УДК 519.63

НЕСТАНДАРТНЫЕ ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

Болотнов А.М., Купцова А.Ф.

ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», Уфа, e-mail: BolotnovAM@mail.ru

Авторами предложены правила вычисления средних значений интервальных арифметических операций. Такой подход позволяет получать усредненные интервальные оценки для решения прикладных задач. По сравнению с классической интервальной арифметикой результаты, полученные на основе усредненных операций, имеют меньшую ширину. Алгоритм реализован на языке программирования С++ и протестирован для различных комбинаций взаимного положения двух интервалов относительно нуля. Предлагаемый подход допускает операцию деления на интервалы, содержащие ноль. Приведен пример решения двумерной краевой задачи для потенциала электрического тока в электрохимической системе с интервальными неопределенностями входных параметров. Задача с интервальными коэффициентами решается методом граничных элементов. Решение интегрального уравнения сводится к системе линейных алгебраических уравнений с интервальными коэффициентами методом конечных сумм. Интервальная система уравнений решается методом Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцам. Результаты численного решения получены для размерности системы уравнений от 200 до 1600. Представлены графики распределения интервальных функций потенциала и плотности электрического тока по границам области интегрирования. Проведен сравнительный анализ полученных результатов на основе классических, внутренних и усредненных интервальных операций.

Ключевые слова: интервальные вычисления, нестандартные интервальные операции, краевая задача, неопределенность входных параметров, усредненные значения интервальных операций

NON-STANDARD INTERVAL OPERATIONS IN SOLVING APPLIED PROBLEMS

Bolotnov A.M., Kuptsova A.F.

Ufa University of Science and Technology, Ufa, e-mail: BolotnovAM@mail.ru

The authors propose rules for calculating average values of interval arithmetic operations. This approach makes it possible to obtain averaged interval estimates for solving applied problems. Compared to classical interval arithmetic, the results obtained on the basis of averaged operations have a smaller width. The algorithm is implemented in the C++ programming language and tested for various combinations of the relative position of two intervals relative to zero. The proposed approach allows the operation of division by intervals containing zero. An example of solving a two-dimensional boundary value problem for the electric current potential in an electrochemical system with interval uncertainties of the input parameters is given. The problem with interval coefficients is solved by the boundary element method. The solution of an integral equation is reduced to a system of linear algebraic equations with interval coefficients by the finite sum method. The interval system of equations is solved by the Gauss method with the choice of the leading element by columns. The results of the numerical solution are obtained for the dimension of the system of equations from 200 to 1600. Graphs of the distribution of the interval functions of the potential and electric current density along the boundaries of the integration region are presented. A comparative analysis of the obtained results is carried out on the basis of classical, internal and averaged interval operations.

Keywords: interval calculations, non-standard interval operations, boundary value problem, uncertainty of input parameters, averaged values of interval operations

Учет неопределенности входных параметров при решениях прикладных задач осуществляется различными методами. Интервальный анализ является одной из наиболее изученных и обоснованных теорий. Интервальные вычисления дают возможность учитывать в решениях задач погрешности входных параметров, ошибки дискретизации численных методов, а также ошибки машинного округления действительных чисел. При этом вместо арифметических операций и функций на множестве вещественных чисел используют их интервальные аналоги [1]. В монографии [2] приведены фундаментальные результаты исследований интервальных алгебраических задач и их численных решений. Разработка новых алгоритмов для работы с величинами, содержащими неопределенности, а также их программная реализация способствуют более широкому применению методов интервального анализа в решениях прикладных задач.

В работе впервые предложены и протестированы новые правила интервальных арифметических операций, дающие возможность получать в решениях прикладных задач средние оценки интервального решения. В классической интервальной арифметике (КИА) под интервалом A понимают множество действительных чисел из отрезка $[a_1, a_2]$, где $a_1 \le a_2$. Одной из важнейших характеристик интервала является его ширина $w(A) = a_2 - a_1$, которая отражает степень неопределенности величины A.

