 2, \ldots, j. \tag{93}$$

Здесь и ниже $h_i = (b-a)p^{-1}\overline{n}^{-1}$. Интерполирование выполняется с рядом особенностей.

В $u_k(x,V) = u_k(x, V, U(V))$ подставляется приближенное значение $\{ v_k(x) \}_{k=1}^{n}$, вначале $\{ v_k(x) \}_{k=1}^{n} \approx \{ v_{k0} \}_{k=1}^{n} = V_0$. Функция $u_k(x, V_0, U(V_0))$ приближается полиномами (92) по схеме (91)–(93) с итерационным уточнением по следующему алгоритму. При фиксированных значениях $\overline{n}$ и p из (90) на отрезке $[a_i, b_i]$, сначала при $i = 0$, затем, аналогично, при $i = 1, 2, \ldots, p-1$, выполняется приближение (92),

$$\Psi_{ki\overline{n}}(t) = u_k(x_{i0}, V_{i0}, U_{i0}) + \sum_{\ell=1}^{\overline{n}} c_{ki\ell}\, t^{\ell}, \; u_k(x, V_{i0}, U_{i0}) \approx \Psi_{ki\overline{n}}(t), \; t = (x - a_i) h_i^{-1},$$

h_i – шаг интерполяции на $[a_i, b_i]$, постоянный для всех номеров i: $h_i = (b-a) p^{-1} \overline{n}^{-1}$.
Первообразная

$$\Psi_{k(\mathrm{int})i(\overline{n}+1)}(t) = v_{ki0} + h_i \int_0^t \Psi_{ki\overline{n}}(t)\, dt, \text{ или, } \Psi_{k(\mathrm{int})i(\overline{n}+1)}(t) = v_{ki0} + h_i \sum_{\ell=0}^{\overline{n}} c_{ki\ell} / (\ell+1) t^{\ell+1},$$

$c_{ki0} = u_k(x_{i0}, V_{i0}, U_{i0})$ (на начальном подынтервале $v_{k00} = v_{k0}$, на последующих подынтервалах выбор v_{ki0} поясняется ниже), принимается за приближение k-го компонента решения: $v_k(x) \approx \Psi_{k(\mathrm{int})i(\overline{n}+1)}(t)$, $x \in [a_i, b_i]$. Тогда $u_k(x,V) \approx u_k(x, \{ \Psi_{\ell(\mathrm{int})i(\overline{n}+1)}(t) \}_{\ell=1}^{n})$. При том же значении $\overline{n}$, на том же подынтервале строится интерполяционный полином вида (92) для приближения $\Psi_{ki\overline{n}}^{(1)}(t) \approx u_k(x, \{ \Psi_{\ell(\mathrm{int})i(\overline{n}+1)}(t) \}_{\ell=1}^{n})$, $t = (x - a_i) h_i^{-1}$. От этого полинома снова берется первообразная с тем же значением константы $\Psi_{k(\mathrm{int})i(\overline{n}+1)}^{(1)}(t) = v_{ki0} + h_i \int_0^t \Psi_{ki\overline{n}}^{(1)}(t)\, dt$, выполняется соответственная подстановка в правую часть, $u_k(x,V) \approx u_k(x, \{ \Psi_{\ell(\mathrm{int})i(\overline{n}+1)}^{(1)}(t) \}_{\ell=1}^{n})$, которая затем аналогично интерполируется, $\Psi_{ki\overline{n}}^{(2)}(t) \approx u_k(x, \{ \Psi_{\ell(\mathrm{int})i(\overline{n}+1)}^{(1)}(t) \}_{\ell=1}^{n})$, $t = (x - a_i) h_i^{-1}$.
Итерации

$$\Psi_{ki\overline{n}}^{(r)}(t) \approx u_k(x, \{ \Psi_{\ell(\mathrm{int})i(\overline{n}+1)}^{(r-1)}(t) \}_{\ell=1}^{n}), \quad t = (x - a_i) h_i^{-1},$$

$$\Psi_{k(\mathrm{int})i(\overline{n}+1)}^{(r)}(t) = v_{ki0} + h_i \int_0^t \Psi_{ki\overline{n}}^{(r)}(t)\, dt, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

$$\Psi_{k(\mathrm{int})i(\overline{n}+1)}^{(0)}(t) = \Psi_{k(\mathrm{int})i(\overline{n}+1)}(t), \quad \Psi_{ki\overline{n}}^{(0)}(t) = \Psi_{ki\overline{n}}(t)$$

