УДК 004.021:519.688
DOI 10.17513/snt.39857

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОНТАКТНОЙ НАГРУЗКИ

Кетов А.В.

ФГБОУ ВО «Дальневосточный государственный университет путей сообщения», Хабаровск, e-mail: antonk500255@rambler.ru

В статье описывается разработка нового дискретного итерационного численного метода и алгоритма решения контактных задач механики деформируемого твёрдого тела для конструкционных контактных задач с локальным контактом. В общем случае нет аналитического решения системы двух интегральных уравнений, и приходится использовать численные итерационные методы решения. Целью исследования было разработать численный итерационный метод и алгоритм решения прямой конструкционной контактной задачи, лишенный недостатков существующих численных методов. Решение построено в рамках дискретной технологии на основе нового итерационного алгоритма, основное итерационное выражение которого обеспечивает обязательное выполнение условия равновесия сил на каждой итерации внутреннего цикла. Метод состоит в итерационном уточнении величин контактных напряжений и числа дискретных участков контакта с постепенным уменьшением величины невязки перемещений. Проведено определение напряжённо-деформированного состояния для тестирования и для экспериментальных данных. Тестирование работы нового алгоритма проводилось на классической задаче контакта сферы с упругой полуплоскостью. Разработанный итерационный алгоритм можно применять при нелинейной зависимости деформаций от сил. В ходе вычислений, пока не определились границы площадок контакта и число контактирующих дискретных участков, не требуется многократно решать систему линейных уравнений высокого порядка, что значительно экономит вычислительные ресурсы при решении конструкционных контактных задач.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, статическая неопределимость, итерационный процесс, скорость решения

NUMERICAL METHOD FOR CALCULATING THE CONTACT LOAD DISTRIBUTION

Ketov A.V.

FarEast State Transport University, Khabarovsk, e-mail: antonk500255@rambler.ru

The article describes the development of a new discrete iterative numerical method and algorithm for the solution of contact problems of deformable solid mechanics for constructional contact problems with local contact. In general, there is no analytical solution to the system of two integral equations, and numerical iterative methods of solution have to be used. The aim of the study was to develop a numerical iterative method and algorithm for solving a direct constructional contact problem, devoid of the disadvantages of existing numerical methods. The solution is built within the framework of a discrete technology based on a new iterative algorithm, the main iterative expression of which ensures the mandatory fulfillment of the condition of equilibrium of forces at each iteration of the internal cycle. The method consists in iterative refinement of the values of contact stresses and the number of discrete contact sections with a gradual decrease in the magnitude of the displacement discrepancy. The stress-strain state is determined for testing and for experimental data. Testing of the new algorithm was carried out on the classical problem of the contact of a sphere with an elastic half-plane. The developed iterative algorithm can be used for nonlinear dependence of deformations on forces. In the course of calculations, until the boundaries of the contact sites and the number of contacting discrete sections are determined, it is not necessary to repeatedly solve a system of high-order linear equations, which significantly saves computational resources when solving constructional contact problems.

Keywords: contact interaction, static indeterminability, iterative process, speed of solution

Аналитическое решение контактной задачи существует лишь для простейших случаев контакта двух деформируемых тел [1]. В общем случае конструкционных контактных задач (терминология Г.Б. Иосилевича) необходимо использовать дискретные численные методы (при этом наиболее сложные задачи – случаи зацепления зубьев зубчатых передач).

При контактном взаимодействии двух деформируемых тел должны выполняться условия ***совместности перемещений*** точек, контактирующих на их поверхностях, под действием нагрузки [2; 3]. Это условие можно описать в виде интегрального уравнения:

$$\iint_{S} q(u,v)K_{\Sigma}(u',v',u,v)dudv + \Delta(u',v') = \delta, \quad (1)$$

где s – площадь контакта взаимодействующих тел; q – контактное напряжение (давление); u,v – текущие координаты точки приложения силы; u',v' – текущие координаты точки измерения перемещений поверхностей тел; $K_{\Sigma}(u',v',u,v)$ – функция влияния распределённых нагрузок на сумму перемещений поверхностей тел вследствие всех деформаций взаимодействующих тел; Δ – зазор между поверхностями взаимодействующих тел до нагружения; δ – сближение контактирующих тел, являющееся мерой их деформирования.