В рамках КИА основные арифметические операции $(+,-,\times,/)$ над интервалами определены следующими правилами:

$$(A+B)_c=[a_1+b_1,a_2+b_2];$$

$$\left(A-B\right)_c=[a_1-b_2,a_2-b_1];$$

$$(A\times B)_c=[\min\left\{a_1b_1,a_1b_2,a_2b_1,a_2b_2\right\},\max\{a_1b_1,a_1b_2,a_2b_1,a_2b_2\}];$$

$$\left(A/B\right)_c=A\times[1/b_2,1/b_1];\ 0\notin B.$$

Индексом c будем обозначать операции, реализованные по правилам КИА, свойства которых хорошо изучены и детально проанализированы в [1, 2]. Применение указанных операций в конкретных задачах приводит к *внешней интервальной оценке* получаемого решения. Примеры практического использования указанных интервальных операций в решениях прикладных задач различной направленности представлены в [3, 4], в том числе в математических моделях, описывающих процессы в электрохимических системах [5–7].

Характерные свойства, присущие КИА, такие как $A-A\neq 0$, $A/A\neq 1$, нередко приводят к недопустимому росту ширины результирующих интервалов, что лишает практической значимости полученные решения.

Обобщенная интервальная арифметика на основе нестандартных интервальных операций, в первую очередь операций вычитания и деления, позволяет уменьшить влияние этих отрицательных свойств. В работах [8, 9] исследуется возможность применения нестандартных (внутренних) интервальных операций, на основе которых формируется *внутренняя интервальная оценка* решения задачи. В этом случае нестандартные операции определяются следующим образом.

Введем множество

$$M_*=\left\{a_1*b_1,a_1*b_2,a_2*b_1,a_2*b_2\right\},$$

где $*\in\{+,-,\times,/\}$.

Тогда результат любой арифметической операции $(*)$ в правилах КИА может быть представлен в виде

$$(A*B)_c=\left[\min\left(M_*\right),\max\left(M_*\right)\right].\quad(1)$$

Введем два дополнительных множества:

$$N_*=\left\{\min\left(M_*\right),\max\left(M_*\right)\right\};L_*=M_*\setminus N_*.$$

Тогда *внутренние* нестандартные интервальные операции можно определить следующим правилом:

$$(A*B)_v=\left[\min\left(L_*\right),\max\left(L_*\right)\right].\quad(2)$$

Здесь и далее индексом v будем обозначать внутренние операции.

Материалы и методы исследования

В данном сообщении использованы методы численного и интервального анализа; проведено сравнительное тестирование классических, внутренних и предложенных средних интервальных операций; представлены численные результаты решения краевой задачи с интервальной неопределенностью входных параметров.

Предлагается правило арифметических операций для получения *средних интервальных оценок* решения (введенные операции будем обозначать нижним индексом s):

$$(A*B)_s=\begin{cases}\left[\left(\min\left(M_*\right)+\min\left(L_*\right)\right)/2,\ \left(\max\left(M_*\right)+\max\left(L_*\right)\right)/2\right], & *\in\{+,-\}\\ \left[z_1\left(\min(M_*)\times\min(L_*)\right)^{1/2},z_2\left(\max(M_*)\times\max(L_*)\right)^{1/2}\right], & *\in\{\times,/\}\end{cases}\quad(3)$$

где

$$z_1=\begin{cases}-1, если \min\left(M_*\right)<0 \,и \min\left(L_*\right)<0\\ 1-в\,противном\,случае\end{cases};$$

$$z_2=\begin{cases}-1, если \max\left(M_*\right)<0 \,и \max\left(L_*\right)<0\\ 1-в\,противном\,случае\end{cases}.$$

Отметим, что в формулах (3) для операций умножения и деления присутствует корень квадратный из произведения двух сомножителей. Тестирование показало, что эти произведения отрицательными быть не могут, поэтому подобный случай в предлагаемом правиле не предусмотрен.

В КИА операция деления на интервал, содержащий ноль, не определена. В предлагаемом алгоритме данная операция не исключается, в том числе допускается случай, когда оба интервала содержат ноль (при этом ноль не совпадает ни с одним из концов интервала); обоснование данного подхода изложено в [10].

Результаты исследования и их обсуждение

Для проведения сравнительного анализа результатов арифметических операций, полученных по трем правилам (1), (2) и (3), протестировано 6 вариантов взаимного расположения двух интервалов A и B относительно нуля; значения интервалов представлены в табл. 1.