продолжаются до априори заданной границы: $r \le q = \mathrm{const}$. Выше неявно предполагалось, что за значение v_{ki0} было взято $\Psi_{k(\mathrm{int})i(\overline{n}+1)}^{(q)}(b_{i-1})$. По окончании итераций на $[a_i, b_i]$ выполняется переход к $[a_{i+1}, b_{i+1}]$, где за значение $v_{k(i+1)0}$ принимается $\Psi_{k(\mathrm{int})i(\overline{n}+1)}^{(q)}(b_i)$. Отсюда $\Psi_{k(\mathrm{int})(i+1)(\overline{n}+1)}^{(q)}(a_{i+1}) = \Psi_{k(\mathrm{int})i(\overline{n}+1)}^{(q)}(b_i)$, $i = 0, 1, \ldots, p-2$, и интегральные полиномы совпадают на каждой общей границе всех смежных подынтервалов. Таким образом, построенное приближение решения является непрерывной функцией $\forall x \in [a, b]$. Кусочно-интерполяционное приближение правой части (89) (производной от решения) также, по построению, является непрерывной функцией на всем $[a, b]$. Именно, интерполяция выполняется с равномерным шагом, в число интерполяционных узлов включаются обе границы подынтервала. За значение $\Psi_{ki\overline{n}}^{(0)}(t)$ в интерполяционном узле на левой границе подынтервала $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ принимается выходное значение $\Psi_{ki\overline{n}}^{(q)}(t)$ на правой границе подынтервала $[a_i, b_i]$, и это узловое значение не меняется в продолжение итераций на $[a_{i+1}, b_{i+1}]$. В результате $\Psi_{ki\overline{n}}^{(q)}(b_i) = \Psi_{k(i+1)\overline{n}}^{(q)}(a_{i+1})$ $\forall i \in \overline{0, p-1}$, полиномы, интерполирующие k-й компонент правой части (89), имеют равные значения на каждой общей границе смежных подынтервалов, что влечет непрерывность кусочной интерполяции компонентов правой части (1) на всем отрезке $[a, b]$. На этом отрезке имеет место равномерная сходимость $\{ \Psi_{\ell(\mathrm{int})i(\overline{n}+1)}^{(q)}(t) \}_{\ell=1}^{n}$ к решению V задачи (89) и равномерная сходимость $\{ \Psi_{\ell i\overline{n}}^{(q)}(t) \}_{\ell=1}^{n}$ к производной от решения $V' = U$ [18], если $p \to \infty$.

Однако для доказательства предполагается существование и непрерывность производных до $\bar{n}+1$-го порядка включительно от $u_k(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

С отступлением от формализации имеют место следующие предложения [19].

Предложение 4. *Коэффициенты полиномиального приближения производной от k-го компонента решения задачи (89),* $\Psi^{(q)}_{k i \bar{n}}(t)$, $t = (x - a_i)h_i^{-1}$, *имеют числовые значения,* $\Psi^{(q)}_{k i \bar{n}}(t) = c^{(q)}_{k i 0} + \sum_{\ell=1}^{\bar{n}} c^{(q)}_{k i \ell} t^{\ell}$. *По всем номерам подынтервалов из (90) они образуют массив из p строк вида* $(c^{(q)}_{uk00}, c^{(q)}_{uk01}, \ldots, c^{(q)}_{uk0(\bar{n}+1)})$, $(c^{(q)}_{uk10}, c^{(q)}_{uk11}, \ldots, c^{(q)}_{uk1(\bar{n}+1)})$, ... , $(c^{(q)}_{uk(p-1)0}, c^{(q)}_{uk(p-1)1}, \ldots, c^{(q)}_{uk(p-1)(\bar{n}+1)})$, *который можно хранить в памяти компьютера в виде типизированного файла. Обращение к строке этого файла позволяет восстановить значение k-го компонента производной от решения по схеме Горнера. Номер строки типизированного файла, соответственной произвольному значению независимой переменной* $x \in [a, b]$, *является номером подынтервала, которому принадлежит x,* $x \in [a_i, b_i]$, *и определяется из соотношения* $i = [(x-a)/(b_i - a_i)]$, *или*

