

УДК 519.87:004.052.2

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕАЛИЗАЦИИ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДОБЕШИ В ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОЛЯХ ГАЛУА

Калмыков И.А., Чистоусов Н.К., Калмыков М.И., Духовный Д.В., Юрданов Д.В.
ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет», Ставрополь, e-mail: kia762@yandex.ru

Для обеспечения широкополосного доступа в низкоорбитальных системах спутникового интернета (НССИ) предлагается использовать технологию OFDM. Выбор данной технологии беспроводной передачи обусловлен тем, что применение метода ортогонального частотного мультиплексирования позволяет обеспечить высокоскоростную передачу данных в каналах с многолучевым распространением и замиранием сигналов. Это достигается за счет использования быстрого преобразования Фурье (БПФ). Дальнейшее увеличение скорости передачи информации в системах OFDM возможно за счет применения дискретного вейвлет-преобразования (ДВП) вместо БПФ при цифровой обработке сигналов (ЦОС). В этом случае сигнал OFDM будет иметь более низкий уровень боковых лепестков. А это позволит более эффективно использовать радиочастотный спектр, применяя технологию MIMO. Кроме того, применение целочисленного ДВП (ЦДВП) Добеши в GF(M) способствует увеличению скорости преобразования сигналов за счет замены арифметических операций умножения, сложения и вычитания на операции выборки результатов вычисления из LUT-таблиц. Поэтому разработка математических моделей реализации ЦДВП Добеши в полях Галуа, использование которых уменьшит временные затраты на обработку сигналов и увеличит скорость передачи информации в системах НССИ, можно отнести к актуальным задачам.

Ключевые слова: системы с ортогональным частотным мультиплексированием, дискретные вейвлет-преобразования, ортогональное преобразование сигналов, конечные поля Галуа

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00036, <https://rscf.ru/project/23-21-00036/>.

MATHEMATICAL MODELS FOR THE IMPLEMENTATION OF THE DOBESHI WAVELET TRANSFORM IN INTEGER GALOIS FIELDS

Kalmykov I.A., Chistousov N.K., Kalmykov M.I., Dukhovnyy D.V., Yurdanov D.V.
North-Caucasian Federal University, Stavropol, e-mail: kia762@yandex.ru

To provide broadband access in low-earth satellite Internet systems (LEISIS), it is proposed to use OFDM technology. The choice of this wireless transmission technology is due to the fact that the use of the orthogonal frequency multiplexing method makes it possible to provide high-speed data transmission in channels with multipath propagation and signal fading. This is achieved by using the Fast Fourier Transform (FFT). To increase the signal transmission rate in OFDM systems, it is proposed to perform orthogonal signal transformations based on the Daubechies discrete wavelet transform (DWT) implemented in finite Galois fields GF(M). In this case, the OFDM signal will have a lower level of side lobes. And this will allow more efficient use of the radio frequency spectrum, using MIMO technology. In addition, the use of the Daubechies integer DWT makes it possible to increase the signal processing speed by replacing the arithmetic operations of multiplication, addition, and subtraction with the operations of retrieving calculation results from LUT tables. Therefore, the development of mathematical models for the implementation of Daubechies DWT in Galois fields, the use of which will reduce the time spent on signal processing and increase the speed of information transmission in NSSI systems, can be attributed to urgent tasks.

Keywords: systems with orthogonal frequency multiplexing, discrete wavelet transforms, orthogonal transformation of signals, finite Galois fields

Построение современного общества невозможно представить без использования информационных технологий (ИТ). Особое место среди ИТ занимает информационно-коммуникационная сеть Интернет. Поэтому в настоящее время государством решается проблема предоставления ресурсов интернета всем гражданам нашей страны. Решить данную проблему возможно за счет создания низкоорбитальных систем спутникового интернета (НССИ). В настоящее время функционирует такая система – StarLink, группировка которой содержит более 2000 спутников [1, 2]. Для обеспечения широкополосного доступа в интернет в беспроводных системах широко исполь-

зуется технология OFDM. Основные достоинства данной технологии определяются благодаря алгоритмам быстрого преобразования Фурье (БПФ) и обратного БПФ [3]. Для повышения спектральной эффективности систем OFDM в работах [4, 5] предлагается вместо БПФ использовать дискретные вейвлет-преобразования (ДВП). Однако коэффициенты ДВП представляют собой иррациональные числа, что приводит к накоплению ошибок округления. Устранить данные недостатки можно за счет использования целочисленных дискретных вейвлет-преобразований (ЦДВП), реализуемых в полях Галуа. При этом применение табличной реализации арифметических опе-

раций в ЦДВП позволит повысить скорость ортогональных преобразований сигналов в системах, использующих технологию OFDM. Поэтому создание математических моделей ЦДВП Добеши в полях Галуа, использование которых позволит снизить временные затраты на цифровую обработку сигналов и увеличить скорость передачи информации в системах НССИ, можно отнести к актуальным задачам.