Кроме условия совместности перемещений, должны выполняться и условия равновесия сил [2; 3], которые можно описать интегральным уравнением:

$$\iint_S q(u,v)dudv = F\,, \qquad (2)$$

где F – внешняя сжимающая сила.

Путём решения системы уравнений (1) и (2) можно найти, как распределяется нагрузка по площадкам контакта. Для возможности получения такого решения ***при неизвестных заранее*** размерах, форме и числе площадок контакта между взаимодействующими телами эта система уравнений должна быть дополнена ***краевыми (граничными) условиями***:

для всех точек на площадках контакта

$$q > 0,\ \Delta + W = \delta, \qquad (3)$$

на свободных (вне площадок контакта) поверхностях тел

$$q = 0,\ \Delta + W > \delta, \qquad (4)$$

где W – сумма всех видов деформаций поверхностей тел под действием нагрузки; δ – сближение контактирующих тел, являющееся мерой их деформирования.

Дискретный численный итерационный метод решения ***прямой*** (при заданной величине внешней сжимающей силы F) контактной задачи был предложен К.И. Заблонским. Система интегральных уравнений (1) и (2) сводится к системе (n + 1) линейных алгебраических уравнений. Так как размеры площадок контакта и число n участков, передающих нагрузку, заранее неизвестны, распределение нагрузки находится ***методом итераций***, когда система линейных уравнений решается много раз, с последовательным исключением участков, на которых нагрузка принимает отрицательные значения, и уточнением границ площадок контакта в ходе итераций. Недостатки этого метода: 1) необходимо много раз (на ***каждой*** итерации внешнего цикла) находить решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большой размерности; 2) такой подход можно использовать только в линейной постановке задачи деформативности.

Дискретный численный метод решения ***обратной*** (при заданном сближении δ контактирующих тел) контактной задачи был предложен Г.И. Шевелевой. Недостатки этого метода: 1) в проектном расчете (при заданной величине внешних сил) необходимо ***неоднократно*** (при нелинейной зависимости $\delta(F_n)$ не менее 3 раз) тратить вычислительные ресурсы и память ЭВМ на трудоёмкое решение прямой контактной задачи; 2) приходится ***аппроксимировать*** нелинейную зависимость $\delta(F_n)$, что вносит ***дополнительные*** погрешности в расчёт, для уменьшения которых приходится вводить дополнительные промежуточные точки аппроксимации, т.е. дополнительно тратить вычислительные ресурсы ЭВМ на дополнительные решения обратной контактной задачи; 3) учёт ***только контактных*** деформаций в подходе Г.И. Шевелевой.

Направления исследований: разработка систем компьютерного и имитационного моделирования, алгоритмов и методов имитационного моделирования на основе анализа математических моделей.

Предметная область: системы компьютерного и имитационного моделирования.

Объект исследования – алгоритмы и методы имитационного моделирования на основе анализа математических моделей.

Цель исследования – разработать дискретный численный итерационный алгоритм и метод имитационного моделирования прямой конструкционной контактной задачи на основе анализа математических моделей, лишённый указанных выше недостатков существующих методов К.И. Заблонского и Г.И. Шевелевой, для последующего использования нового алгоритма и метода в разработке систем компьютерного и имитационного моделирования.

Материалы и методы исследования

Для решения дискретным методом [4] разобьём площадку контакта, лежащую в общей касательной плоскости контактирующих поверхностей тел, на прямоугольные участки, в пределах которых контактная нагрузка будет считаться равномерно распределенной и равной её значению в центре каждого участка. Условия совместности перемещений должны будут выполняться в расчётных точках, расположенных в центрах участков. При этом решение контактной задачи сводится к решению алгебраической системы уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} q_k K_{ik} \Delta u \Delta v + \Delta_i = \delta\,, (i = 1, 2, ...n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \Delta u \Delta v = F\,, \qquad (5)$$

где i – номер контактирующего участка; n – число таких участков; q_i, q_k – контактные напряжения (давления) на участках; K_{ik} – коэффициент влияния единичной, равномерно распределённой по k-му участку нагрузки на сумму перемещений поверхностей зубьев (вследствие деформаций зубьев и их оснований) в расчётной точке i-го участка; Δu, Δv – длина и ширина прямоугольных участков; Δ_i – зазор до нагружения (в направлении общей контактной нормали) между поверхностями тел в расчётной точке i-го участка.