$$i = [(x-a)/((b-a)p^{-1})], \tag{94}$$

где $[\alpha]$ – *целая часть числа* α.

Предложение 5. *Предложение 4 с точностью до обозначений повторяется для коэффициентов полинома* $\Psi^{(q)}_{k(\mathrm{int})i(\bar{n}+1)}(t)$, $t = (x - a_i)h_i^{-1}$, *приближающего k-й компонент решения задачи (89). Они имеют числовые значения,* $\Psi^{(q)}_{k(\mathrm{int})i(\bar{n}+1)}(t) = v_{ki0} + h_i \sum_{\ell=0}^{\bar{n}} c^{(q)}_{k i \ell}/(\ell+1) t^{\ell+1}$, *по всем номерам подынтервалов из (90) образуют массив из p строк вида* $(c^{(q)}_{vk00}, c^{(q)}_{vk01}, \ldots, c^{(q)}_{vk0\bar{n}})$, $(c^{(q)}_{vk10}, c^{(q)}_{vk11}, \ldots, c^{(q)}_{vk1\bar{n}})$, ..., $(c^{(q)}_{vk(p-1)0}, c^{(q)}_{vk(p-1)1}, \ldots, c^{(q)}_{vk(p-1)\bar{n}})$, *который можно хранить в виде типизированного файла. Обращение к строке этого файла позволяет восстановить значение k-го компонента решения задачи (89) по схеме Горнера. Номер строки определяется из (94).*

Результатом данных преобразований является линеаризованное приближение задачи (89), такое, что и решение, и правая часть системы (89) приближены с наперед заданной точностью. Компонент правой части на текущем подынтервале $[a_i, b_i]$ приближает полином $\Psi^{(q)}_{k i \bar{n}}(t)$, $t = (x - a_i)/h_i$. Для задачи (89) полученное приближение рассматривается как частный случай линейной системы $Y' = BY + d$, $Y(x_0) = Y_0$, где $B = B(x)$, $d = \vec{0}$. Таким образом,

$$Y' = B(x)Y, \quad x \in [x_0, \infty), \tag{95}$$

где k-я строка матрицы $B(x)$ при $x \in [a_i, b_i]$ имеет вид $\Psi^{(q)}_{k i \bar{n}}(t) = \sum_{\ell=0}^{\bar{n}} c^{(q)}_{k i \ell} t^{\ell}$, $t = (x - a_i)/h_i$. При этом $B(x)$ является диагональной матрицей

$$B(x) = \begin{pmatrix} \sum_{\ell=0}^{\bar{n}} c^{(q)}_{1 i \ell} t^{\ell} & & & \\ & \sum_{\ell=0}^{\bar{n}} c^{(q)}_{2 i \ell} t^{\ell} & & \\ & & \cdots & \\ & & & \sum_{\ell=0}^{\bar{n}} c^{(q)}_{n i \ell} t^{\ell} \end{pmatrix}, \quad t = (x - a_i)/h_i. \tag{96}$$

