УДК 004.9

ПРОБЛЕМА ЭФФЕКТИВНОГО АДМИНИСТРИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ЖИЗНИ ЗАЯВОК

Шайдуллина Н.К., Печеный Е.А., Нуриев Н.К.

ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технологический университет», Казань, e-mail: nshaydullina@yandex.ru

В статье сформулирована задача администрирования системы массового обслуживания с групповым входным потоком и вырожденным потоком заявок, покидающих систему. Особенностью рассматриваемой системы является ограниченное время жизни заявок. В качестве примера такой СМО рассмотрена торговая точка, которая получает партию товара – группу заявок с ограниченным сроком годности. Показателем эффективности функционирования данной системы выбрана величина выручки от объема продажи. В предположении, что первоначальная скорость продажи не позволит реализовать весь товар, поставлена задача нахождения момента времени, в который следует интенсифицировать процесс продажи путем снижения цены, с целью получения большей выручки. Для решения задачи построена имитационная модель и проведен ряд экспериментов с различными функциями скорости продажи: постоянной, линейной, квадратичной и экспоненциальной. В имитационных экспериментах были использованы различные функциональные зависимости между скоростью продажи и снижением цены. Показано, что для некоторых видов зависимостей существует единственная точка принятия решения, а для других ее не существует вовсе. Кроме того, установлено, что оптимальная величина снижения цены зависит от соотношения между скоростью продажи и снижением цены и не зависит от функции скорости.

Ключевые слова: система массового обслуживания, групповой входной поток, ограниченное время жизни заявки, имитационная модель

THE PROBLEM OF EFFECTIVE ADMINISTRATION OF A QUEUING SYSTEM WITH A LIMITED TIME OF REQUESTS

Shaydullina N.K., Pechenyy E.A., Nuriev N.K.

Kazan National Research Technological University, Kazan, e-mail: nshaydullina@yandex.ru

The article sets the task of administering a queueing system with a group input stream and a degenerate stream of request leaving the system. The peculiarity of the problem under consideration is the limited life of request. As an example of such a QMS, a retail outlet is considered that receives a batch of goods – a group of requests with a limited shelf life. The performance indicator of this system was chosen the dependence of the amount of revenue on the volume of sales. Assuming that the initial speed of sale will not allow the sale of all goods, the task is to find the moment of time at which the sale process should be accelerated by reducing the price in order to obtain more revenue. To solve the problem, a simulation model was built and a number of experiments were carried out with various functions of sales speed: constant, linear, quadratic and exponential. In simulation experiments, various functional dependencies between selling speed and price reduction were used. It is shown that for some dependency types there is a single decision-making point, and for others it does not exist. In addition, it has been found that the optimal amount of price reduction depends on the ratio between the sales speed and the price reduction and does not depend on the speed function.

Keywords: queuing system, group input stream, limited life of request, simulation model

Область применения систем массового обслуживания (СМО) очень широка: производство, сфера услуг, компьютерные сети, телекоммуникационные системы. К СМО можно отнести любые системы, в которых предполагается многократное выполнение однотипных операций, случайных по длительности и времени начала [1]. Наряду с телекоммуникационными системами одним из самых распространенных примеров СМО является торговая сеть. Здесь в роли заявок на обслуживание могут выступать сами товары, тогда под обслуживанием заявки понимается покупка товара. Обычно товар для реализации приходит партиями, в этом случае речь идет о групповом потоке заявок. Если же товар имеет ограниченный срок годности, то система его продажи относится к типу «СМО с ограниченным временем жизни заявки» [2, 3].

В классической теории систем массового обслуживания основными показателями эффективности их функционирования являются время пребывания и ожидания заявок, число заявок в системе, вероятность отказа (потери заявки). Эти характеристики относят к качеству обслуживания [4, 5]. Кроме показателей качества обслуживания существуют характеристики эффективности функционирования СМО, которые можно отнести к группе показателей, отражающих экономические особенности системы [6].

Целью нашего исследования является администрирование группового входного потока заявок, имеющих ограниченное время жизни. Характеристикой эффективности функционирования системы выбран один из ее экономических показателей – выручка от продажи товара.

Постановка задачи

Итак, рассмотрим процесс продажи партии товара, которая поступает в торговую точку одномоментно и имеет ограниченный срок годности. В общем случае и объем партии, и момент поступления товара, и средняя скорость его реализации являются величинами случайными. В этой работе рассмотрен вырожденный случай, параметры которого будут описаны ниже.

