

УДК 004.052.2

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МОДИФИЦИРОВАННОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХААРА В КОНЕЧНЫХ ПОЛЯХ

Калмыков И.А., Чистоусов Н.К., Духовный Д.В.

ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет», Ставрополь,

e-mail: kia762@yandex.ru

Повышенный интерес к технологиям ортогонального частотного мультиплексирования (OFDM) обоснован тем, что их применение позволяет обеспечить высокую скорость передачи и спектральную эффективность, а также низкую межсимвольную интерференцию. Не являются исключением низкоорбитальные системы спутникового интернета (НССИ). Для повышения скорости передачи в беспроводных системах OFDM используются методы, которые увеличивают размерность QAM созвездия, уменьшают величину циклического префикса, увеличивают скорость кодирования, используют технологию МИМО. Однако вопросы сокращения времени цифровой обработки сигналов, которые реализуются с использованием быстрых преобразований Фурье (БПФ), не были широко рассмотрены. Повысить скорость обработки сигналов можно двумя способами. Во-первых, заменить БПФ на более скоростное ортогональное преобразование. В качестве такого преобразования можно взять вейвлет-преобразование (ВП) Хаара. Во-вторых, при обработке сигнала использовать табличную реализацию арифметических преобразований. Реализация целочисленных дискретных вейвлет-преобразований (ЦДВП) Хаара в конечных полях Галуа позволяет заменить операции сложения, вычитания и умножения на операцию выборки результата из LUT-таблицы. Очевидно, что интеграция данных способов позволит эффективно решить выявленную проблему – сокращение времени цифровой обработки сигналов в OFDM системе. Поэтому применение алгебраической системы конечного поля при реализации математической модели целочисленного вейвлет-преобразования Хаара является актуальной задачей.

**Ключевые слова:** технология OFDM, вейвлет-преобразование Хаара, алгебраические системы, конечные поля Галуа

## MATHEMATICAL MODEL OF THE MODIFIED INTEGER HAAR WAVELET TRANSFORM IN FINITE FIELDS

Kalmykov I.A., Chistousov N.K., Dukhovnyy D.V.

North-Caucasian Federal University, Stavropol, e-mail: kia762@yandex.ru

The increased interest in orthogonal frequency multiplexing (OFDM) technologies is justified by the fact that their application allows for high transmission speed and spectral efficiency, as well as low inter-symbol interference. Low Earth Orbit Satellite Internet Systems (LEOs) are no exception. To increase the transmission rate in wireless OFDM systems, methods are used that increase the dimension of the QAM constellation, reduce the value of the cyclic prefix, increase the coding rate, and use MIMO technology. However, the issues of reducing the time of digital signal processing, which are implemented using fast Fourier transforms (FFT), have not been widely considered. There are two ways to increase signal processing speed. First, replace the FFT with a faster orthogonal transform. As such a transformation, we can take the Haar wavelet transform (WT). Secondly, when processing the signal, use a tabular implementation of arithmetic transformations. The implementation of Haar integer discrete wavelet transforms (DIWTs) in finite Galois fields makes it possible to replace the operations of addition, subtraction, and multiplication with the operation of selecting the result from the LUT table. Obviously, the integration of these methods will effectively solve the identified problem – reducing the time of digital signal processing in an OFDM system. Therefore, the use of the finite field algebraic system in the implementation of the mathematical model of the integer Haar wavelet transform is an urgent task.

**Keywords:** OFDM technology, Haar wavelet transform, algebraic systems, finite Galois fields

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00036, <https://rscf.ru/project/23-21-00036/>.*

Проблема обеспечения доступа в любой точке Земли к информационным технологиям, которые предоставляет информационно-коммуникационная сеть Интернет, еще далека от своего решения. Поэтому в последнее десятилетие было предложено несколько глобальных проектов построения спутникового интернета [1]. Так как часть абонентов располагается за полярным кругом, то спутниковый интернет должен использовать низкоорбитальные космические аппараты (КА). В настоящее время