Для системы (95), (96) можно выполнить преобразования (78)–(80), (87), (88). В результате анализ устойчивости сведется к анализу системы вида (77) по схеме (79), где $A = E + h \times B(x)$, шаг метода Эйлера $h = (x - x_0)/r$ убывает к нулю на любом отрезке $[x_0, x]$, $x \in [x_0, \infty)$, $r = 1, 2, \ldots$. С точностью до обозначений остается применить теорему 11 и соотношения (87), (88). Произведение матриц сведется к произведению диагональных элементов:

$$\prod_{r=0}^{j} A(x_{j-r}) = \begin{pmatrix} \prod_{r=0}^{j}\left(1+h\sum_{\ell=0}^{\bar{n}} c_{1i\ell}^{(q)} t^{\ell}\right) & & & \\ & \prod_{r=0}^{j}\left(1+h\sum_{\ell=0}^{\bar{n}} c_{2i\ell}^{(q)} t^{\ell}\right) & & \\ & & \dots & \\ & & & \prod_{r=0}^{j}\left(1+h\sum_{\ell=0}^{\bar{n}} c_{ni\ell}^{(q)} t^{\ell}\right) \end{pmatrix}, \ t=(x-a_i)/h_i \qquad (97)$$

Реальный контроль устойчивости сведется к контролю значения модуля накапливаемого произведения полиномов $1+h\sum_{\ell=0}^{\bar{n}} c_{ki\ell}^{(q)} t^{\ell}$ в процессе приближения каждого компонента с номером $k \in \overline{1,n}$. Предварительно потребуется согласовать шаг метода Эйлера h и длину подынтервала $(b_i - a_i)$. Для численного моделирования устойчивости нулевого решения задачи (89) достаточно выбрать длинный конечный отрезок [*a, b*] из (90). Для аналитической оценки потребуется оценивать (97) в случае [*a, b*] произвольной длины.

Кусочно-интерполяционное решение задачи (89) дает возможность компьютерной оценки устойчивости без перехода к линеаризации. Поскольку есть приближение решения $v_k(x) \approx \left\{ \Psi_{\ell(\mathrm{int})i(\bar{n}+1)}^{(q)}(t) \right\}_{\ell=1}^{n}$, то для каждого компонента с номером $k \in \overline{1,n}$ автоматически выводится $v_k(x)/v_k(x_0) \approx \Psi_{k(\mathrm{int})i(\bar{n}+1)}^{(q)}(t)/v_k(x_0)$, t из (97), что влечет применение теоремы 1 и критериев (24), (25). Аналогичное приближение, $\left\{ \Psi_{ki\bar{n}}^{(q)}(t) \right\}_{\ell=1}^{n}$, есть для правой части (89), для каждого ее компонента получается $u_k(x) \approx \Psi_{ki\bar{n}}^{(q)}(t)$, что влечет возможность подстановки в (22), (23) и применения леммы 3. Кроме того, есть возможность воспользоваться теоремой 9 на основе подстановки в (70), (71) именно приближения $u_k(\xi_{k\ell})$. Как отмечалось, $\xi_{k\ell}$ можно найти как минимум модуля левой части равенства (72). Подстановка приближений в (72) влечет

$$\min_{\xi_{k\ell} \in [t_\ell,\, t_{\ell+1}]} \left| h_c^{-1}(\Psi_{k(\mathrm{int})i(\bar{n}+1)}^{(q)}(t_{\ell+1}) - \Psi_{k(\mathrm{int})i(\bar{n}+1)}^{(q)}(t_\ell)) - \Psi_{ki\bar{n}}^{(q)}(\xi_{k\ell}) \right| = 0. \qquad (98)$$

Решение уравнения (98) без принципиальных затруднений реализуется с помощью метода поиска корней полиномов, изложенного в [16]. При этом поиск выполняется именно как поиск минимума модуля полинома на отрезке. В этом случае в силу принципа минимума модуля никаких иных минимумов левой части (98) кроме корней полинома под знаком модуля не существует. Происходит автоматическая локализация корней $\xi_{k\ell}$ на промежутке $(t_\ell, t_{\ell+1})$ и их вычисление с высокой точностью. Процесс воспроизводится $\forall i = 0, 1, \dots,$ $\xi_{k(i+1)} \in (t_{i+1}, t_{i+2})$, $\xi_{k\ell} \in (t_\ell, t_{\ell+1})$ $\forall \ell \in \overline{0, i}$ из (70), (71), что приводит к численной модели анализа устойчивости на основе теоремы 9.