В табл. 2 представлены результаты применения операций сложения и вычитания к двум интервалам по трем правилам (c – классические операции, s – средние, v – внутренние); после каждого интервала указана его ширина.

Таблица 1

Данные для тестовых расчетов

№	Variant	A	w(A)	B	w(B)
1	A>0, B>0	[1.5, 3]	1.5	[0.5, 2.5]	2
2	A<0, B<0	[-2,-0.5]	1.5	[-3,-1]	2
3	A>0, B<0	[0.5,2.5]	2	[-2.5,-1]	1.5
4	0∈A, B>0	[-0.5,1.5]	2	[0.5,2]	1.5
5	0∈A, B<0	[-0.5,1]	1.5	[-3, -1]	2
6	0∈A, 0∈B	[-0.5, 1.5]	2	[-1, 0.5]	1.5

Таблица 2

Результаты сложения и вычитания двух интервалов

№	+	A + A	B + B	A + B = B + A
1	*c*	[3, 6]3	[1, 5]4	[2, 5.5]3.5
	s	[3.75, 5.25]1.5	[2, 4]2	[2.75, 4.75]2
	v	[4.5, 4.5]0	[3, 3]0	[3.5, 4]0.5
№	–	A – A	B – B	A – B = -(B – A)
1	*c*	[-1.5, 1.5]3	[-2, 2]4	[-1, 2.5]3.5
	s	[-0.75, 0.75]1.5	[-1, 1]2	[-0.25, 1.75]2
	v	[0, 0]0	[0, 0]0	[0.5, 1]0.5

Таблица 3

Умножение интервалов

№	x	A x A	B x B	A x B = B x A
1	*c*	[2.25, 9]6.75	[0.25, 6.25]6	[0.75, 7.5]6.75
	s	[3.18, 6.36]3.18	[0.56, 2.8]2.24	[1.06, 5.3]4.24
	v	[4.5, 4.5]0	[1.25, 1.25]0	[1.5, 3.75]2.25
2	*c*	[0.25, 4]3.75	[1, 9]8	[0.5, 6]5.5
	s	[0.5, 2]1.5	[1.73, 5.2]3.46	[0.87, 3.46]2.6
	v	[1, 1]0	[3, 3]0	[1.5, 2]0.5
3	*c*	[0.25, 6.25]6	[1, 6.25]5.25	[-6.25, -0.5]5.75
	s	[0.56, 2.8]2.24	[1.58, 3.95]2.37	[-3.95, -0.79]3.16
	v	[1.25, 1.25]0	[2.5, 2.5]0	[-2.5, -1.25]1.25
4	*c*	[-0.75, 2.25]3	[0.25, 4]3.75	[-1, 3]4
	s	[-0.75, 0.75]1.5	[0.5, 2]1.5	[-0.5, 1.5]2
	v	[-0.75, 0.25]1	[1, 1]0	[-0.25, 0.75]1
5	*c*	[-0.5, 1]1.5	[1, 9]8	[-3, 1.5]4.5
	s	[-0.5, 0.5]1	[1.73, 5.2]3.46	[-1.73, 0.87]2.6
	v	[-0.5, 0.25]0.75	[3, 3]0	[-1, 0.5]1.5
6	*c*	[-0.75, 2.25]3	[-0.5, 1]1.5	[-1.5, 0.75]2.25
	s	[-0.75, 0.75]1.5	[-0.5, 0.5]1	[-0.61, 0.61]1.22
	v	[-0.75, 0.25]1	[-0.5, 0.25]0.75	[-0.25, 0.5]0.75