Без учета сил трения и при линейном поступательном перемещении при сближении деформируемых тел систему (5) можно представить в виде:

$$\Delta_i + W_i = \delta,\ (i=1,\dots,n);$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F. \qquad (6)$$

Для вывода основной итерационной формулы нового итерационного алгоритма второе уравнение системы уравнений (6) разделим почленно на величину δ:

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i / \delta) = F / \delta. \qquad (7)$$

Учитывая, что из первого уравнения непосредственно имеем $\delta = \Delta_i + W_i$, заменим этой суммой величину δ в левой части выражения (7) и получим:

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i / (\Delta_i + W_i)) = F / \delta. \qquad (8)$$

Дробное выражение в левой части (8) обозначим как:

$$f_i = F_i / (\Delta_i + W_i),\ (i = 1,..,n). \qquad (9)$$

Эта величина f_i, ***удовлетворяющая условию равновесия сил,*** и будет использоваться для уточнения значения величины F_i (сумма сил, равномерно распределенных по i-му участку) (i = 1,..,n), на каждой последующей итерации внутреннего цикла. Окончательно получаем следующий вид итерационной формулы:

$$F_{i,k+1} = f_i F / \sum_{i=1}^{n} f_i, \qquad (10)$$

где $F_{i,k+1}$ – новое значение силы $F_{i,k}$, уточнённое для следующей итерации; k – порядковый номер итерации; f_i – величина, обеспечивающая выполнение условий совместности перемещений в ходе итерационного процесса, полученное выше выражение для неё имеет вид:

$$f_i = F_{i,k} / (\Delta_i + W_i),\ (i = 1,..,n). \qquad (11)$$

Докажем, что выражение (10) обеспечивает ***обязательное*** выполнение условия равновесия сил на ***каждой*** итерации внутреннего цикла. При использовании выражения (10) имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{\mathrm{i,k+1}} = \sum_{i=1}^{n} [f_i (F / \sum_{j=1}^{n} f_j)] =$$

$$= (F / \sum_{j=1}^{n} f_j) \sum_{i=1}^{n} f_i = F.$$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} F_{\mathrm{i,k+1}} = F$, что и требовалось доказать.

Итерационная формула (10) используется в итерациях ***внутреннего*** цикла для уточнения величины, равнодействующей на i-м участке силы F_i. В итерациях ***внешнего*** цикла по условиям (3) и (4) производится уточнение границ площадок контакта и числа n участков, передающих нагрузку. За величину δ линейного сближения деформируемых тел при этом можно принимать или ***максимальное*** из величин δ_i (i=1,…,n), полученных в конце каждого внутреннего цикла итераций, или их ***среднее*** значение.

Для обоснования ***сходимости итерационного алгоритма*** выразим из (10) отношение

$$F_{i,k+1} / F_{i,k} = (F / \sum_{j=1}^{n} f_j) / (\Delta_i + W_i). \qquad (12)$$

Предположим, что величина δ = const. Тогда из (7) имеем, что

$$(F / \sum_{j=1}^{n} f_j) = \delta. \qquad (13)$$

Если $\Delta_i + W_i < \delta$, то из (13) с учётом (14) имеем $F_{i,k+1} > F_{i,k}$.

Если $\Delta_i + W_i = \delta$, имеем $F_{i,k+1} = F_{i,k}$.

Если $\Delta_i + W_i > \delta$, имеем $F_{i,k+1} < F_{i,k}$.

Это доказывает, что при δ = const предлагаемый итерационный алгоритм всегда сходится. Результаты расчётов на ЭВМ показали, что описанный итерационный алгоритм сходится также и при ***монотонно убывающем***, ***монотонно возрастающем*** или ***асимптотическом*** изменении величины δ в ходе итераций.