Примеры численного моделирования устойчивости. Нулевое решение системы

$$v_1' = -v_2 + v_1 \sin(v_1^2 + v_2^2 - 1), \ v_2' = v_1 + v_2 \cos(v_1^2 + v_2^2 - 1), \qquad (99)$$

где $t_0 = 0,\ v_k(t_0) \ge 0,\ k = 1, 2$, асимптотически устойчиво. Это показывает программа (Delphi)

```
program RAE1111;
{$APPTYPE CONSOLE}
uses
 SysUtils;
const h = 0.00001; tt=1000000;
var t,v1,v2,v10,v20,sum1,sum2: extended; k: longint;
function u1(t,v1,v2:extended):extended;
begin u1:=-v2+v1*sin((sqr(v1)+sqr(v2)-1)); end;
function u2(t,v1,v2:extended):extended;
begin u2:=v1+v2*cos((sqr(v1)+sqr(v2)-1)); end;
begin
k := 0; v10:=0.00005{*10}{/10}; v20:=0.00005{*10}{/10};
```

```
v1:=v10; v2:=v20; sum1:=0;sum2:=0;
t:=0; while t <=10000 do begin
v1:= v1+ h * u1(t,v1,v2); v2:= v2+ h * u2(t,v1 ,v2 );
sum1:=sum1+ u1(t,v1,v2); sum2:=sum2+ u2(t,v1,v2);
k:=k+1; if k = tt then begin writeln ('t=',t:2:20,' ');
writeln ('|v1/v10|=',abs(v1/v10):2:20,' ','|v2/v20|=',abs(v2/v20):2:20,' ');
writeln ('|u1/v10|=',abs(u1(t,v1,v2)/v10):2:20,' ','|u2/v20|=',abs(u2(t,v1 ,v2 )/v20):2:20,' ');
writeln ('|(h*sum1)/v10+1|=',abs((h*sum1)/v10+1):2:20,' ','|(h*sum2)/v20+1|=',abs((h*sum2)/v20+1):2:20,' ');
writeln ('|h*sum1+v10|=',abs(h*sum1+v10{1}):2:20,' ','|h*sum2+v20|=',abs(h*sum2+v20{1}):2:20,' ');
k:=0 end; t:=t+h; end; readln
end.
```

Результат работы программы:

```
t=9.99998999999993814000
|v1/v10|=0.29125998463144390000 |v2/v20|=0.55060196113427734000
|u1/v10|=0.30551513518396883000 |u2/v20|=0.00623152503433619000
|(h*sum1)/v10+1|=0.29124462507297467000 |(h*sum2)/v20+1|=0.55059953302620732000
|h*sum1+v10|=0.00001456223125365000 |h*sum2+v20|=0.00002752997665131000
t=19.99998999999953070000
|v1/v10|=0.12474269340820399000 |v2/v20|=0.09358920299588803000
|u1/v10|=0.01137815406980509000 |u2/v20|=0.07417623122037619000
|(h*sum1)/v10+1|=0.12472416491684224000 |(h*sum2)/v20+1|=0.09358430563734230000
|h*sum1+v10|=0.00000623620824584000 |h*sum2+v20|=0.00000467921528187000
t=29.99998999999912320000
|v1/v10|=0.01801949566185700000 |v2/v20|=0.00282119559851540000
|u1/v10|=0.01798407835883173000 |u2/v20|=0.01954379414904189000
|(h*sum1)/v10+1|=0.01800090111125236000 |(h*sum2)/v20+1|=0.00282661386466787000
|h*sum1+v10|=0.00000090004505556000 |h*sum2+v20|=0.00000014133069323000
……………………………………………………………………………………………
|v1/v10|=0.00000000000000000000 |v2/v20|=0.00000000000000000000
|u1/v10|=0.00000000000000000000 |u2/v20|=0.00000000000000000000
|(h*sum1)/v10+1|=0.00001841470982673000 |(h*sum2)/v20+1|=0.00000540302317802000
|h*sum1+v10|=0.00000000092073549000 |h*sum2+v20|=0.00000000027015116000
```