была развернута низкоорбитальная система спутникового интернета (НССИ) StarLink. Для организации эффективной беспроводной связи, в том числе в районах Крайнего Севера, на орбиту было выведено более 2000 низкоорбитальных космических аппаратов [2, 3]. Чтобы обеспечить минимальную себестоимость развертывания беспроводной системы связи, а также высокую скорость обмена данными в системе StarLink, было решено использовать методы ортогонального частотного мультиплекси-

рования (OFDM). Выбор данной технологии объясняется основными достоинствами, которыми она обладает. К ним, как правило, относят [4, 5]: высокий уровень спектральной эффективности; эффективную работу в условиях многолучевости; низкую межсимвольную интерференцию. Анализ становления технологии OFDM показывает, что основным драйвером ее развития является обеспечение более высокой скорости передачи информации. Для достижения данной цели разработчики предлагают уменьшить размер циклического префикса и корректирующие способности кода, увеличить разрядность QAM-модулятора, использовать метод МИМО. При этом вопросы снижения времени на цифровую обработку сигналов за счет замены быстрых ДПФ (БПФ) на целочисленные дискретные вейвлет-преобразования (ЦДВП), например ЦДВП Хаара, не были рассмотрены. При этом существует возможность повышения скорости вычислений ЦВП с целочисленных алгебраических систем – конечных полей Галуа. Поэтому применение алгебраической системы конечного поля при реализации математической модели ЦДВП Хаара является актуальной задачей.

В основе быстрых алгоритмов ДПФ лежит базовое преобразование «бабочка». Для ее выполнения спецпроцессору БПФ необходимо выполнить четыре операции умножения действительных и мнимых частей сигнала, а также шесть операций сложения. Переход к ЦВП Хаара позволяет уменьшить время на выполнение цифрового преобразования сигнала из частотной области во временную и обратно. Переход к более высокой производительности спецпроцессора ЦВП Хаара можно обеспечить за счет применения конечных полей Галуа. В этом случае операции сложения, вычитания и умножения можно заменить процедурами выборки результатов этих операций из LUT-таблиц. Цель исследований – уменьшить временные затраты на цифровую обработку сигналов в системах OFDM за счет использования математической модели модифицированного целочисленного вейвлет-преобразования Хаара, реализованного в конечном поле Галуа.

#### Материалы и методы исследования

Вейвлет-преобразования (ВП) широко применяются в областях, связанных с обработкой и анализом нестационарных сигналов [6–8]. Это вызвано тем, что полученные результаты обработки показывают

не только распределение энергии сигнала по частотной области, но и связывают это с временным масштабом. В результате этого можно однозначно определить поведение определенных частотных составляющих сигнала. Отличительной особенностью ВП от ДПФ является то, что они генерируют двумерную развертку сигнала по времени и частоте, что позволяет проводить исследование сигнала сразу в двух измерениях. В этом случае при анализе сигнала строится ряд функций, являющихся базисом ВП с использованием операторов временного сдвига  $b$  и масштаба времени  $a$ ,

$$\psi_{ab} = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right). \quad (1)$$

Данный ряд функций вычисляется с помощью первичного вейвлета  $\psi(t)$ , который считается материнским. Используя эти вейвлет-функции  $\psi_{ab}(t)$ , можно получить вейвлет-образ сигнала  $s(t)$  с помощью выполнения интегрального ВП:

$$S_{\psi}(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \psi_{ab} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) dt. \quad (2)$$

Идея вычисления интегрального ВП сигнала  $s(t)$  базируется на его разложении на масштабированные значения МВ, которые при этом будут сдвинуты во временной области. Для обратного восстановления сигнала с помощью его вейвлет-образов  $S_{\psi}(a, b)$  необходимо воспользоваться нормализующим коэффициентом

$$C_{\psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega. \quad (3)$$

Тогда обратное ВП имеет вид

$$s(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\psi}(a, b) \psi_{ab}(t) \frac{dad b}{a^2}. \quad (4)$$