Таблица 4

Деление интервалов

№	/	A / A	B / B	A / B	B / A
1	*c*	[0.5, 2]1.5	[0.2, 5]4.8	[0.6, 6]5.4	[0.17, 1.67]1.5
	s	[0.71, 1.41]0.71	[0.45, 2.24]1.79	[0.85, 4.24]3.39	[0.24, 1.18]0.94
	v	[1, 1]0	[1, 1]0	[1.2, 3]1.8	[0.33, 0.83]0.5
2	*c*	[0.25, 4]3.75	[0.33, 3]2.67	[0.17, 2]1.83	[0.5, 6]5.5
	s	[0.5, 2]1.5	[0.58, 1.73]1.15	[0.29, 1.15]0.87	[0.87, 3.46]2.6
	v	[1, 1]0	[1, 1]0	[0.5, 0.67]0.17	[1.5, 2]0.5
3	*c*	[0.2, 5]4.8	[0.4, 2.5]2.1	[-2.5, -0.2]2.3	[-5, -0.4]4.6
	s	[0.45, 2.24]1.79	[0.63, 1.58]0.95	[-1.58, -0.32]1.26	[-3.16, -0.63]2.53
	v	[1, 1]0	[1, 1]0	[-1, -0.5]0.5	[-2, -1]1
4	*c*	–	[0.25, 4]3.75	[-1, 3]4	–
	s	[-1, 1]2	[0.5, 2]1.5	[-0.5, 1.5]2	[-2, 0.67]2.67
	v	[-0.33, 1]1.33	[1, 1]0	[-0.25, 0.75]1	[-1, 0.33]1.33
5	*c*	–	[0.33, 3]2.67	[-1, 0.5]1.5	–
	s	[-1, 1]2	[0.58, 1.73]1.15	[-0.58, 0.29]0.87	[-1.73, 3.46]5.2
	v	[-0.5, 1]1.5	[1, 1]0	[-0.33, 0.17]0.5	[-1, 2]3
6	*c*	–	–	–	–
	s	[-1, 1]2	[-1, 1]2	[-1.22, 1.22]2.45	[-0.82, 0.82]1.63
	v	[-0.33, 1]1.33	[-0.5, 1]1.5	[-1, 0.5]1.5	[-0.67, 0.33]1

Для краткости в табл. 2 представлены результаты только первого варианта, так как для всех шести вариантов при сложении и вычитании выводы аналогичны:

a) максимальное значение имеет ширина интервала, полученного по правилу «*c*»;

b) минимальное значение имеет ширина интервала, полученного по правилу «*v*»; при этом сложение и вычитание равных интервалов дает результат нулевой ширины;

c) значение ширины интервала, полученного по правилу «*s*», равно среднему арифметическому значений, полученных по правилам «*c*» и «*v*».

В табл. 3 представлены результаты умножения двух интервалов по трем правилам.

В табл. 3 приведены данные расчетов для шести вариантов взаимного расположения интервалов. Выделим две группы результатов: а) варианты 1–3 (интервалы не содержат ноль); б) варианты 4–6 (один или оба интервала содержат ноль). В группе а) для внутренней операции умножения ширина $w(A \times A) = 0$, что может привести к заниженной интервальной оценке получаемого решения задачи.

В табл. 4 представлены результаты деления двух интервалов.

Приведены результаты для шести вариантов. Для операции деления также можно выделить две группы вариантов: а) варианты 1–3 (интервалы не содержат ноль); б) варианты 4–6 (один или оба интервала содержат ноль). В группе б) для КИА деление на интервал, содержащий ноль, не определено. В группе а) для внутренней операции деления ширина $w(A\ /\ A) = 0$, что (как и для умножения) приводит к заниженной интервальной оценке решения.

Применение интервальных операций при решении краевой задачи

Для исследования возможности применения усредненных интервальных операций в решении прикладной задачи рассмотрим алгоритм расчета электрического поля в электрохимической системе. Сформулируем краевую задачу в двумерном сечении кругового цилиндра радиуса R_0; схема представлена на рис. 1.

Известно, что функция потенциала электрического поля $u(p)$ в области Ω удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; p \equiv (x_p, y_p) \in \Omega . \quad (4)$$

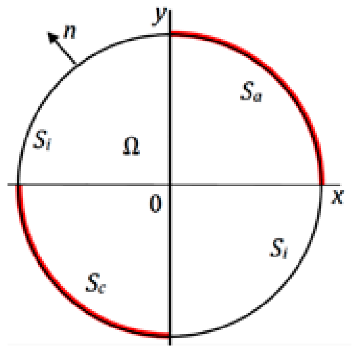


Рис. 1. Схема области интегрирования Ω; S_a – граница анода, S_c – граница катода, S_i – границы изоляторов, n – вектор нормали к границе области

На границах области сформулируем краевые условия для неизвестной функции:

$$\left.\left(u+\rho_a\sigma\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{S_a}=U_a\,, \qquad (5)$$

$$\left.\left(u+\rho_c\sigma\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{S_c}=U_c\,, \qquad (6)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_i}=0\,, \qquad (7)$$

где σ – удельная электропроводность среды, 1/(Ом·м); ρ_a, ρ_c – удельные поляризуемости анода и катода, Ом·м^2; U_a, U_c – потенциалы электродов от внешнего источника тока, В.