Тестовая проверка

Тестовая проверка работы нового дискретного численного итерационного алгоритма и метода имитационного моделирования прямой конструкционной контактной задачи проводилась для классической задачи контакта сферы с упругой полуплоскостью [1].

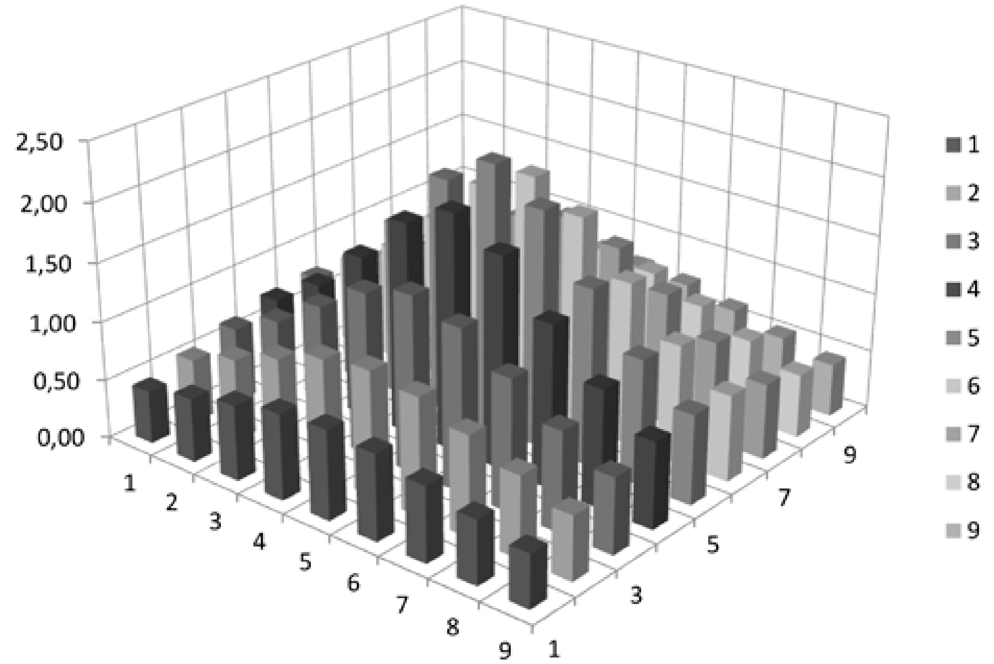

Рис. 1. Итерация 1

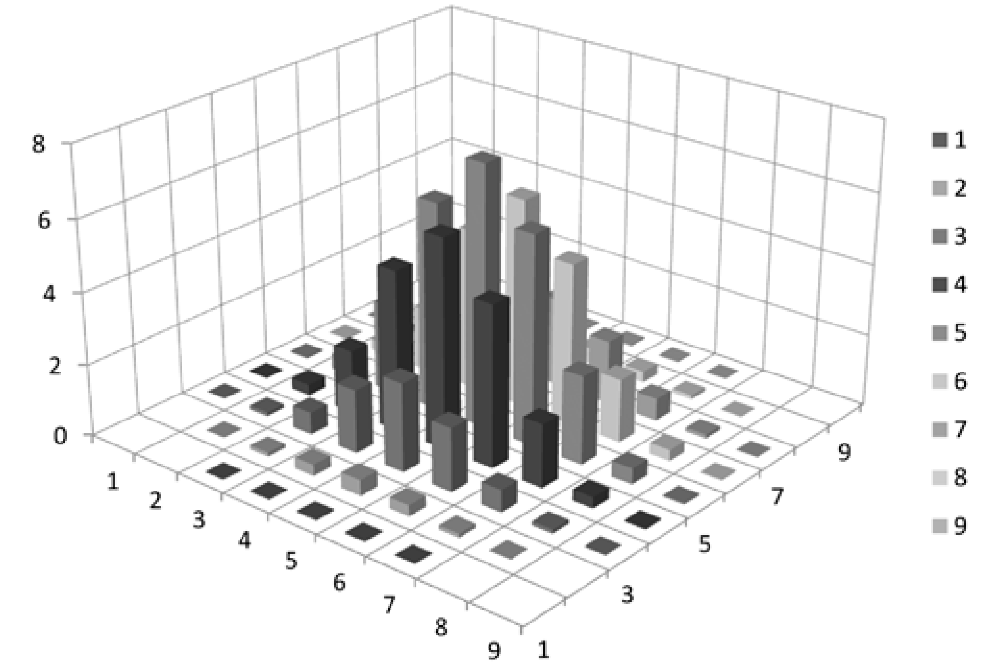

Рис. 2. Итерация 8

На рис. 1–3 приведены изменения эпюр напряжений в ходе итераций (неблагоприятный