

УДК 656.11:351.811.12

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СВЕТОФОРНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРИ ПЕРЕСЕЧЕНИИ МНОГОПОЛОСНЫХ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ

**Наумова Н.А.***ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», Краснодар,  
e-mail: Nataly\_Naumova@mail.ru*

Проблема организации дорожного движения в городах является достаточно серьезной. Постоянно возникающие заторы на улично-дорожной сети ведут к снижению скорости движения, увеличению времени в пути, повышению расхода топлива, увеличению вредных выбросов в окружающую среду. Актуальной задачей является разработка методов автоматизированного принятия решений по организации движения в режиме реального времени, в частности методов определения оптимальных параметров светофорного регулирования. В работе представлена модель регулируемого перекрестка. Перекресток рассматривается как узел транспортной сети, в котором пересекаются несколько транспортных потоков, распределенных по полосам движения. Каждый транспортный поток описывается как случайный поток событий, распределенный по закону Эрланга. Критерий оптимизации – суммарная задержка всех транспортных средств данного потока за единицу времени. Составлена и исследована целевая функция. Определена система неравенств, задающих область допустимых значений параметров регулирования. По результатам составлен и обоснован алгоритм определения оптимальных параметров светофорного регулирования. Разработана компьютерная программа, реализующая алгоритм. Предложенный метод определения параметров цикла светофорного регулирования приемлем для его корректировки в режиме реального времени, так как по заданным параметрам потоков мгновенно выдает решение.

**Ключевые слова:** математическая модель, транспортный поток, динамическое управление, светофорное регулирование

## MODELING AND OPTIMIZATION OF TRAFFIC SIGNALS WHEN CROSSING MULTI-LANE ROADS

**Naumova N.A.***Kuban State Technological University, Krasnodar, e-mail: Nataly\_Naumova@mail.ru*

The problem of organizing traffic in cities is quite serious. Constant traffic jams on the road network lead to a decrease in speed, an increase in travel time, an increase in fuel consumption, and an increase in harmful emissions into the environment. An urgent task is the development of methods for automated decision-making on the organization of traffic in real time, in particular, methods for determining the optimal parameters of traffic light control in real time. The paper presents a model of a signalized intersection. The intersection is considered as a node of the transport network, in which several traffic flows, distributed along the traffic lanes, intersect. Each transport stream is described as a random stream of events distributed according to the Erlang law. The optimization criterion is the total delay of all vehicles of a given stream per unit of time. We compiled and investigated the target function. The system of inequalities that define the range of admissible values of control parameters is determined. Based on the results, an algorithm for determining the optimal parameters of traffic light regulation was compiled and substantiated. A computer program has been developed that implements the algorithm. The proposed method for determining the parameters of the traffic light control cycle is acceptable for its correction in real time, since it instantly gives a solution based on the given flow parameters.

**Keywords:** mathematical model, traffic flow, dynamic control, traffic signal controllers

Проблема организации дорожного движения в городах является достаточно серьезной. Постоянно возникающие заторы на улично-дорожной сети ведут к снижению скорости движения, увеличению времени в пути, повышению расхода топлива, увеличению вредных выбросов в окружающую среду. Наиболее действенными мерами, способными обеспечить беззаторовое движение, являются расширение дорожной сети, строительство новых дорожных развязок, выведение транзитного транспорта за черту города. Однако в силу градостроительных особенностей это не всегда возможно. Поэтому оптимальная организация движения на уже существующей дорожной

сети также является действенной мерой. Причем актуальной задачей является разработка методов автоматизированного принятия решений по организации движения в режиме реального времени.

В настоящее время существует большое количество математических моделей распределения транспортных потоков по сети и методов, способствующих решению задач оптимального управления ими [1–3]. Однако изучение методов моделирования и управления потоками остается актуальной задачей. Это связано с развитием технических возможностей сбора и обработки данных, а также с широким спектром задач, подлежащих исследованию.

