

УДК 51-74:519.25

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ИНФРАКРАСНОГО СВЕТОВОГО ПОТОКА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

¹Григорьева Т.В., ^{1,2}Белобородова Т.Г., ²Иремадзе Э.О.

¹ФГБОУ ВО «Уфимский государственный нефтяной технический университет, филиал, Стерлитамак, e-mail: Bulgach2005@yandex.ru, Beltany2008@yandex.ru;

²ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет», филиал, Стерлитамак, e-mail: e.o.iremadze@strbsu.ru

В настоящее время характер производственного процесса быстро меняется, становится все более сложным, что связано с изменениями в потребительском спросе, сокращением жизненного цикла продукта. Это требует производственных технологий, которые могут легко адаптироваться к таким изменениям. В этом контексте искусственные нейронные сети являются эффективным способом решения проблемы. Большинство производственных процессов регулируются многими переменными параметрами, и по этой причине такие системы имеют случайный, сложный и неопределенный характер. Применение нейронных сетей для моделирования технологических процессов позволит повысить эффективность систем управления качеством, предоставив необходимый объем информации о процессе и дополнительные инструменты исследования, анализа и управления. В статье приводятся результаты моделирования нейронной сети для нахождения оптимальной мощности сушильных устройств, необходимой для полимеризации краски. В качестве моделей была выбрана искусственная нейронная сеть архитектуры многослойный перцептрон. Для построения искусственной нейронной сети использован программный продукт российского производства DeductorStudioAcademic 5.3. Было создано три модели нейросетей и проведен сравнительный анализ их эффективности. Показано, что наибольшую эффективность, одновременно как на обучающем, так и на тестовом множествах исходных данных, показывает искусственная нейронная сеть с 9 нейронами на единственном скрытом слое. Разработанная модель является эффективным инструментом для печатной промышленности.

Ключевые слова: математическая модель, нейронные сети, нейросетевая модель, многослойный перцептрон, Deductor Studio, корреляционный анализ

MATHEMATICAL MODEL OF FINDING THE OPTIMAL INFRARED LIGHT FLUX OF A TECHNOLOGICAL PROCESS

¹Grigoreva T.V., ^{1,2}Beloborodova T.G., ²Iremadze E.O.

¹Ufa State Petroleum Technical University, branch, Sterlitamak, e-mail: Bulgach2005@yandex.ru, Beltany2008@yandex.ru;

²Bashkir State University, branch, Sterlitamak, e-mail: e.o.iremadze@strbsu.ru

At present, the nature of the production process is rapidly changing, becoming more and more complex, which is associated with changes in consumer demand, a reduction in the product life cycle. This requires manufacturing technologies that can easily adapt to such changes. In this context, artificial neural networks are an effective way to solve a problem. Most manufacturing processes are governed by many variables and for this reason such systems are random, complex and uncertain. The use of neural networks for modeling technological processes will improve the efficiency of quality management systems by providing the necessary amount of information about the process and additional tools for research, analysis and management. The article presents the results of modeling a neural network to find the optimal power of drying devices required for paint polymerization. As models, an artificial neural network of the multilayer perceptron architecture was chosen. To build an artificial neural network, the Russian-made software product DeductorStudioAcademic 5.3 was used. Three models of neural networks were created and a comparative analysis of their effectiveness was carried out. It is shown that the greatest efficiency both on training and test sets of initial data is shown by an artificial neural network with 9 neurons on a single hidden layer. The developed model is an effective tool for the printing industry.

Keywords: mathematical model, neural networks, neural network model, multilayer perceptron, Deductor Studio, correlation analysis

В настоящее время характер производственного процесса меняется с большой скоростью, становится все более изощренным и происходят постоянные изменения из-за изменений в потребительском спросе и сокращения жизненного цикла продукта. Это требует производственных технологий, которые могут легко адаптироваться к таким изменениям. В этом контексте искусственные нейронные сети являются мощной технологией для решения этой проблемы.

Использование искусственных нейронных сетей также широко используется для мониторинга и контроля процессов. Качество процесса может быть обеспечено только в ходе мониторинга процесса посредством надлежащих измерений.

Практические разработки применения нейронных сетей для моделирования различного рода инженерных систем показывают, что нейросетевые модели точнее регрессионных и лишены ряда имеющихся у

регрессионных моделей недостатков [1, 2]. Применение нейронных сетей для моделирования технологических процессов позволит повысить эффективность систем управления качеством, предоставив необходимый объем информации о процессе и дополнительные инструменты исследования, анализа и управления.