Положим, что при определенной отпускной цене товара торговая точка может его реализовать с определенной скоростью. Она может быть как постоянной величиной, так и функционально зависеть от времени или иметь случайный характер. Допустим, что скорость продажи товара не позволяет реализовать весь пришедший объем. Поскольку существует зависимость между скоростью продажи товара и его ценой, то очевидным является предположение, что, снизив отпускную цену товара в некоторый момент времени, можно обеспечить рост спроса на этот товар. Задача состоит в том, чтобы найти моменты времени снижения цены и величину этого снижения, которые обеспечат большую выручку по сравнению с первоначальным планом продаж.

Для построения аналитической модели задачи введем необходимые обозначения.

Q – объем партии товара;

P_1 – первоначальная отпускная цена;

P_2 – цена после точки принятия решения;

v_1 – первоначальная скорость продаж;

v_2 – скорость продаж после снижения цены;

t_{end} – срок годности товара;

t^* – момент времени снижения цены;

R_1 – выручка при первоначальном плане продаж (базовая выручка);

R_2 – суммарная выручка при изменении цены в момент t^*.

В принятых обозначениях выручка при первоначальном плане продаж может быть получена по формуле

$$R_1 = P_1 Q_1, \qquad (1)$$

где

$$Q_1 = \int_0^{t_{end}} v_1(t)\,dt \; - \qquad (2)$$

это количество товара, проданного с нулевого момента времени до истечения срока годности со скоростью продажи $v_1(t)$. Графическая иллюстрация представлена на рис. 1.

Интенсифицируем продажи в момент времени t^*, снизив отпускную цену товара. Таким образом, общая выручка будет состоять из двух частей. Первая часть – выручка, полученная при продаже товара с первоначальной скоростью по первоначальной цене до момента t^*. Вторая часть – выручка, полученная при продаже товара с повышенной скоростью по пониженной цене с момента t^* до окончания срока годности:

$$R_2 = P_1 Q_1^* + P_2 Q_2^*, \qquad (3)$$

где

$$Q_1^* = \int_0^{t^*} v_1(t)\,dt \; - \qquad (4)$$

количество товара, проданного с нулевого момента времени до момента t^* со скоростью продажи $v_1(t)$,

$$Q_2^* = \int_{t^*}^{t_{end}} v_2(t)\,dt \; - \qquad (5)$$

количество товара, проданного с момента t^* до окончания срока годности со скоростью продажи $v_2(t)$. Графическая иллюстрация представлена на рис. 2.

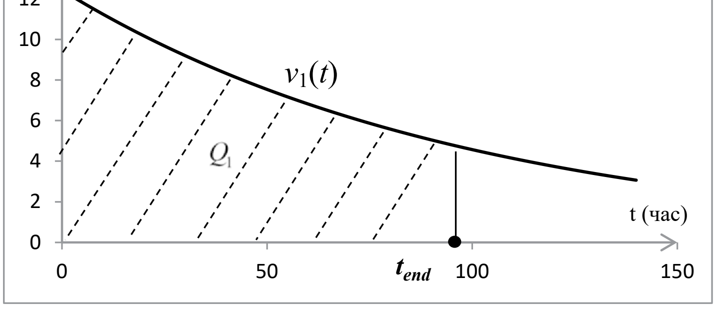

Рис. 1. Объем проданного товара

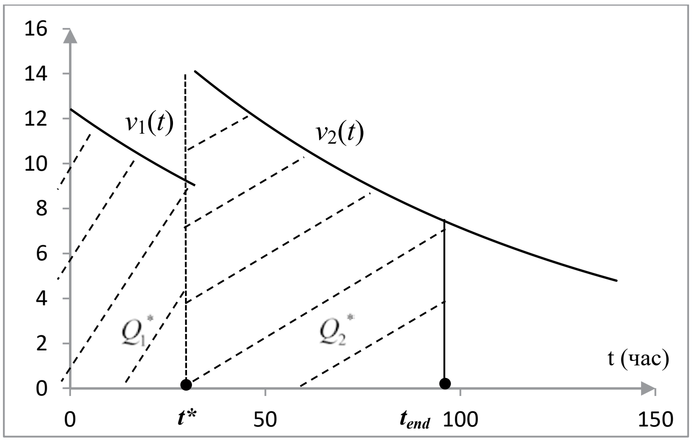

Рис. 2. Объем проданного товара с измененной ценой

Задача заключается в нахождении t^*, P_2, v_2, таких, что

$$R_2 = P_1\int_0^{t^*} v_1(t)\,dt + P_2\int_{t^*}^{t_{end}} v_2(t)\,dt \to max, \quad (6)$$

при условии

$$\int_0^{t^*} v_1(t)\,dt + \int_{t^*}^{t_{end}} v_2(t)\,dt \le Q.$$

Имитационная модель

Задача (6) является некорректной, поэтому был выбран имитационный способ решения. Очевидными входными параметрами построенной имитационной модели являются объем партии товара Q, срок годности товара t_{end}, первоначальная цена реализации P_1, первоначальная скорость продажи $v_1(t)$. И не совсем очевидным, но совершенно закономерным – зависимость между скоростью продажи и ценой $v_2(P_1/P_2)$.