Отдельной локальной задачей является организация движения на регулируемом пересечении. Исследования в этой области посвящены методам определения оптимальных фаз светофорного цикла и снижения очереди автотранспортных средств у перекрестка [4, 5]. Актуальной является задача разработки метода определения оптимальных параметров светофорного регулирования в режиме реального времени при минимальном количестве исходных данных, что и является целью данной работы.

### Материалы и методы исследования

Для решения задач локального порядка, в частности организации движения на перекрестке со светофорным регулированием, необходимо разработать модель движения транспортных средств и выбрать критерий оптимизации. Критерий оптимизации будет определять направленность мероприятий по совершенствованию организации движения.

В данной работе перекресток рассматривается как узел транспортной сети, в котором пересекаются несколько транспортных потоков, распределенных по полосам движения. Каждый транспортный поток описывается как случайный поток событий, распределенный по закону Эрланга. Справедливость такой гипотезы была проверена автором экспериментально [6]. В качестве критерия оптимизации можно выбрать, например, среднюю часовую задержку на данном перекрестке (в автомобиле-часах); среднюю часовую задержку на данном перекрестке по выбранным приоритетным направлениям (в автомобиле-часах); среднюю задержку за один цикл [7]. Требования минимизации общих транспортных расходов в сети (system optimization) отвечает критерий задача минимизации потерь времени на данном перекрестке всеми транспортными средствами.

### Результаты исследования и их обсуждение

#### 1. Модель регулируемого перекрестка

Автором разработана математическая модель движения автотранспортных средств по сети [6, 8] и выведены явные аналитические функции для определения параметров качества организации движения в случае, если справедлива гипотеза о распределении интервалов по времени между автомобилями по закону Эрланга. Явное аналитическое задание функции позволяет провести исследование на наличие ее экстремумов средствами математического анализа.

Пусть  $n_1$  – число потоков магистрали № 1;  $n_2$  – число потоков магистрали № 2;

$h$  – среднее время (в секундах) между пересекающимися узловую точку требованиями одного потока;

$H_i(t, \lambda)$  – функция восстановления для  $i$ -го потока магистрали № 1;

$W_j(T, \lambda)$  – суммарная задержка всех требований  $i$ -го потока за один цикл регулирования;

$T_1$  – время (в секундах), в течение которого запрещено движение для потоков магистрали номер № 1;

$T_2$  – время (в секундах), в течение которого запрещено движение для потоков магистрали номер № 2;

$Y$  – время (в секундах) горения желтого сигнала;

длина цикла светофорного регулирования:

$$T_1 + T_2 + Y = T. \quad (1)$$

Под задержкой на перекрестке будем понимать время ожидания возможности продолжить движение в нужном направлении, вызванное запрещающим сигналом светофора. Суммарная задержка всех транспортных средств данного потока за единицу времени – один час – выражается следующим образом:

$$W(T, \lambda) \cdot \frac{3600}{T} \cdot \frac{1}{3600} = \frac{W(T, \lambda)}{T} \quad (\text{авт.}\cdot\text{ч}). \quad (2)$$

Целевая функция:

$$Z = \frac{\sum_i W_i(T_1, \lambda) + \sum_j W_j(T_2, \lambda)}{T} \rightarrow \min. \quad (3)$$

В результате следует получить оптимальные значения параметров регулирования  $T, T_1, T_2$ .

При этом для каждого потока должно выполняться условие отсутствия затора: при движении по данной полосе количество автомобилей, прибывающих к перекрестку за один цикл, не должно превышать количество требований, пересекающих этот перекресток за время  $T_i$ , когда движение разрешено. Ниже сформулированы условия отсутствия затора:

$$H_i(T, \lambda) - \frac{T_2}{h} \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_1; \quad (4)$$

$$H_j(T, \lambda) - \frac{T_1}{h} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_2. \quad (5)$$

Кроме этого, необходимо выполнение условий:

$$T_1 \geq M_1, \quad T_2 \geq M_2, \quad (6)$$

где  $M_1, M_2$  – минимальная допустимая по нормативам длительность фаз светофорного цикла (в секундах).