В соответствии с вышеизложенным целью работы являлось создание нейросетевой модели, предназначенной для нахождения инфракрасного светового потока полиграфического процесса оксидации краски. Для достижения поставленной цели изучили применение нейросетевого моделирования в решении задач технологического процесса, построили наиболее подходящую модель нейронной сети для нахождения оптимальной мощности сушильных устройств, необходимой для полимеризации краски; сравнили результаты, полученные на основе нейронной сети с их реальными значениями. В качестве объекта исследования работы избраны технологические процессы оксидации краски.

Научной новизной представляемой работы является построение нейросетевой модели, предназначенной для нахождения инфракрасного светового потока полиграфического процесса оксидации краски.

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработанный на основе построенной нейросетевой модели программный продукт дает возможность с небольшой ошибкой устанавливать технологические параметры сушильных устройств, необходимые для оксидации краски. Благодаря этому разработанный проект является эффективным инструментом в печатной промышленности.

Материалы и методы исследования

В качестве исходных данных для построения математической модели инфракрасного светового потока полиграфического процесса оксидации краски использованы результаты работы типографского станка в течение трех месяцев. Экспериментальные данные были занесены в электронную таблицу для последующего преобразования в формат CSV с разделителем semicolon. Общий объем составил 300 записей, каждая из которых содержала следующие значения: номер эксперимента; скорость, м/с; мощность, % (максимум 158 кВт); температура окружающей среды, °C; влажность, %; брак, %; тираж, шт.; независимый брак, шт.; суммарный брак, шт.

Целью построения модели процесса печати является снижение себестоимости изготовления печатной продукции путём

снижения доли брака. Под браком подразумевается только та доля печатной продукции, которая оказалась непригодна вследствие неоптимального инфракрасного потока для оксидации краски. Для нахождения доли контролируемого брака составлена формула (1) как разница между долями суммарного и независимого брака:

$$\text{брак}_{\text{контр.}} = \frac{\text{брак}_{\text{сумм.}} - \text{брак}_{\text{незав.}}}{\text{тираж}} \cdot 100 \% \quad (1)$$

Переход к относительным величинам позволяет отказаться от такого параметра, как тираж. Стоит отметить, что данная величина является постоянной характеристикой оборудования и, таким образом, не может рассматриваться в качестве регулирующего параметра при оптимизации. Для всех записей в исходной электронной таблице был произведен расчёт контролируемого брака по вышеприведённой формуле.

Максимальная мощность инфракрасной сушилки, которую можно получить на рассматриваемом оборудовании, составляет 158 кВт. Значения мощности из исходных данных были переведены из относительной величины (*power*) в абсолютную (*power2*) по формуле

$$\text{power2} = \text{power} \cdot \frac{158 \text{ кВт}}{100 \%} \quad (2)$$

В качестве входных регулируемых параметров остались четыре значения: скорость (*speed*), м/с; температура окружающей среды (*temperature*), °C; влажность (*humidity*); мощность (*power2*), кВт. В качестве выходного параметра рассматриваем контролируемый брак (*defect2*), %. Фрагмент данных для построения модели представлен в табл. 1. Статистические данные по всем параметрам модели приведены в табл. 2.

С целью устранения незначительных входных параметров выполнен корреляционный анализ Пирсона [3], результаты которого представлены в табл. 3.

Для каждого из входных параметров наблюдается отрицательный коэффициент корреляции Пирсона. Это свидетельствует о том, что в общем случае наблюдается обратная зависимость между долей контролируемого брака и каждым из параметров: скоростью, температурой, влажностью и мощностью. Однако тот факт, что коэффициенты корреляции не равны 1, показывает, что зависимость не является точно линейной, а, следовательно, возможно наличие экстремальных точек. Данный вывод согласуется с теоретическими сведениями.

Таблица 1

Фрагмент экспериментальных данных

№ эксперимента	Скорость, м/с	Температура окружающей среды, °С	Влажность, %	Мощность, % (макс. 158 кВт)	Контролируемый брак, %
1	3,43	21	60	93,22	5,23
2	2,78	20	58	79	7,24
...					...
299	2,17	23	52	71,1	15,83
300	2,29	20	54	71,1	16,71

Таблица 2

Статистика параметров модели

Параметр	Минимум	Максимум	Среднее
Скорость	2,000	3,990	2,938
Температура	20,000	28,000	24,053
Влажность	40,000	60,000	49,573
Мощность	71,100	109,200	75,951
Контролируемый брак	0,256	29,621	13,899

Таблица 3

Результаты корреляционного анализа

Параметр	Коэффициент корреляции Пирсона	t-критерий Стьюдента
Скорость, м/с	-0,175	3,053
Температура, °С	-0,524	10,567
Влажность, %	-0,796	22,587
Мощность, кВт	-0,421	7,972

Согласно справочным данным, критическое значение t-критерия Стьюдента для 295 степеней свободы и доверительной вероятности 95% составляет 1,968. Полученные данные указывают, что все входные параметры не менее критического значения, следовательно, являются значащими для данной модели.