Использование БПФ и ОБПФ позволяет увеличить спектральную эффективность беспроводных систем OFDM. Однако данные ортогональные преобразования сигналов имеют относительно большой уровень боковых лепестков спектра OFDM сигнала. Замена процедур БПФ и ОБПФ на целочисленные дискретные вейвлет-преобразования (ЦДВП), выполняемые в поле Галуа, позволит уменьшить уровень боковых лепестков, а также повысить скорость обработки сигналов за счет использования LUT-таблиц при вычислениях. Цель статьи – увеличение скорости цифровой обработки сигналов в системах OFDM за счет применения разработанных матмоделей ЦДВП, которые реализуются в полях Галуа.

Материалы и методы исследования

Предложение о замене ортогональных преобразований сигналов в системах OFDM основано на том, что вейвлет-преобразования (ВП) исходного сигнала $S(x)$ во многом соответствуют преобразованию Фурье, использующему оконную функцию $w(x - a)$ [6, 7]. При этом ВП, используя базисную функцию $\psi_{(a,b)}(x)$, определяется следующим равенством:

$$F(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x) \psi_{(a,b)}^*(x) dx. \quad (1)$$

В системах OFDM вместо БПФ и ОБПФ предлагается использовать ДВП, которые позволяют снизить искажения сигнала $S(x)$ при выполнении обратного преобразования, а также уменьшить избыточность, которая присуща ВП [8, 9]. Тогда входной сигнал можно представить в виде суммы двух функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Первая функция является масштабирующей, а вторая – вейвлет-функцией. При этом используются соответствующие коэффициенты. При масштабирующей функции $\varphi(x)$ применяются коэффициенты приближения $a_{j_0}(k)$, при функции $\psi(x)$ – вейвлет-коэффициенты $d_j(k)$. Тогда имеем

$$S(x) = \sum_k a_{j_0}(k) \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{+\infty} \sum_k d_j(k) \psi_{j,k}(x). \quad (2)$$

В этом случае коэффициенты имеют вид

$$a_{j_0}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x S(x) \varphi_{j_0,k}(x), \quad d_j(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x S(x) \psi_{j,k}(x), \quad (3)$$

где N – число отсчетов $S(x)$; $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Известно, что ДВП успешно используются в кратномасштабных анализах сигналов, что показано в [6–8]. Это связано с тем, что ДВП локализованы как во временной, так и в частотной областях. Именно данное свойство послужило отправной точкой применения ДВП в системах OFDM. Однако, несмотря на данные достоинства, ДВП не позволяют достичь предельно возможного уровня скорости передачи информации. Это связано с тем, что коэффициенты ДВП представляют собой иррациональные числа. Из-за этого увеличивается время на реализацию операций умножения, а также происходит накопление ошибок округления. Одним

из перспективных подходов, позволяющим устранить данный недостаток, является переход к целочисленным дискретным вейвлет-преобразованиям, реализуемым в полях Галуа. Данные ЦДВП, обладая свойствами ДВП, могут обеспечить повышение скорости обработки сигналов за счет использования табличной организации вычислений. В этом случае операции сложения, вычитания и умножения отсчетов входного сигнала на коэффициенты ЦДВП заменяются операциями выборки из LUT-таблиц. Для целочисленных дискретных вейвлет-преобразований, выполняемых в поле Галуа GF(M), базисные функции будут определяться

$$\psi_{(a,b)}(x) \bmod M = \left(\left| \frac{1}{\sqrt{a}} \right|_M^+ \left| \psi \left(\frac{x-b}{a} \right) \right|_M^+ \right) \bmod M. \quad (4)$$

где $\psi(x)$ – вейвлет-функция.

Для восстановления входного сигнала $S(x)$ необходимо выполнить обратное ЦДВП. В этом случае реализуется выражение

$$S(x) \bmod M = \left\| \sum_k a_{m,k} \varphi_{m,k}(x) \right\|_M^+ + \left\| \sum_{m=1}^L \sum_k d_{m,k} \psi_{m,k}(x) \right\|_M^+ \quad (5)$$

где L – высший уровень разложения ЦДВП.