В работе [6] экспериментально проверено, что значение параметра  $k$  распределения Эрланга может принимать значения от одного до четырех. Значения параметра  $\lambda$  зависят от интенсивности движения. Функции  $H_i(t, \lambda)$  и  $W_i(T_i, \lambda)$  в каждом случае следующие:

$$\text{Параметр } k = 1) H(t) = \lambda t; W(T_i, \lambda) = \int_0^{T_i} H_\lambda(t) dt = \frac{\lambda T_i^2}{2};$$

$$\text{Параметр } k = 2) H(t) = \frac{\lambda t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{-2\lambda t};$$

$$W(T_i, \lambda) = \int_0^{T_i} H_\lambda(t) dt = \frac{\lambda T_i^2}{4} - \frac{T_i}{4} - \frac{e^{-2\lambda T_i}}{8\lambda} + \frac{1}{8\lambda};$$

$$\text{Параметр } k = 3) H(t) = \frac{\lambda t}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} e^{-3\lambda t/2} \left[ \sin\left(\frac{\lambda t\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\lambda t\sqrt{3}}{2}\right) \right];$$

$$W(T_i, \lambda) = \frac{\lambda}{6} T_i^2 - \frac{1}{3} T_i - \frac{1}{9\lambda} e^{-\frac{3}{2}\lambda T_i} \cdot \left( 2\cos\frac{\lambda T_i\sqrt{3}}{2} - \sin\frac{\lambda T_i\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{2}{9\lambda};$$

$$\text{параметр } k = 4) H(t) = \frac{\lambda}{8} t - \frac{3}{8} + \frac{1}{8} e^{-2\lambda t} + \frac{1}{4} e^{-\lambda t} (\cos(\lambda t) + \sin(\lambda t));$$

$$W(T_i, \lambda) = \frac{\lambda}{16} T_i^2 - \frac{3}{8} T_i - \frac{1}{16\lambda} e^{-2\lambda T_i} - \frac{1}{4\lambda} e^{-\lambda T_i} \cos(\lambda T_i) + \frac{5}{16\lambda}.$$

**2. Разработка алгоритма решения задачи**

Для разработки алгоритма докажем следующее утверждение.

**Теорема 1.** Функция  $Z(T_1, T) = \frac{\sum_i W_i(T_i, \lambda) + \sum_j W_j(T - T_1 - Y, \lambda)}{T}$  не имеет критических

точек в области определения.

**Доказательство.**

Критические точки являются решением системы:

$$\Omega: \begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial T_1} = \frac{1}{T} \left( \sum_{i=1}^{n1} \frac{\partial W_i(T_i, \lambda)}{\partial T_1} + \sum_{j=1}^{n2} \frac{\partial W_j(T - T_1 - Y, \lambda)}{\partial T_1} \right) = 0; \\ \frac{\partial Z}{\partial T} = - \frac{\sum_{i=1}^{n1} W_i(T_i, \lambda) + \sum_{j=1}^{n2} W_j(T - T_1 - Y, \lambda)}{T^2} + \\ + \frac{1}{T} \left( \sum_{i=1}^{n1} \frac{\partial W_i(T_i, \lambda)}{\partial T} + \sum_{j=1}^{n2} \frac{\partial W_j(T - T_1 - Y, \lambda)}{\partial T} \right) = 0. \end{cases}$$

С учетом того, что  $\frac{\partial W(T, \lambda)}{\partial T} = \frac{\partial \left( \int_0^T H(t) dt \right)}{\partial T} = H(T)$ , продолжим вычисление  $\frac{\partial Z}{\partial T_1}$ :

$$\frac{\partial Z}{\partial T_1} = \frac{1}{T} \left( \sum_{i=1}^{n1} H_i(T_i, \lambda) - \sum_{j=1}^{n2} H_j(T - T_1 - Y, \lambda) \right).$$