случай начального распределения нагрузки – равномерное при $\sum_{i=1}^{n} F_i = 81$).

На рисунке 4 приведён наглядный график сходимости итерационного процесса по изменению величины невязки перемещений E_i.

В результате новым итерационным методом всего за 18 итераций получено решение с полуэллиптической эпюрой напряжений, аналогичное классическому решению Г. Герца [1].

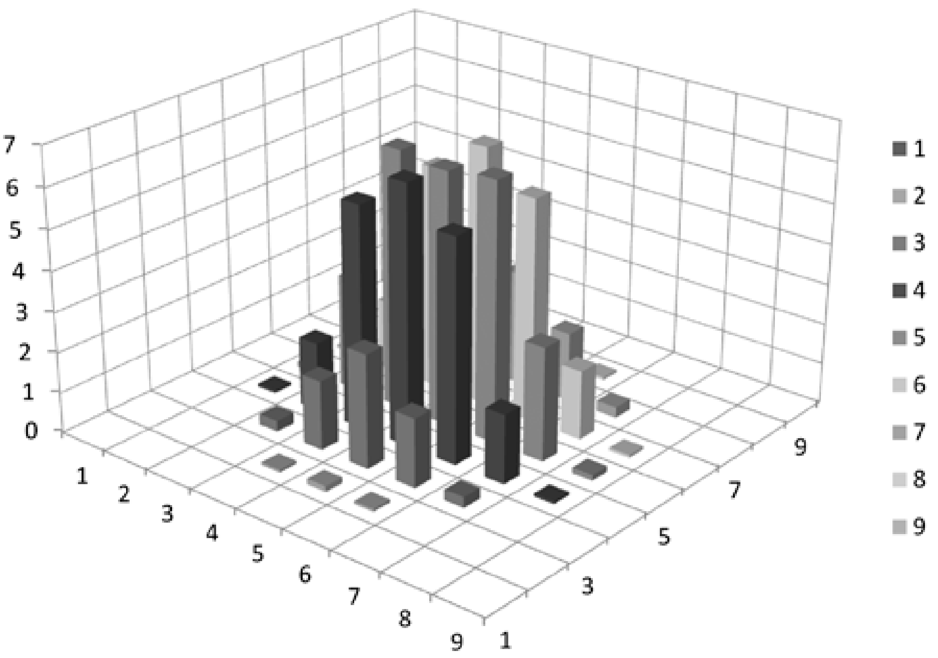

Рис. 3. Итерация 18 (последняя)