Очевидно, что скорость выполнения дискретного ВП зависит от количества коэффициентов, используемых в ВП. Наименьшее количество коэффициентов имеет вейвлет-преобразование Хаара [8]. В этом случае значения базисных функций Хаара  $h_k(m)$  определяются на  $m \in [0, 1]$ . Если  $k = 0$ , то имеем

$$h_0(m) = h_{00}(m) = \left( \sqrt{N} \right)^{-1}. \quad (5)$$

Для получения остальных базисных функций Хаара применяется равенство

$$h_k(m) = h_{ws}(z) = \frac{2^{\frac{w}{2}}}{\sqrt{N}} \begin{cases} 1 & \text{при } \frac{s-1}{2^w} \leq m < \frac{s-0,5}{2^w} \\ -1 & \text{при } \frac{s-0,5}{2^w} \leq m < \frac{s}{2^w} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}, \quad (6)$$

где  $w, s$  – индексы, которые задаются  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1; N = 2^L; m \in [0,1]$ .

С помощью преобразования Хаара одномерный сигнал  $S = \{s(1), s(2), \dots, s(n)\}$ , имеющий  $n$  отсчетов, можно представить двумя наборами коэффициентами. Первыми коэффициентами является аппроксимирующие  $a^1 = (a_1, a_2, \dots, a_{n/2})$ , которые определяются

$$a_j = \frac{s(2j-1) + s(2j)}{\sqrt{2}}, \quad (7)$$

где  $j = 1, 2, \dots, n/2$ .

Вторыми являются детализирующие коэффициенты  $d^1 = (d_1, d_2, \dots, d_{n/2})$ , вида

$$d_j = \frac{s(2j-1) - s(2j)}{\sqrt{2}}, \quad (8)$$

где  $j = 1, 2, \dots, n/2$ .

Данное преобразование можно представить в виде базовой матрицы для обработки двух отсчетов

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Как показано в [8], аппаратная реализация ДВП Хаара представляет собой набор двух цифровых фильтров. Первый фильтр будет низкочастотным. Его коэффициентами являются  $h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Второй фильтр является высокочастотным. Его коэффициентами фильтрации являются  $g_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Используя базовую матрицу коэффициентов разложения (9), получаем модифицированное целочисленное преобразование Хаара. В этом случае матрица прямого преобразования имеет вид (10):

$$H_8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

В результате данной модификации получается разложение входного сигнала, состоящего из восьми отсчетов на две части. Первая часть – это аппроксимирующие коэффициенты входного сигнала. Вторая часть – детализирующие коэффициенты входного сигнала. Тогда, используя дискретное вейвлет-преобразование Хаара (DWTН), получаем разложение сигнала  $S = \{s(1), s(2), \dots, s(8)\}$

$$DWTН(S) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, d_1, d_2, d_3, d_4\}. \quad (11)$$

Анализ базовой матрицы (9), на основе которой реализуется ДВП, показывает, что коэффициенты Хаара – это иррациональные числа. В результате этого при обработке сигналов в системе OFDM с помощью ДВП Хаара, во-первых, не будут обеспечены минимальные временные затраты на реализацию данной процедуры. Во-вторых, в процессе вычислений будет происходить накопление ошибок округления. Устра-

нить данные недостатки можно за счет использования целочисленных дискретных вейвлет-преобразований (ЦДВП) Хаара, реализованных в конечном поле Галуа. Реализация ЦДВП в  $GF(p)$  позволит заменить выполнение операций сложения, вычитания и умножения операций выборки из LUT-таблиц результатов. В результате будет сокращено время на ортогональное преобразование сигнала, что повысит скорость передачи информации.