Найдем  $\frac{\partial Z}{\partial T}$ :

$$\frac{\partial Z}{\partial T} = - \frac{\sum_{i=1}^{n1} W_i(T_i, \lambda) + \sum_{j=1}^{n2} W_j(T - T_1 - Y, \lambda)}{T^2} + \frac{1}{T} \left( \sum_{i=1}^{n1} \frac{\partial W_i(T_i, \lambda)}{\partial T} + \sum_{j=1}^{n2} \frac{\partial W_j(T - T_1 - Y, \lambda)}{\partial T} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\sum_{i=1}^{n1} W_i(T_1, \lambda) + \sum_{j=1}^{n2} W_j(T - T_1 - Y, \lambda)}{T^2} + \frac{\sum_{j=1}^{n2} H_j(T - T_1 - Y)}{T} = \\
&= \frac{-\sum_{i=1}^{n1} W_i(T_1, \lambda) - \sum_{j=1}^{n2} W_j(T - T_1 - Y, \lambda) + T \cdot \sum_{j=1}^{n2} H_j(T - T_1 - Y)}{T^2}.
\end{aligned}$$

Так как функция  $H(t)$  возрастает, то  $W(T, \lambda) = \int_0^T H(t) dt \leq H(T) \cdot T$ . Можно оценить значение частной производной по  $T$ .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial T} &\geq \frac{-T_1 \cdot \sum_{i=1}^{n1} H_i(T_1) - (T - T_1 - Y) \cdot \sum_{j=1}^{n2} H_j(T - T_1 - Y) + T \sum_{j=1}^{n2} H_j(T - T_1 - Y)}{T^2} = \\
&= \frac{-T_1 \cdot \left( \sum_{i=1}^{n1} H_i(T_1) - \sum_{j=1}^{n2} H_j(T - T_1 - Y) \right) + Y \cdot \sum_{j=1}^{n2} H_j(T - T_1 - Y)}{T^2} = \\
&= -\frac{T_1}{T} \frac{\partial Z}{\partial T_1} + \frac{Y \cdot \sum_{j=1}^{n2} H_j(T - T_1 - Y)}{T^2}.
\end{aligned}$$

Если  $\frac{\partial Z}{\partial T_1} = 0$ , то  $\frac{\partial Z}{\partial T} \geq \frac{Y \cdot \sum_{j=1}^{n2} H_j(T - T_1 - Y)}{T^2} > 0$ .

Знак неравенства строгий, так как  $\sum_{j=1}^{n2} H_j(T - T_1 - Y) > 0$  (иначе движение в направлении 2 отсутствует).

Таким образом, функция  $Z(T_1, T)$  не имеет критических точек.

Что и требовалось доказать.

**Следствие:** целевая функция

$$Z(T_1, T) = \frac{\sum_i W_i(T_1, \lambda) + \sum_j W_j(T - T_1 - Y, \lambda)}{T}$$

может достигать экстремума (в частном случае минимума) только на границе области определения:

$$\Omega: \begin{cases} H_i(T, \lambda) - \frac{T - T_1 - Y}{h} \leq 0, i = 1, 2, \dots, n1 \\ H_j(T, \lambda) - \frac{T_1}{h} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n2 \\ T_1 \geq M_1, \quad T_2 \geq M_2. \end{cases}$$

Исходя из этого, возможно разработать алгоритм решения данной задачи математического программирования. Ниже отметим следующие факты, которые будут учтены при разработке алгоритма.

1. Пусть при  $T = T^*$  и  $T_1 = T_1^*$  целевая функция  $Z(T_1, T)$  достигает наименьшего значения при выполнении условий  $\Omega$ . Тогда хотя бы одно из неравенств системы ограничений обращается в равенство.