Значения электрохимических параметров, входящих в математическую модель (4)–(7), не могут быть измерены точно, так как они зависят от конвекции электролита, газогенерации электродов, температуры и других факторов, не учитываемых в данной постановке. В предлагаемом подходе электрохимические параметры мы будем полагать интервальными величинами.

Численное решение задачи (4)–(7) осуществляется методом граничных элементов [11]. Вначале из (5), (6) выразим производные по нормали:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_a}=\frac{U_a-u}{\rho_a\sigma}\,;\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_c}=\frac{U_c-u}{\rho_c\sigma}\,. \qquad (8)$$

Затем в интегральную формулу Грина

$$\pi u(p)=\int_{S_q}\left(\ln\frac{1}{r(p,q)}\cdot\frac{\partial u}{\partial n_q}-u(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\left(\ln\frac{1}{r(p,q)}\right)\right)ds_q$$

подставим вместо $\partial U/\partial n$ соответствующие правые части из (7), (8) и после некоторых тождественных преобразований построим граничное интегральное уравнение

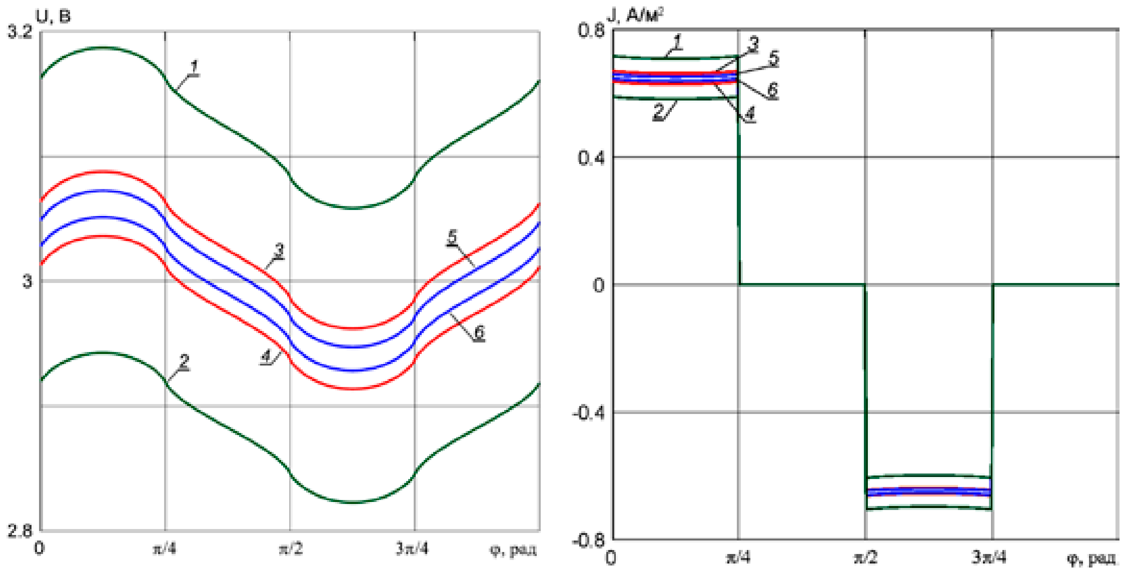
$$\pi u(p)+\int_{S_q}u(q)K(p,q)\,ds_q=F(p)\,, \qquad (9)$$

ядро которого имеет следующий вид:

$$K(p,q)=\begin{cases}\dfrac{1}{k_1}ln\dfrac{1}{r(p,q)}+\dfrac{\partial}{\partial n}\left(\ln\dfrac{1}{r(p,q)}\right), если\, q\in S_a;\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial n}\left(\ln\dfrac{1}{r(p,q)}\right), \qquad если\, q\in S_i;\\[2ex] \dfrac{1}{k_2}ln\dfrac{1}{r(p,q)}+\dfrac{\partial}{\partial n}\left(\ln\dfrac{1}{r(p,q)}\right), если\, q\in S_c.\end{cases}$$

Здесь $k_1=\rho_a\cdot\sigma/\Theta$, $k_2=\rho_c\cdot\sigma/\Theta$ – безразмерные величины; $\Theta=10\cdot R_0$ – параметр обезразмеривания.