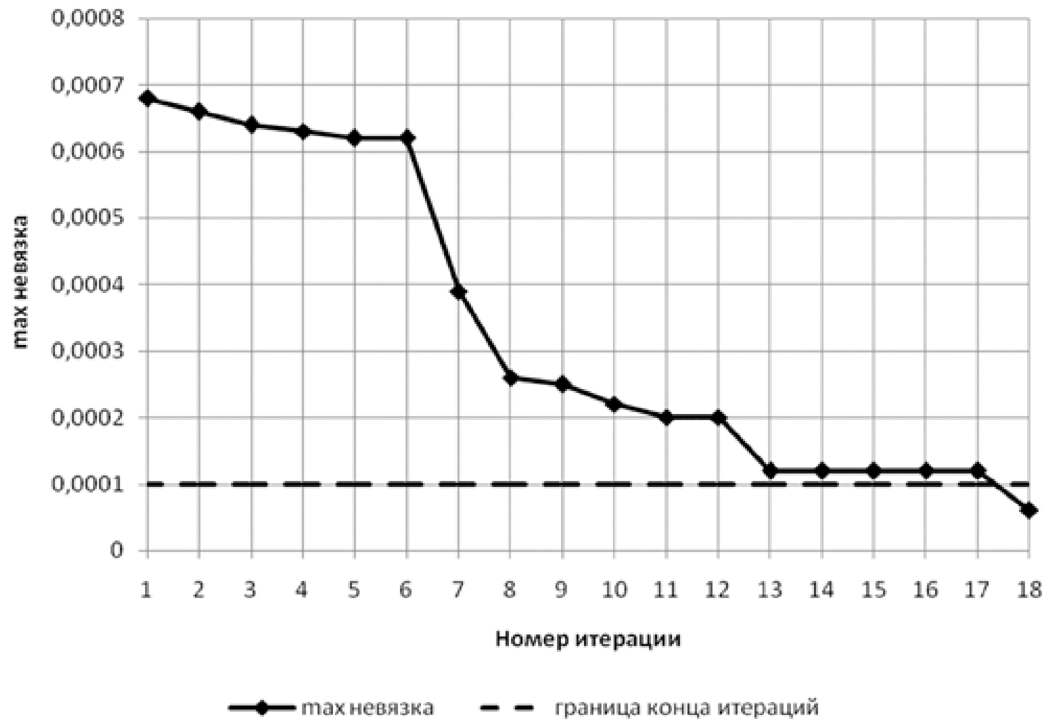

Рис. 4. График сходимости итерационного процесса

Практическое использование

Сравнение результатов моделирования разработанным дискретным численным итерационным алгоритмом и методом с экспериментальными данными А.С. Яковлева и В.И. Печеного [5] (единственный эксперимент с прямым (не косвенным) определением величины контактных давлений (напряжений) для зубьев передач с локальным контактом) приведено на рис. 5. При моделировании учитывались контактные и изгибно-сдвиговые деформации.