2. Система ограничений линейна относительно параметра  $T_1$ , тогда

$$\begin{cases} T_1 \leq T - Y - h \cdot H_i(T, \lambda), i = 1, 2, \dots, n1 \\ T_1 \geq h \cdot H_j(T, \lambda), j = 1, 2, \dots, n2 \end{cases}$$

То есть множество допустимых значений  $\Omega$  не пустое, если выполнено условие

$$\max_j (h \cdot H_j(T, \lambda)) \leq \min_i (T - Y - h \cdot H_i(T, \lambda)).$$

Если

$$\max_j (h \cdot H_j(T, \lambda)) > \min_i (T - Y - h \cdot H_i(T, \lambda)),$$

то задача не имеет решений.

Алгоритм решения

**Шаг 1)** при  $T = T_{max}$  проверяем выполнение условия:

$$\max_j (h \cdot H_j(T, \lambda)) \leq \min_i (T - Y - h \cdot H_i(T, \lambda)).$$

Если выполнено, то переходим к шагу 2, если не выполнено – к шагу 3.

**Шаг 2)** находим наименьшее  $Z(T_1, T)$  значение для  $T = T_{max}$

2.1) принимаем  $T_1^* = T - Y - h \cdot H_i(T, \lambda)$  для  $i = 1$ ;

2.2) если  $T_1^* \geq M_1$  и

$$T_1^* \in [\max_j (h \cdot H_j(T, \lambda)); \min_i (T - Y - h \cdot H_i(T, \lambda))],$$

то принимаем значение  $T_1^*$  за решение задачи. Вычисляем  $Z(T_1^*)$ ;

2.3) если не все условия выполнены, то переходим к пункту 2.4;

2.4) повторяем пункты 2.1–2.4 для  $i = 2, \dots, n1$ ;

2.5) принимаем  $T_1^* = h \cdot H_j(T, \lambda)$  для  $j = 1$ ;

2.6) если  $T_1^* \geq M_1$  и

$$T_1^* \in [\max_j (h \cdot H_j(T, \lambda)); \min_i (T - Y - h \cdot H_i(T, \lambda))],$$

то принимаем значение  $T_1^*$  за решение задачи. Вычисляем  $Z(T_1^*)$ ;

2.7) если не все условия выполнены, то переходим к пункту 5;

2.8) повторяем пункты 2.5 – 2.7 для  $j = 2, \dots, n2$ ;

2.9) из всех найденных  $Z(T_1^*)$  выбираем наименьшее значение.

**Шаг 3)** проверяем выполнение условия

$$\max_j (h \cdot H_j(T, \lambda)) \leq \min_i (T - Y - h \cdot H_i(T, \lambda))$$

при  $T = T_{max} - k \cdot \Delta T$ ,  $k = 1, 2, \dots, \frac{T_{max} - T_{min}}{\Delta T}$ .

Точность достаточно взять  $\Delta T = 1$ .

Если выполнено, то переходим к шагу 2, если не выполнено – изменяем значение  $T$ .

**Шаг 4)** среди всех найденных значений  $Z(T_1^*)$  выбираем наименьшее, соответствующие значения параметров являются решением задачи.

**Замечания:**

1. Если ставится задача свести к минимуму суммарные затраты времени на регулируемом перекрестке в определенном направлении, то изменяется числитель целевой функции (суммируем затраты вре-