Моделирование выполняется на отрезке $t\in[0,\ 10^4]$. Задача решается методом Эйлера с шагом $h = 10^{-5}$. Данные выводятся с интервалом 10^1. На каждом интервале выводятся значения $\left|\dfrac{v_k(t)}{v_k(t_0)}\right|$, $k = 1, 2$. Они ограничены значением 0.56 и убывают до 0. По теореме 1 согласно (24) это (предварительно) означает устойчивость нулевого решения. Ввиду соответствия (25) устойчивость асимптотическая. С таким же интервалом выводятся значения $\left|\dfrac{u_k(t)}{v_k(t_0)}\right|$, $k = 1, 2$. Они ограничены значением 0.4 и убывают до 0. По теореме 7, где принято $h_c = h = 10^{-5}$, согласно (54) (предварительно) это означает устойчивость нулевого решения. То же, в соответствии (53), показывает вывод значений $\left|\dfrac{1}{v_k(t_0)}\ h\sum_{\ell=0}^{i}u_k(t)+1\right|$ (в программе |(h*sum1)/v10+1|, |(h*sum2)/v20+1|).

По теореме 8 (предварительно) ввиду соответствия (60), (61) устойчивость асимптотическая. Кроме того, с приближением $u_k(\xi_{k\ell})\approx u_k(t_\ell)$ выводимые данные соответствуют (70) и (71), что по теореме 9 (предварительно) означает асимптотическую устойчивость нулевого решения задачи (99).

При варьировании начальных значений (закомментировано в программе) воспроизводятся аналогичные результаты, что окончательно подтверждает предварительно сделанные выводы.

Если теперь систему (99) заменить системой

$$v_1' = -v_2 + v_1\sin e^{(v_1^2+v_2^2-1)},\ \ v_2' = v_1 + v_2\cos e^{(v_1^2+v_2^2-1)} \tag{100}$$

где $t_0 = 0,\ v_k(t_0)\geq 0,\ \ k=1,\ 2$, то по той же программе с соответственным изменением

```
function u1(t,v1,v2:extended):extended;
begin u1:=-v2+v1* sin(exp((sqr(v1)+sqr(v2)-1))); end;
function u2(t,v1,v2:extended):extended;
begin u2:=v1+v2* cos(exp((sqr(v1)+sqr(v2)-1))); end;
```

получится

```
t=9.99998999999993814000
|v1/v10|=500.59684804253400900000 |v2/v20|=767.20968887111535100000
|u1/v10|=586.81541388098810600000 |u2/v20|=1216.26073371725572000000
|(h*sum1)/v10+1|=500.59097348477086600000 |(h*sum2)/v20+1|=767.21685432457260900000
|h*sum1+v10|=0.02502954867423854000 |h*sum2+v20|=0.03836084271622863000
t=19.99998999999953070000
|v1/v10|=25740.68140412086640000000 |v2/v20|=13022.59203072221274000000
|u1/v10|=8018.31786635432274000000 |u2/v20|=12966.55858312267237000000
|(h*sum1)/v10+1|=25740.60122734582730000000 |(h*sum2)/v20+1|=13022.72395324083090000000
|h*sum1+v10|=1.28703006136729137000 |h*sum2+v20|=0.65113619766204155000
t=29.99998999999912320000
|v1/v10|=13435.20336590923715000000 |v2/v20|=22388.86798987410960000000
|u1/v10|=10302.11110067168487000000 |u2/v20|=3659.19056796498126000000
|(h*sum1)/v10+1|=13435.10035120185532000000 |(h*sum2)/v20+1|=22388.71617758612430000000
|h*sum1+v10|=0.67175501756009277000 |h*sum2+v20|=1.11943580887930622000
……………………………………………………………………………………..
t=9999.99998996787937000000
|v1/v10|=27329.70500137057080000000 |v2/v20|=9943.61504761500123000000
|u1/v10|=7388.24417752908457000000 |u2/v20|=17429.65163532512830000000
|(h*sum1)/v10+1|=27329.63112533244450000000 |(h*sum2)/v20+1|=9943.78624790049977000000
|h*sum1+v10|=1.36648155626662222000 |h*sum2+v20|=0.49718931239502499000
```