В настоящее время широкое распространение получили ДВП Добеши [7–9]. Такой выбор определяется свойствами данного ДВП. Во-первых, ДВП Добеши присуще свойство гладкости. Во-вторых, данное ДВП имеет компактный носитель, обладающий свойством ортогональности. В-третьих, ДВП Добеши использует две функции – масштабирующую и вейвлет-функцию. Поэтому вычисление ДВП Добеши может быть организовано с банка фильтров, используя быстрый алгоритм вычисления ДВП. Рассмотрим выполнение ДВП Добеши-4 в $GF(M)$. Известно, что данное преобразование использует коэффициенты вида

$$\left\{ c_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, c_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, c_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, c_4 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right\}. \quad (6)$$

Для реализации ДВП в конечном поле умножим данные числа на коэффициент масштабирования B и возьмем целую часть результата. Это позволяет представить коэффициенты Добеши в виде элементов поля $GF(M)$. При реализации ЦДВП Добеши-4 в $GF(M)$ при поступлении вектора, состоящего из восьми отсчетов, получаем следующие аппроксимирующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} S(0) &= a_1^* = (s(0)c_1^* + s(1)c_2^* + s(2)c_3^* + s(3)c_4^*) \bmod M, \\ S(2) &= a_2^* = (s(2)c_1^* + s(3)c_2^* + s(4)c_3^* + s(5)c_4^*) \bmod M, \\ S(4) &= a_3^* = (s(4)c_1^* + s(5)c_2^* + s(6)c_3^* + s(7)c_4^*) \bmod M, \\ S(6) &= a_4^* = (s(0)c_3^* + s(1)c_4^* + s(6)c_1^* + s(7)c_2^*) \bmod M, \end{aligned} \quad (7)$$

где $c_i^* = \lfloor Bc_i \rfloor \bmod M$, где B – коэффициент масштабирования; $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда детализирующие коэффициенты ДВП Добеши-4 в конечном поле

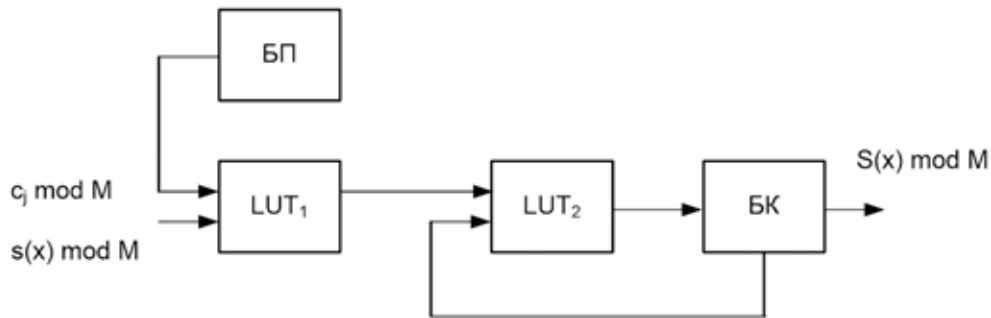
$$\begin{aligned} S(1) &= d_1^* = (s(0)c_4^* - s(1)c_3^* + s(2)c_3^* - s(3)c_4^*) \bmod M, \\ S(3) &= d_2^* = (s(2)c_4^* - s(3)c_3^* + s(4)c_3^* - s(5)c_4^*) \bmod M, \\ S(5) &= d_3^* = (s(4)c_4^* - s(5)c_3^* + s(6)c_3^* - s(7)c_4^*) \bmod M, \\ S(7) &= d_4^* = (s(0)c_2^* - s(1)c_1^* + s(6)c_4^* - s(7)c_3^*) \bmod M. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как часть коэффициентов Добеши-4 представляет собой отрицательные числа, то предлагается весь диапазон элементов поля Галуа $GF(M)$ разделить. Первый диапазон располагается от нуля до $(M+1)/2$. В данном диапазоне размещаются положительные числа. Второй диапазон поля Галуа предназначен для записи отрицательных результатов.

Анализ работ [6–9] показывает, что при вычислении ДВП используются банки фильтров, представляющих собой набор НЧ и ВЧ фильтров, импульсная характеристика определяется коэффициентами ДВП. Одна-

ко данный метод вычисления ДВП имеет существенный недостаток – относительно низкую скорость получения аппроксимирующих и детализирующих коэффициентов. Это связано с необходимостью проведения децимации сигналов. Устранить данный недостаток позволяет структурная модель базовой операции ДВП Добеши в $GF(M)$, которая показана на рисунке.