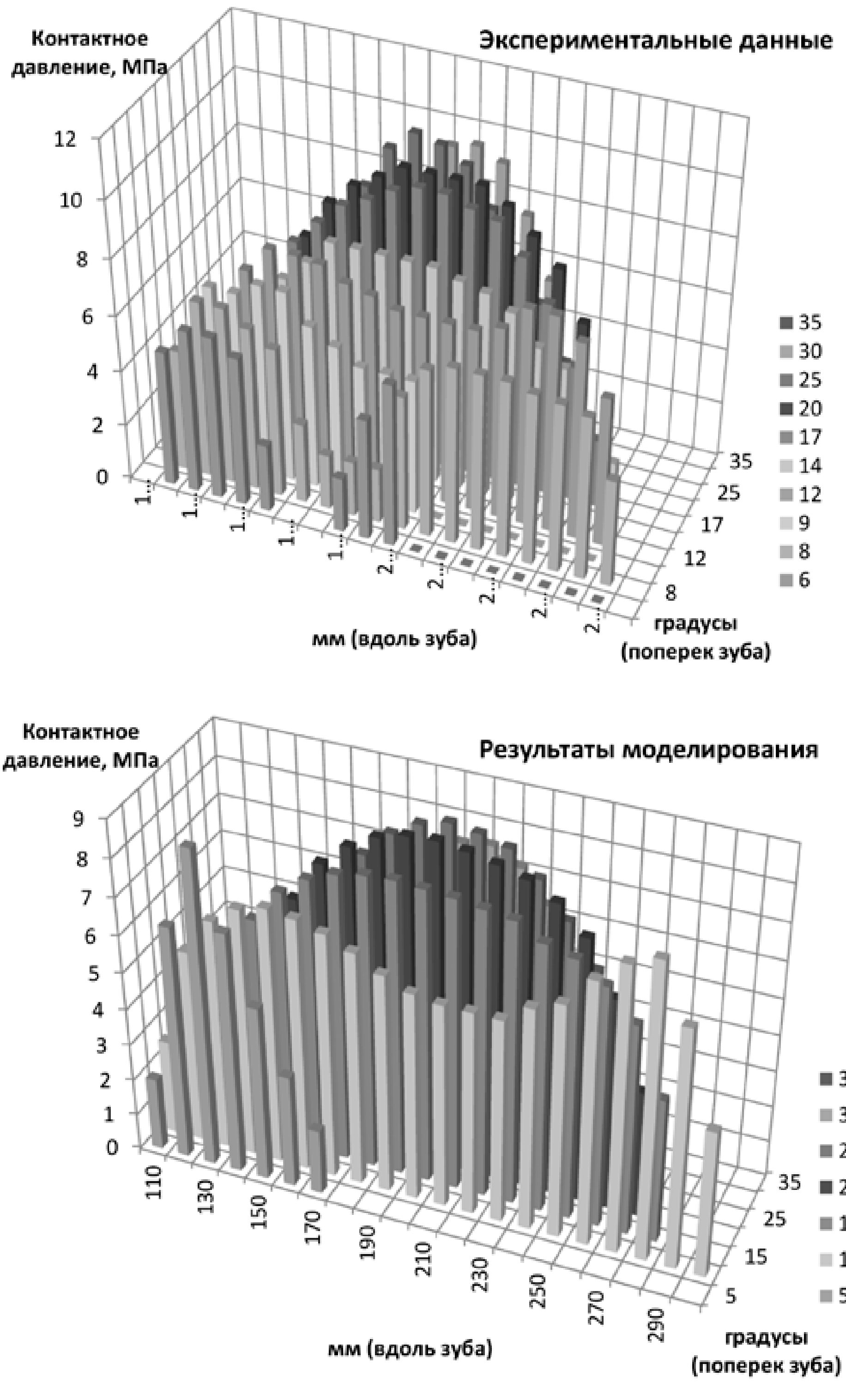

Рис. 5. Данные эксперимента [5] и результаты моделирования

Использованный дискретный численный итерационный алгоритм и метод ***не имеет*** недостатков метода К.И. Заблонского (***многократное*** решение систем линейных уравнений большой размерности, учёт ***только линейной*** зависимости деформаций от сил) и метода Г.И. Шевелевой (решение ***только обратной*** задачи при заданном сближении δ контактирующих тел, учёт ***только контактных*** деформаций).

Также практическое использование разработанного дискретного численного итерационного алгоритма и метода было при имитационном моделировании распределения контактных давлений (напряжений) по площадкам контакта в цилиндрических зубчатых передачах Новикова (в том числе с учётом погрешностей изготовления и сборки) и в модифицированных глобоидных передачах.

Заключение

Разработанный дискретный численный итерационный алгоритм и метод можно применять при ***нелинейной*** зависимости деформаций от сил. В ходе вычислений ***не требуется многократно решать систему линейных алгебраических уравнений*** высокого порядка (пока не определились границы площадок контакта и число контактирующих дискретных участков, ***нет необходимости в точном решении***). Всё это экономит вычислительные ресурсы и память ЭВМ. Поэтому при использовании предложенного дискретного численного итерационного алгоритма и метода можно повысить точность решения конструкционных контактных задач и скорость работы систем компьютерного и имитационного моделирования.

Разработанный дискретный численный итерационный алгоритм и метод имитационного моделирования прямой конструкционной контактной задачи на основе анализа математических моделей в дальнейшем будет использоваться для последующей разработки систем компьютерного и имитационного моделирования.

Список литературы

1. Попов В.Л. Механика контактного взаимодействия и физика трения. М.: Физматлит, 2013. С. 66-80.

2. Яковлев М.Е. Математическое моделирование контактного взаимодействия термовязкоупругопластических сред: автореф. дис. … канд. техн. наук. Москва, 2014. 18 с.

3. Федорова Н.В. Определение деформированного состояния контактирующих тел и моделирование их хрупкого разрушения: автореф. дис. … канд. техн. наук. Новосибирск, 2020. 19 с.

4. Горячева И.Г., Цуканов И.Ю. Развитие механики дискретного контакта с приложениями к исследованию фрикционного взаимодействия деформируемых тел // Прикладная математика и механика. 2020. Т. 84, № 6. С. 757-789.

5. Яковлев А.С., Печеный В.И. Исследование контактных напряжений зубьев передач с зацеплением Новикова: тематический сборник научных работ. Краматорск, 1971. Вып.11. 18 с.