Выводимые данные возрастают, превосходя возможные ограничения (соответственно не обнаруживают стремления к нулю). При этом уменьшение начальных значений при повторных запусках программы влечет обратно пропорциональный рост значений выводимых данных. Это нарушает необходимое условие устойчивости теоремы 1, а также теоремы 9. Следовательно, нулевое решение задачи (100) неустойчиво.

Если теперь взамен (100) рассматривать систему

$$v_1' = -v_2 + v_1 e^{\sin(v_1^2+v_2^2-1)},\ v_2' = v_1 + v_2 e^{\cos(v_1^2+v_2^2-1)}, \qquad (101)$$

где $t_0 = 0,\ v_k(t_0) \ge 0,\ k = 1,\ 2$, то та же программа с соответственным изменением

```
function u1(t,v1,v2:extended):extended;
begin u1:=-v2+v1* exp(sin((sqr(v1)+sqr(v2)-1))); end;
function u2(t,v1,v2:extended):extended;
begin u2:=v1+v2* exp(cos((sqr(v1)+sqr(v2)-1))); end;
```

даст следующие результаты:

```
t=9.99998999999993814000
|v1/v10|=77862.42446241906800000000 |v2/v20|=26314.83256975851240000000
|u1/v10|=91439.40445717954740000000 |u2/v20|=68024.75800006116810000000
|(h*sum1)/v10+1|=77863.33885077439920000000 |(h*sum2)/v20+1|=26314.95314129935520000000
|h*sum1+v10|=3.89316694253871996000 |h*sum2+v20|=1.31574765706496776000
t=19.99998999999953070000
|v1/v10|=3757708443.45288119000000000000 |v2/v20|=945857167.41732183100000000000
|u1/v10|=885366228.63872246800000000000 |u2/v20|=5653293084.85314156000000000000
|(h*sum1)/v10+1|=3757717297.11517323000000000000 |(h*sum2)/v20+1|=948270838.40854998000000000000
|h*sum1+v10|=187885.86485575866100000000 |h*sum2+v20|=47413.54192042749900000000
t=29.99998999999912320000
|v1/v10|=444655451909496.94400000000000000000 |v2/v20|=476839954039750.91100000000000000000
|u1/v10|=32184502130253.96730000000000000000 |u2/v20|=921495405949247.85500000000000000000
|(h*sum1)/v10+1|=444655130064475.63900000000000000000 |(h*sum2)/v20+1|=476735427207564.458
00000000000000000
|h*sum1+v10|=22232756503.22378200000000000000 |h*sum2+v20|=23836771360.37822290000000000000
…………………………………………………………………………………………………....
```

Далее наступит переполнение. При варьировании начальных значений результаты аналогичны. Согласно теоремам 1 и 9 нулевое решение задачи (101) неустойчиво.

Изложенный способ компьютерного анализа устойчивости дает пошаговую информацию по ходу решения и может применяться в режиме реального времени. Если вычисление значений $\left|\frac{1}{v_k(t_0)}\, h\sum_{\ell=0}^{i} u_k(t)+1\right|$ замедляет процесс, то можно отменить их вычисление и оценивать устойчивость по поведению $\left|\frac{v_k(t)}{v_k(t_0)}\right|$ на основе теоремы 1, правда, оценка на основе теорем 8, 9 достоверна в условиях непрерывности правой части в R_0 без требования ее дифференцируемости.