Так как в качестве входных отсчетов и коэффициентов Добеши используются элементы поля Галуа, то для выполнения арифметических операций умножения, сложения и вычитания использовать LUT-таблицы.



Структурная модель базовой операции ДВП Добеши в $GF(M)$

Первая LUT-таблица предназначена для выполнения операции умножения входного отсчета $s(x)$ на соответствующий коэффициент ДВП в поле

$$c_i^* = \lfloor Bc_i \rfloor \bmod M,$$

где B – коэффициент масштабирования; $i = 1, 2, 3, 4$.

Коэффициенты для всех умножителей хранятся в блоке памяти (БП). Вторая LUT-таблица предназначена для выполнения операции сложения по модулю M . При этом используется блок коммутации (БК). Данное устройство работает в течение L тактов, где L – порядок ДВП Добеши.

Результаты исследования и их обсуждение

Для оценки эффективности применения разработанных моделей ДВП Добеши в полях Галуа был произведен сравнительный анализ с БПФ. В работе [10] показано, что в системе спутникового интернета StarLink применяются сигналы OFDM, поддерживающие 64 QAM. В системе OFDM применяется 64 QAM. Значит, размерность входного сигнала $s(x)$, поступающего на вход модуляторов, составляет 8 бит. Пусть сигнал OFDM имеет общее число поднесущих, равное 52, из которых 48 поднесущих используется для передачи данных. В этом случае для генерации сигнала необходимо использовать 64-точечное БПФ. Тогда для вычисления БПФ необходимо выполнить 6 итераций базовой операции «бабочка». При этом каждая такая операция требует умножения двух комплексных чисел, а также их сложения и вычитания. В этом случае для реализации базовой операции «бабочка» необходимо выполнить 4 операции умножения и 6 операций сложения.

Рассмотрим выполнение ДВП Добеши-4 с использованием 8-разрядных входных данных. Представим коэффициенты ДВП в виде целых чисел. Для этого вос-

пользуемся коэффициентом масштабирования $B = 256$. В результате получаем следующие коэффициенты, представленные в двоичном коде.

Таблица 1

Коэффициенты ДВП Добеши-4

Коэффициенты Добеши-4	$B = 256$	Двоичный код
$c_1 = 0,683027$	174	0010101110
$c_2 = 1,1830127$	302	0100101110
$c_3 = 0,3169873$	81	0001010001
$c_4 = -0,1830127$	-46	1111010001

Пусть на вход поступают первые четыре отсчета $s(x) = \{176, 52, 12, 23, \dots\}$. Найдем для данных отсчетов аппроксимирующий коэффициент

$$a_1 = s(0)c_1 + s(1)c_2 + s(2)c_3 + s(3)c_4 = 46242.$$

В этом случае детализирующий коэффициент будет равен

$$d_1 = s(0)c_4 - s(1)c_3 + s(2)c_3 - s(3)c_4 = -12686.$$

После полученный результат можно сдвинуть вправо на восемь разрядов. В результате имеем значения аппроксимирующего и детализирующих коэффициентов, если бы вычисления происходили в позиционной системе счисления.

Рассмотрим выполнение ДВП Добеши-4, представленное в поле Галуа. В качестве характеристики поля Галуа выбираем простое число $M = 262147$. Данное значение числа выбрано из условия, что положительные результаты не должны превысить первый диапазон элементов поля, который размещается от 0 до 131073. При этом отрицательные результаты должны находиться во втором диапазоне. В табл. 2 представлены значения коэффициентов Добеши-4, приведенные в поле $GF(262147)$.

Таблица 2

Коэффициенты ДВП Добеши-4
в поле $GF(262147)$

Коэффициенты Добеши-4	$B = 256$	Коэффициенты Добеши-4 в поле $GF(262147)$.
$c_1 = 0,683027$	174	$c_1^* = 174$
$c_2 = 1,1830127$	302	$c_2^* = 302$
$c_3 = 0,3169873$	81	$c_3^* = 81$
$c_4 = -0,1830127$	-46	$c_4^* = 262101$

Найдем для исходных четырех отсчетов аппроксимирующий коэффициент.

$$a_1 = (s(0)c_1^* + s(1)c_2^* + s(2)c_3^* + s(3)c_4^*) \bmod M = |46242|_{262147}^+ = 46242.$$