мени только в выбранном направлении). Например,

$$Z_1(T_1, T) = \frac{\sum_i W_i(T_1, \lambda)}{T} \rightarrow \min$$

или

$$Z_2(T_1, T) = \frac{\sum_j W_j(T - T_1 - Y, \lambda)}{T} \rightarrow \min.$$

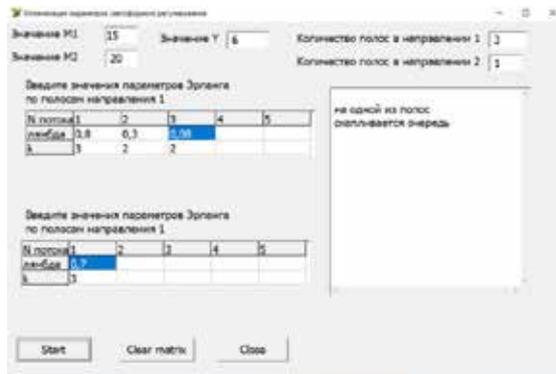
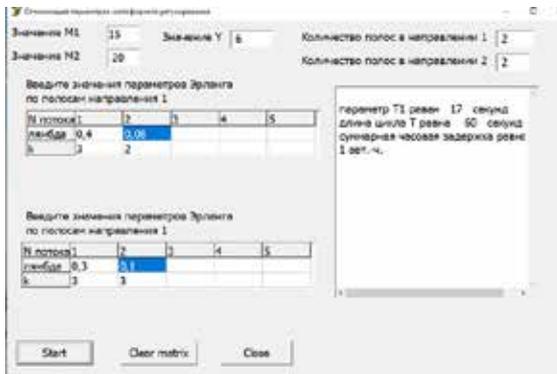
Функция  $Z_1(T_1, T)$  оптимизирует суммарную часовую задержку в направлении № 1, а  $Z_2(T_1, T)$  – в направлении № 2. Обе функций монотонные по аргументу  $T_1$ , поэтому наименьшее значение достигается также на границе области  $\Omega$ . Поэтому можно использовать предложенный выше алгоритм.

2. Если интенсивность движения в каком-либо направлении высокая и очередь из транспортных средств не успевает ликвидироваться за время горения разрешающего сигнала светофора, то соответствующее неравенство в системе  $\Omega$  не может быть выполнено; в этом случае можно исключить его из рассмотрения и найти оптимальные фазы цикла для остальных направлений.

По алгоритму из пункта 2.2 автором разработан программный модуль среде DELPHI (рисунок).

### Заключение

Предлагаемый метод определения параметров цикла светофорного регулирования приемлем для его корректировки в режиме реального времени, так как по заданным параметрам потоков мгновенно выдает решение. Кроме того, предлагаемый способ определения задержек на регулируемом перекрестке позволяет проводить предварительную оценку суммарных потерь времени при проектировании пересечения, определении числа полос и схемы движения на подходах к перекрестку.



Пример работы программы, определяющей оптимальные параметры цикла светофорного регулирования

**Список литературы**

1. Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учебное пособие / Под ред. А.В. Гасникова. М.: МЦНМО, 2013. 427 с.
2. Иносэ Х., Хамада Т. Управление дорожным движением. М.: Транспорт, 1983. 248 с.
3. Андреева Е.А., Бурмистров А.Н., Солодкий А.И., Белкова Е.В. Управление транспортными потоками в городах: монография. М.: ИНФРА-М, 2019. 207 с.
4. Farivar S., Tian Z.Z. Modeling delay at signalized intersections with channelized right-turn lanes considering the impact of blockage. *Journal Of Advanced Transportation*. 2016. Vol. 50. P. 1666–1682.
5. Chaudhry M.S., Ranjitkar P. Traffic Signal Design with an Increasing Queue Discharge Rate. *Asian Transport Stud.* 2015. Vol. 3. No. 3. P. 328–344.
6. Наумова Н.А., Зырянов В.В., Наумов Р.А. Автоматизированное управление транспортными потоками средствами мезоскопического моделирования: монография. Краснодар: ФГБОУ ВО «КубГТУ», 2018. 266 с.
7. Методические рекомендации по разработке и реализации мероприятий по организации дорожного движения. Организация дорожного движения на регулируемых пересечениях. НИИ автомобильного транспорта. М., 2017. 91 с.
8. Naumova N.A., Naumov R.A. Method of Solving Some Optimization Problems for Dynamic Traffic Flow Distribution. *International Review on Modelling and Simulation*. Italy. 2018. Vol. 11. No. 4. P. 245–251.