На основе метода конечных сумм интегральное уравнение (9) сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), размерность которой равна числу граничных элементов и в проведенных расчетах принималась равной от 200 до 1600. Отметим, что матрица СЛАУ в данном случае является всюду плотной, т.е. не содержит нулевых элементов. Итоговая система с интервальными коэффициентами решалась методом Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу. Обоснования применимости данного метода к интервальным СЛАУ с матрицами, обладающими определенными свойствами, изложены в [2].



(а) *(б)*

Рис. 2. Распределение интервальных функций потенциала (а) и плотности тока (б) по границе области Ω в зависимости от угла φ на основе: 1, 2 – классической интервальной арифметики; 3, 4 – усредненных операций; 5, 6 – внутренних операций

Расчеты проводились с целью сравнительного анализа результатов, полученных на основе операций КИА (1), нестандартных внутренних операций (2) и усредненных операций (3), предложенных в данной работе. Радиусы интервалов для электрохимических параметров были приняты равными 1 % от их средних значений: U_a = [4.95, 5.05]; U_c = [0.99, 1.01]; $\rho_a = \rho_c$ = [2.97, 3.03]; σ = [9.9, 10.1]. На рис. 2 представлены результаты численного решения задачи (4)–(7).

Из рис. 2 видно, что ширина интервальной функции потенциала, построенной согласно правилам КИА, имеет недопустимо большое значение, которое делает результат малоинформативным. По результатам применения внутренних операций ширина интервального решения может оказаться несколько заниженной.

Заключение

В работе предложены новые, «усредненные» или «средние», интервальные операции, программная реализация и применение которых дает возможность получить средние интервальные оценки решения прикладных задач, где неопределенность присутствует в исходных параметрах изначально. Операции протестированы для различных комбинаций интервалов, расположенных относительно ноля, и апробированы на решении конкретной прикладной задачи из области электрохимии.

Список литературы

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления / Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 360 с.

2. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: XYZ, 2022. 654 с.

3. Герасименко М.Д., Шестаков Н.В. Интервальная математика и перспективы ее применения в геодезии // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2016. № 4. С. 38–41.

4. Крюков А.В., Литвинцев А.И. Интервальный анализ электромагнитных полей, создаваемых высоковольтными линиями электропередачи // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2015. № 1 (45). С. 89–97.

5. Kumkov S.I., Nikitin V.S., Ostanina T.N., Rudoy V.M. Interval processing of electrochemical data. Computational and Applied Mathematics. 2020. Vol. 380. P. 112961. DOI: 10.1016/j.cam.2020.112961.

6. Хисаметдинов Ф.З. Компьютерное моделирование и визуализация параметров электрического поля катодной защиты подземного трубопровода // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 9. С. 126–130.

7. Болотнов А.М. Компьютерное моделирование потенциальных электрических полей в электролитах на основе интервальных вычислений // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 2. URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=12937 (дата обращения: 10.01.2023).

8. Dimitrova N.S., Markov S.M., Popova E.D. Extended interval arithmetics: new results and applications. Computer Arithmetic and Enclosure Methods: Elsevier Sci. Publishers. 1992. P. 225–232.

9. Болотнов А.М., Бортник С.Ю. О нестандартных интервальных операциях вычитания и деления // Вестник Башкирского университета. 2022. Т. 27. № 1. С. 4–8. DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2022.1.1.

10. Kahan W. A more complete interval arithmetic. Lecture notes for a summer course. University of Toronto. Canada. 1968. P. 1–123.

11. Болотнов А.М., Иванов В.Н., Купцова А.Ф. Алгоритм расчета электрического поля в многоэлементной электрохимической системе // Современные наукоемкие технологии. 2021. № 3. С. 27–32. DOI: 10.17513/snt.38526.