Математическая модель полиграфического процесса. Для обучения искусственных нейронных сетей применяется набор исходных данных, рассмотренных выше. В качестве моделей была выбрана искусственная нейронная сеть архитектуры многослойный перцептрон. Это нейросеть прямого распространения показала наилучшую эффективность для решения задач аппроксимации непрерывных параметров. К тому же многослойный перцептрон отличается простотой строения, выработанными эффективными алгоритмами обучения и высоким быстродействием [4–6].

Для построения искусственной нейронной сети использован программный продукт российского производства *Deductor Studio Academic 5.3*. Редакция *Academic* является бесплатной академической версией. Поддерживаются только три источника и приемника данных: *Deductor Warehouse*, *Deductor Data File* и текстовые файлы.

Создание нейронной сети начинается с импорта файла с исходными данными. В отрывшемся окне программы «Сценарии» открывается контекстное меню и выбирается «Мастер импорта». Выбирается пункт *Text – Тестовый файл (Direct)*. На втором шаге в окне мастера импорта выбирается ранее созданный CSV файл, кодировка *ASCII (MSWindows)*. Флаг «Первая строка является заголовком» оставляется выбранным. Пункт «Начать импорт со строки» также оставляется равным «1». На третьем шаге параметры формата импорта оставляются неизменными. На четвертом шаге сим-

волом разделителем устанавливается пункт «Точка с запятой». Флаг «Считать последовательные разделители одним» оставляется неактивным. На шестом шаге настраиваются параметры столбцов. Для столбцов *speed*, *temperature*, *humidity*, *power2* устанавливаются: Тип данных – «Вещественный»; Вид данных – «Непрерывный»; Назначение – «Входное». Для столбца *defect2* устанавливаются: Тип данных – «Целый»; Вид данных – «Непрерывный»; Назначение – «Выходное». На седьмом шаге завершается процесс импорта данных из текстового файла. На восьмом шаге устанавливаются следующие флаги: «Таблица», «Статистика», «Сведения». На девятом шаге происходит окончание импорта.

Обучение нейросетей происходит следующим образом: для создания нейросети выбираем соответствующий файл исходных данных, расположенный в области «Сценарии». В появившемся контекстовом меню выбирается пункт «Мастер обработки». В появившемся окне в группе «DataMining» выбирается пункт «Нейросеть» – «Многослойная нейронная сеть». Так как в процессе импорта все поля уже были настроены, то оставляем поля без изменений, активизируем кнопку «Настройка нормализации».

Нормализация столбца *speed* будет происходить следующим образом: Привести к диапазону. Диапазон значений – активно; Минимум – 0; Максимум – 4; Параметры линейного преобразования: Привести к диапазону – активно; Минимум диапазона – -1; Максимум диапазона – 1.

Нормализация столбца *temperature*: Привести к диапазону. Диапазон значений – активно; Минимум – 0; Максимум –

28; Параметры линейного преобразования: Привести к диапазону – активно; Минимум диапазона – -1; Максимум диапазона – 1.

Нормализация столбца *humidity*: Привести к диапазону. Диапазон значений – активно; Минимум – 0; Максимум – 100; Параметры линейного преобразования: Привести к диапазону – активно; Минимум диапазона – -1; Максимум диапазона – 1.

Нормализация столбца *power2*: Привести к диапазону. Диапазон значений – активно; Минимум – 0; Максимум – 158; Параметры линейного преобразования: Привести к диапазону – активно; Минимум диапазона – -1; Максимум диапазона – 1.

Нормализация столбца *defect2*: Привести к диапазону. Диапазон значений – активно; Минимум – 0; Максимум – 100; Параметры линейного преобразования: Привести к диапазону – активно; Минимум диапазона – 0; Максимум диапазона – 1.

На третьем шаге задается размер тестового и обучающего множеств. «Способ разделения исходного множества данных» оставляется равным «Случайно». Размеры множеств в процентах: обучающее: 80,00% (240 строк); тестовое: 20,00% (60 строк).

На четвертом шаге настраивается конфигурация создаваемой нейросети. Так как нормализация выходного поля производилась в интервале от 0 до 1, выбираем в качестве активационной функцию сигмоиду, логистическую функцию, область значений которой совпадает с данным диапазоном.