В процессе имитации протестировано несколько функций $v_1(t)$: постоянная, линейная, экспоненциальная и квадратичная. Первой была рассмотрена постоянная скорость продажи. Коэффициенты других функций скорости подобраны так, чтобы значения базовой выручки были близки к варианту с постоянной скоростью.

На выходе мы получили набор векторов с компонентами: момент снижения цены – t^*, величина снижения цены $\Delta P = P_1 - P_2$, выручка – R_2.

Для процесса имитации были заданы следующие входные данные: Q = 1000 ед., t_{end} = 8 дней, P_1 = 100 д. ед., $v_1(t)$ = 8 ед./час. При 12-часовом рабочем дне за 8 дней торговая точка продаст 768 единиц продукции из 1000 возможных и получит базовую выручку 76800 д. ед.

Остальные функции скорости выбраны так, чтобы базовая выручка была близка к 76800 и значение функции скорости в нулевой момент времени было бы теоретически приемлемым. Для линейной скорости продажи $v_1(t) = -0{,}06t + 10{,}9$ базовая выручка составит R_1 = 76992, начальная скорость $v_1(0)$ = 10,9. Для экспоненциальной $v_1(t) = e^{2{,}52 - 0{,}01t}$: R_1 = 76697,75; $v_1(0)$ = 12,43. Для квадратичной $v_1(t) = -0{,}00025t^2 + 8{,}768$: R_1 = 76829,49; $v_1(0)$ = 8,768.

При определении зависимости между ценой товара и интенсивностью продажи мы исходили из практических соображений. Были рассмотрены следующие зависимости:

$$v_2 = v_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2, \quad (7)$$

$$v_2 = v_1 e^{\left(\frac{P_1}{P_2}-1\right)}, \quad (8)$$

$$v_2 = v_1\sqrt{\left(\frac{P_1}{P_2}\right)}, \quad (9)$$

$$v_2 = v_1 ln\left(\frac{P_1}{P_2}+1\right). \quad (10)$$

Десять лучших результатов в порядке убывания выручки для зависимости (7) представлены в табл. 1.

Результаты показывают, что для каждой функции скорости существует лучшее время для снижения цены – точка принятия решения. Заметим, что в малой окрестности этой точки расхождение в выручке составляет не более 0,5 %, и величина снижения цены одинакова – 20 д. ед.

Таблица 1

Лучшие значения выручки для зависимости (7)

$$v_2 = v_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^2$$

$v_1(t) = const = 8$			$v_1(t) = -0{,}06t + 10{,}9$			$v_1(t) = e^{2{,}52 - 0{,}01t}$			$v_1(t) = -0{,}00025t^2 + 8{,}768$		
t^*	ΔP	R_2	t^*	ΔP	R_2	t^*	ΔP	R_2	t^*	ΔP	R_2
базовая		76800	базовая		76992	базовая		76697,75	базовая		76829,49
44	20	87040	37	20	87184,25	33	20	86986,77	41	20	87075,35
45	20	87000	36	20	87070,4	34	20	86916,47	42	20	86984,2
43	20	86880	38	20	86968	32	20	86807,17	40	20	86908,16
46	20	86800	35	20	86895	35	20	86696,41	43	20	86776,24
42	20	86720	39	20	86753,25	31	20	86625,76	39	20	86740,57
47	20	86600	34	20	86718,4	36	20	86478,55	38	20	86572,59
41	20	86560	33	20	86540,6	30	20	86442,53	44	20	86568,82
40	20	86400	40	20	86540	37	20	86262,85	37	20	86404,24
48	20	86400	60	30	86380	29	20	86257,46	45	20	86361,95
68	30	86320	32	20	86361,6	57	30	86199,73	65	30	86308,15