Для реализации вычислений ЦДВП Хаара в поле  $GF(p)$  необходимо выполнить операцию масштабирования коэффициентов Хаара. Для этого используется коэффициент масштабирования  $D = 2^n$ , где  $n = 1, 2, \dots$ . В результате получаем целочисленные коэффициенты низкочастотные

$$h_0^* = \lfloor Dh_0 \rfloor \bmod p, h_1^* = \lfloor Dh_1 \rfloor \bmod p.$$

Для высокочастотных коэффициентов Хаара имеем

$$g_0^* = p - \lfloor Dg_0 \rfloor \bmod p, g_1^* = \lfloor Dg_1 \rfloor \bmod p,$$

которые становятся элементами поля Галуа. В этом случае матрица (9) будет иметь вид

$$H_8 = \begin{bmatrix} h_0^* & h_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_0^* & g_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0^* & h_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0^* & g_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0^* & h_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_0^* & g_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0^* & h_1^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_0^* & g_1^* \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Так как среди коэффициентов Хаара есть отрицательные числа, то они будут располагаться во второй части диапазона от  $p/2$  до  $p - 1$ . В этом случае отрицательное число  $-S$  будет представляться в виде  $-S \bmod p = p - S$ .

### Результаты исследования и их обсуждение

Проведем сравнительный анализ модифицированного целочисленного вейвлет-преобразования Хаара, реализованного в конечных полях Галуа с БПФ. Исходные данные сигнала OFDM, используемого в НССИ [3]: размер созвездия – 64 QAM; размерность – 52 поднесущие; разрядность входного сигнала и коэффициентов Хаара – 8 бит; коэффициент масштабирования

$D = 256$ . В качестве характеристики поля Галуа выбираем простое число, которое удовлетворяет условию  $p > 2^{17}$ . Выбираем простое число  $p = 131101$ . Тогда целочисленные коэффициенты Хаара будут иметь вид

$$h_0^* = h_1^* = \left\lfloor 256 \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rfloor \bmod p = 181,$$

$$g_0^* = p - \lfloor Dg_0 \rfloor \bmod p = 130920, g_1^* = 181.$$

Сравнительный анализ будем производить с 64-точечным БПФ. Данное преобразование реализуется за шесть итераций. На каждой итерации выполняется базовая процедура БПФ «бабочка». Рассмотрим реализацию целочисленного ДВП Хаара в конечном поле  $GF(131101)$ . Пусть входной вектор  $S$  состоит из 16 отсчетов, представленных во втором столбце таблицы. В третьем столбце таблицы показаны  $|DWTH(S)|_p^+$  – результаты выполнения целочисленного ДВП Хаара в поле  $GF(p)$ . Четвертый столбец – масштабирование результатов с учетом  $D = 256$ . В пятом столбце показаны  $WTH(S)$  – результаты выполнения ДВП Хаара. В шестом столбце показаны  $(|DWTH(S)|_p^+)^{-1}$  – результаты выполнения обратного преобразования Хаара в поле  $GF(p)$ . Седьмой столбец таблицы  $(|DWTH(S)|_p^+)^{-1} / D$  – масштабирование результатов обратного преобразования с учетом  $D = 256$ . В восьмом столбце таблицы показаны  $(WTH)^{-1}$  – результаты выполнения обратного ДВП Хаара.

Анализ таблицы показывает, что результаты выполнения ДВП в различных алгебраических системах позволяют получить одинаковые результаты. В этом случае результаты масштабирования  $(|DWTH(S)|_p^+)^{-1} / D$  необходимо в сторону большего целого числа.

Чтобы оценить эффективность предложенной модификации ДВП Хаара в полк  $GF(p)$ , было проведено RTL моделирование. Данное моделирование осуществлялось на ПЛИС Kintex UltraScalexcku025-ffva1156-1 с использованием Xilinx Vivado-HLS 2018. Временные затраты на выполнение модифицированного ЦДВП Хаара в  $GF(p)$  при ортогональной обработке сигнала составили с учетом умножения на отрицательный коэффициент и операции обратного масштабирования составили 310 нс. При этом на реализацию БПФ потребовалось 468 нс.