Представленные результаты следующим образом сравниваются с известными. Необходимые и достаточные условия устойчивости теоремы 1, леммы 3, теоремы 9 сохраняют отличие от условий устойчивости традиционных методов [1, 2], а также [3, 4], представляющих, как правило, достаточные условия устойчивости. В отличие от предложенных, эти методы не предоставляют возможности численного моделирования устойчивости. Подходы, опирающиеся на компьютерные технологии, в частности [5–10], а также [10, 11], аналогично не используют численные методы решения ОДУ, в то время как их применение приводит к изложенным выше условиям устойчивости и позволяет выполнять численное моделирование устойчивости по ходу решения задачи в реальном времени. Аналогичные отличия можно привести относительно теорем 10, 11, применимых к линейным системам. Дополнительно можно отметить, что, в отличие от известных подходов, условия (85)–(88) не требуют информации, каклибо связанной с характеристическим полиномом матрицы коэффициентов, а также с характеристическими показателями [1].

Заключение

Предложены необходимые и достаточные условия устойчивости в смысле Ляпунова решений ОДУ общего вида, указаны границы их применимости. Аналитические оценки устойчивости исходят непосредственно из компонентов правой части дифференциальной системы, без их преобразований, без применения функции Ляпунова. Численные оценки устойчивости опираются на приближенное решение системы ОДУ и дают возможность анализа устойчивости по ходу компьютерной реализации численного интегрирования. Дано математическое обоснование предложенных критериев, их практическое применение и достоверность иллюстрируются результатами численного эксперимента.

Список литературы

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Науку – всем, 2019. 480 с.

2. Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001. 376 с.

3. Калитин Б.С. Устойчивость неавтономных дифференциальных уравнений. Минск: БГУ, 2013. 264 с.

4. Любимов В.В. Математическая теория устойчивости с приложениями. СПб.: Лань, 2018. 180 с.

5. Масина О.Н., Дружинина О.В., Рапопорт Л.Б. Элементы теории устойчивости математических моделей управляемых систем. Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2019. 143 с.

6. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019. 500 с.

7. Дружинина О.В., Седова Н.О. Анализ устойчивости и стабилизации нелинейных каскадных систем с запаздыванием в терминах линейных матричных неравенств // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 21–35.

8. Дружинина О.В., Масина О.Н. О подходах к анализу устойчивости нелинейных динамических систем с логическими регуляторами // Современные информационные технологии и IT-образование. 2017. Т. 13. № 2. С. 40–49.

9. Новиков М.А. О вычислительных способах достаточных условий устойчивости автономных консервативных систем // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2014. № 1 (41). С. 28–36.

10. Giesl P., Hafstein S. Computation of Lyapunov functions for nonlinear discrete time systems by linear programming // J. Difference Equ. Appl. 2014. Vol. 20, Is. 4. P. 610–640.

11. Fridman E. Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems // European Journal of Control. 2014. № 20. P. 271–283.

12. Ромм Я.Е. Моделирование устойчивости по Ляпунову на основе преобразований разностных схем решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия РАН. Математическое моделирование. 2008. Т. 20. № 12. С. 105–118.

13. Ромм Я.Е. Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости на основе рекуррентных преобразований разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Кибернетика и системный анализ. 2015. Т. 51. № 3. С. 107–124.

14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. СПб.: Лань, 2018. 608 с.

15. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. СПб.: Лань, 2019. 800 с.

16. Ромм Я.Е. О границах идентификации корней полиномов на основе устойчивой адресной сортировки // Современные наукоемкие технологии. 2021. № 12 (Ч. 1). С. 84–108. DOI: 10.17513/snt.38959.

17. Ромм Я.Е. Параллельные итерационные схемы линейной алгебры с приложением к анализу устойчивости решений систем линейных дифференциальных уравнений // Кибернетика и системный анализ. 2004. № 4. С. 119–142.

18. Джанунц Г.А., Ромм Я.Е. Варьируемое кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с итерационным уточнением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 10. С. 1641–1660.

19. Ромм Я.Е., Джанунц Г.А. Моделирование движения навигационных спутников системы ГЛОНАСС на основе кусочно-интерполяционного решения задачи Коши для дифференциальной системы // Современные наукоемкие технологии. 2023. № 2. С. 88–101. DOI: 10.17513/snt.39529.