Таблица 2

Лучшие значения выручки для зависимости (8)

$$v_2 = v_1 e^{\left(\frac{P_1}{P_2} - 1 \right)}$$

$v_1(t) = const = 8$			$v_1(t) = -0{,}06t + 10{,}9$			$v_1(t) = e^{2{,}52 - 0{,}01t}$			$v_1(t) = -0{,}00025t^2 + 8{,}768$		
t^*	ΔP	R_2	t^*	ΔP	R_2	t^*	ΔP	R_2	t^*	ΔP	R_2
базовая		76800	базовая		76992	базовая		76697,75	базовая		76829,49
88	60	81873,12	84	60	82223,66	83	60	81934,64	86	60	82075,32
93	70	81824,83	91	70	82042,9	91	70	81806,12	92	70	81941,74
87	60	81760	83	60	81881,8	82	60	81727,9	85	60	81658,46
79	50	81600	73	50	81791,5	90	70	81628,54	87	60	81596,22
92	70	81520	85	60	81761,53	71	50	81552	77	50	81536,07
80	50	81397	90	70	81660	84	60	81507,19	76	50	81496,65
86	60	81280	74	50	81574,64	81	60	81397,81	91	70	81473,91
89	60	81238,98	82	60	81524,8	72	50	81333,64	78	50	81274,89
78	50	81200	72	50	81464	70	50	81283,69	84	60	81239,05
81	50	81109,69	92	70	81397,1	89	70	81273,05	75	50	81129,22

Десять лучших результатов в порядке убывания выручки для зависимости (8) представлены в табл. 2.

Для зависимости (8) тоже нашлись единственные точки принятия решения. Значения самых лучших вариантов выручки еще ближе к максимальному. Но об окрестности точки принятия решения и однозначности величины скидки на товар говорить не приходится.

Для зависимостей (9) и (10) все совсем иначе – не существует такого момента времени, изменение цены в который даст прирост выручки относительно базовой. Лучшие результаты наглядно приведены в табл. 3.

Таким образом, если рассматривать функцию изменения скорости продаж v_2 как зависимость от отношения цен P_1 / P_2^2, то можно говорить о выпуклости функции v_2 как о необходимом условии существования точки принятия решения, позволяющей увеличить базовую выручку.

Таблица 3

Лучшие значения выручки для зависимостей (9) и (10)

$v_1(t) = const = 8$			$v_1(t) = –0,06t + 10,9$			$v_1(t) = e^{2,52 – 0,01t}$			$v_1(t) = –0,00025t^2 + 8,768$		
$v_2 = v_1\sqrt{\left(\frac{P_1}{P_2}\right)}$											
t^*	ΔP	R_2	t^*	ΔP	R_2	t^*	ΔP	R_2	t^*	ΔP	R_2
базовая		76800	базовая		76992	базовая		76697,75	базовая		76829,49
95	10	76758,95	95	10	76965,47	95	10	76673,21	95	10	76796,15
94	10	76717,89	94	10	76938,63	94	10	76648,42	94	10	76762,57
$v_2 = v_1 ln\left(\frac{P_1}{P_2}+1\right)$											
t^*	ΔP	R_2	t^*	ΔP	R_2	t^*	ΔP	R_2	t^*	ΔP	R_2
базовая		76800	базовая		76992	базовая		76697,75	базовая		76829,49
95	10	76537,99	95	10	76822,68	95	10	76541,12	95	10	76616,71
95	20	76519	95	20	76810,4	95	20	76529,76	95	20	76601,28

Заключение

Сформулирована задача нахождения момента времени для увеличения предполагаемой выручки при продаже партии товара с ограниченным сроком годности.

Построена имитационная модель для решения поставленной задачи. Проведен ряд экспериментов для разных функций скорости продажи, подобранных по величине предполагаемой выручки.

Сделан вывод о наличии точки принятия решения о снижении цены для определенных входных параметров и свойствах функций, определяющей зависимость скорости продажи от цены.

Список литературы

1. Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания // Итоги науки. Сер.: Теория вероятности. ВИНИТИ. М., 1965. С. 73–125.

2. Нуриев Н.К., Али А.А., Печеный Е.А. Моделирование однономенклатурного смешанного потока с ограниченным временем обслуживания // Вестник технологического университета. 2016. № 24. С. 120–122.

3. Рыжиков Ю.И., Уланов А.В. Расчет сети обслуживания с ограничением времени жизни заявок // XII Всероссийское совещание по проблемам управления (Москва, 16–19 июня 2014 г.). М., 2014. С. 8620–8624.

4. Хинчин А.Я. Математические методы теории массового обслуживания // Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. С. 7–148.

5. Алиев Т.И., Махаревс Э. Дисциплины обслуживания на основе матрицы приоритетов // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2014. № 6. С. 91–97.

6. Бирюкова Л.Г., Бобрик Г.И., Сагитов Р.В., Швед Е.В., Матвеев В.И. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 2019. 289 с.