Так как $a_1 < M/2$, то результат считается положительным. Тогда детализирующий коэффициент в $GF(262147)$ будет равен

$$d_1 = (s(0)c_4^* - s(1)c_3^* + s(2)c_2^* - s(3)c_1^*) \bmod M = 249461.$$

Так как $d_1 > M/2$, то коэффициент является числом отрицательным. Получаем, что

$$d_1 = 249461 - 262147 = -12686.$$

Таблица 3

Временные затраты на ортогональные преобразования сигналов

Разработанные математические модели			Операция «бабочка»	БПФ
Добеши-4	Добеши-6	Добеши-8		
240 нс	360 нс	480 нс	84 нс	468 нс

Результаты, полученные в позиционной системе счисления и в конечном поле Галуа совпали. Для проведения сравнительной оценки временных затрат на выполнение ортогонального преобразования сигналов с использованием БПФ и ДВП в конечных полях использовался метод RTL – моделирования работы ПЛИС. В качестве ПЛИС выбрана Kintex UltraScale xcku025-ffva1156-1. Программирование и исследование проводилось с помощью САПР Xilinx Vivado-HLS 2018. Результаты исследований представлены в табл. 3.

Полученные данные показывают, что использование разработанных математических моделей выполнения ДВП Добеши в конечном поле Галуа позволяет сократить время выполнения ортогонального преобразования сигналов. Так, при применении разработанной математической модели ДВП Добеши-6 время выполнения ортогонального преобразования сигналов сократилось по сравнению со временем реализации БПФ в 1,3 раза. А при использовании

модели ДВП Добеши-4 временные затраты уменьшились в 1,95 раза. Таким образом, применение разработанных моделей ДВП Добеши в конечных полях приведет к сокращению временных затрат на генерацию сигнала OFDM. А это в свою очередь приведет к повышению скорости передачи информации в низкоорбитальных системах спутникового интернета.

Заключение

Для повышения скорости передачи информации в НССИ было предложено сократить временные затраты на генерацию сигнала OFDM за счет изменения вида ортогональных преобразований сигналов. В статье приведены математические модели выполнения ЦДВП Добеши в полях Галуа, применение которых позволяет сократить время выполнения ортогонального преобразования сигналов по сравнению с БПФ. Результаты исследования показали, что при применении математической модели ЦДВП Добеши 6 время выполнения

ортогонального преобразования сигналов сократилось по сравнению со временем реализации БПФ в 1,3 раза. А при использовании модели ДВП Добеши 4 – в 1,95 раза. Таким образом, очевидно, что использование разработанных моделей ДВП Добеши в конечных полях уменьшает временные затраты на генерацию сигнала OFDM, что способствует повышению скорости передачи информации в НССИ.

Список литературы

1. McDowell J.C. The Low Earth Orbit Satellite Population and Impacts of the SpaceX Starlink Constellation. *The Astrophysical Journal Letters*. 2020. Vol. 892. P. 10–15. DOI: 10.3847/2041-8213/ab8016.
2. Dang T., Li X., Luo B. Unveiling the Space Weather During the Starlink Satellites Destruction Event on 4 February 2022. *Space Weather*. 2022. Vol. 20. Is. 8. DOI: 10.1029/2022SW003152.
3. Hans-Georg Stark *Wavelets and signal processing*. Springer International Publishing Switzerland. 2019. 254 p.
4. Enggar Fransiska D.W. Design and Performance Investigation of Discrete Wavelet Transform (DWT) Based OFDM Using 4-PAM for Indoor VLC System. 7th International Conference on Information and Communication Technology (ICoICT). 2019. DOI: 10.1109/ICoICT.2019.8835217.
5. Chafii M., Harbi Y.J., Burr A.G. Wavelet-OFDM vs. OFDM: Performance Comparison. 23rd International Conference on Telecommunications (ICT) 2016. DOI: 10.1109/ICT.2016.750046.
6. Шоберг А.Г. Современные методы обработки изображений: модифицированное вейвлет-преобразование. Хабаровск: Издательство Тихоокеанского государственного университета, 2014. 125 с.
7. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. 3-е изд., доп. М.: Техносфера, 2012. 427 с.
8. Петров Г.А., Шуранов Е.В. Практика использования вейвлет-анализа в дефектоскопии: учебное пособие. СПб.: Балтийский государственный технический университет, 2019. 123 с.
9. Mohamed H.M. A review of the transformation techniques in the OFDM system. *Journal of Engineering Science and Technology*. 2021. Vol. 16. No. 1. P. 176–193.
10. Пехтерев С.В., Макаренко С.И., Ковальский А.А. Описательная модель системы спутниковой связи Starlink // Системы управления, связи и безопасности (Systems of Control, Communication and Security). 2022. № 4. С. 190–255. DOI: 10.24412/2410-9916-2022-4-190-255.