Реализация ДВП Хаара в алгебраических системах

n	S(n)	$ DWT H(S) _p^+$	$\frac{ DWT H(S) _p^+}{D}$	WTH	$( DWT H(S) _p^+)^{-1}$	$\frac{( DWT H(S) _p^+)^{-1}}{D}$	$(WTH)^{-1}$
0	32	15928	62,21875	62,22539674	8190	31,99316	32
1	56	4344	16,96875	16,97056275	14333	55,98804	56
2	27	25702	100,3984	100,4091629	6911	26,99423	27
3	115	15928	62,21875	62,22539674	29434	114,9754	115
4	12	5249	20,50391	20,50609665	3072	11,99744	12
5	17	905	3,535156	3,535533906	4351	16,99637	17
6	27	10498	41,00781	41,01219331	6911	26,99423	27
7	31	724	2,828125	2,828427125	7935	30,99338	31
8	5	4163	16,26172	16,26345597	1280	4,998932	5
9	18	2353	9,191406	9,192388155	4608	17,99615	18
10	14	24254	94,74219	94,75230868	3584	13,99701	14
11	120	19186	74,94531	74,95331881	30714	119,9744	120
12	34	13032	50,90625	50,91168825	8703	33,99274	34
13	38	724	2,828125	2,828427125	9726	37,99188	38
14	9	3620	14,14063	14,14213562	2304	8,998077	9
15	11	362	1,414063	1,414213562	2816	10,99765	11

Таким образом, использование разработанной математической модели модифицированного ЦДВП Хаара в поле Галуа позволило сократить временные затраты на обработку сигнала в 1,51 раза, что обеспечит повышение скорости передачи сигналов в системах OFDM, используемых в НССИ.

**Заключение**

В статье рассмотрен один из подходов, позволяющий повысить скорость передачи информации в системах OFDM. Данный подход основан на замене БПФ на модифицированное ЦДВП Хаара в GF(p) при выполнении ортогональных преобразований сигналов. Проведенное моделирование с использованием ПЛИС Kintex UltraScalexsku025 – ffva1156 – 1 с использованием Xilinx Vivado-HLS 2018. Временные затраты на выполнение модифицированного ЦДВП Хаара в GF(p) при ортогональной обработке сигнала составили с учетом умножения на отрицательный коэффициент и операции обратного масштабирования составили 310 нс. При этом на реализацию БПФ потребовалось 468 нс. Таким образом, использование разработанной математической модели модифицированного ЦДВП Хаара в поле Галуа позволило сократить временные затраты на обработку сигнала

в 1,51 раза, что обеспечит повышение скорости передачи сигналов в системах OFDM, используемых в НССИ. Поставленная в статье цель достигнута.

**Список литературы**

1. Michael Sheetz In race to provide internet from space, companies ask FCC for about 38,000 new broadband satellites. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.cnbc.com/2021/11/05/space-companies-ask-fcc-to-approve-38000-broadband-satellites.html> (дата обращения: 02.04.2023).
2. McDowell J.C. The Low Earth Orbit Satellite Population and Impacts of the SpaceX Starlink Constellation// The Astrophysical Journal Letters. 2020. Vol. 892. P. 10–15. DOI: 10.3847/2041-8213/ab8016.
3. Пехтерев С.В., Макаренко С.И., Ковальский А.А. Описательная модель системы спутниковой связи Starlink // Системы управления, связи и безопасности (Systems of Control, Communication and Security). 2022. № 4. С. 190–255. URL: <http://scs.intelgr.com/archive/2022-04/07-Pehterev.pdf> (дата обращения: 02.04.2023). DOI: 10.24412/2410-9916-2022-4-190-255.
4. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шумов А.П. Технология OFDM. Учебное пособие для вузов. М.: Горячая линия – Телеком, 2017. 352 с.
5. Qasim Chaudhari A. Beginner’s Guide to OFDM. [Электронный ресурс]. URL: <https://wirelesspi.com/a-beginners-guide-to-ofdm/> (дата обращения: 02.04.2023).
6. Hans-Georg Stark Wavelets and signal processing // Springer International Publishing Switzerland. 2019. 254 p.
7. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. 3-е изд., доп. М.: Техносфера, 2012. 427 с.
8. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Горячая линия – Телеком, 2015. 671 с.