Необходимое количество нейронов в скрытых слоях перцептрона можно определить по формуле (3), являющейся следствием из теорем Арнольда – Колмогорова – Хехт – Нильсена [7]:

$$\frac{N_y \cdot Q}{1 + \log_2 Q} \leq N_w \leq N_y \cdot \left(\frac{Q}{N_x} + 1 \right) \cdot (N_x + N_y + 1) + N_y, \quad (3)$$

$$\frac{1 \cdot 240}{1 + \log_2 240} \leq N_w \leq 1 \cdot \left(\frac{240}{4} + 1 \right) \cdot (4 + 1 + 1) + 1,$$

$$27 \leq N_w \leq 367,$$

где N_y – размерность выходного сигнала ($N_y = 1$); N_w – необходимое число синаптических связей; N_x – размерность входного сигнала ($N_x = 4$); Q – число элементов множества обучающих примеров ($Q = 240$).

Оценив с помощью формулы (3) необходимое число синаптических связей N_w , можно рассчитать необходимое число нейронов в скрытых слоях. Например, число нейронов в скрытых слоях двухслойного перцептрона будет равно

$$N = \frac{N_w}{N_x + N_y}. \quad (4)$$

Минимальное число нейронов:

$$N = \frac{27}{4+1} = 5,4 \approx 6.$$

Максимальное число нейронов:

$$N = \frac{367}{4+1} = 73,4 \approx 73.$$

Для обучения первой нейросети выберется минимальное значение числа нейронов на единственном скрытом слое – 6 (рис. 1, а). На пятом шаге (рис. 1, б) оставляется значение по умолчанию: шаги спуска и подъема и алгоритм *Resilient Propagation*.

На шестом шаге настраиваются условия остановки обучения. Считается пример распознанным, если ошибка в вычислении доли брака *defect2* составила менее 1%. Так как выходной параметр принимает значе-

ния в интервале [0; 100], а линейное преобразование осуществляется из диапазона [0; 1], то нормированное значение ошибки будет составлять

$$\varepsilon = \frac{1\%}{100\%} \cdot \frac{1-0}{100-0} = 0,0001. \quad (5)$$

Устанавливается значение ошибки равным 0,0001. Количество эпох увеличивается в 10 раз, устанавливая равным 100000 (рис. 2).

На седьмом шаге завершается процесс обучения (рис. 2). Обучение завершилось после превышения количества эпох. Время обучения 1 мин 30 с (90 с).

На восьмом шаге «*Определение способов отображения*» выбираются все пункты следующих групп: *Data Mining, Табличные данные, Общие*. Результаты обучения нейросети представлены на рис. 3.

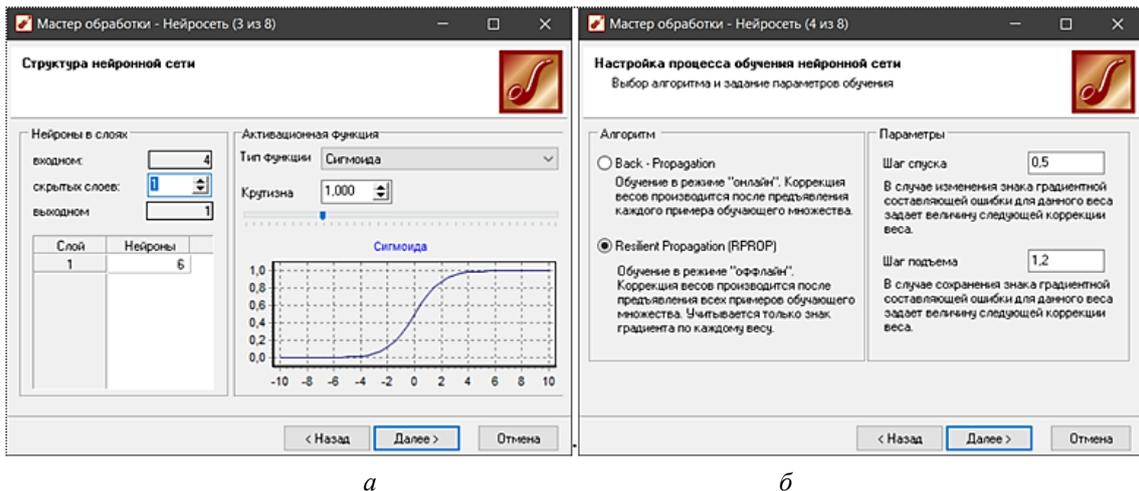


Рис. 1. Настройка процесса обучения нейронной сети

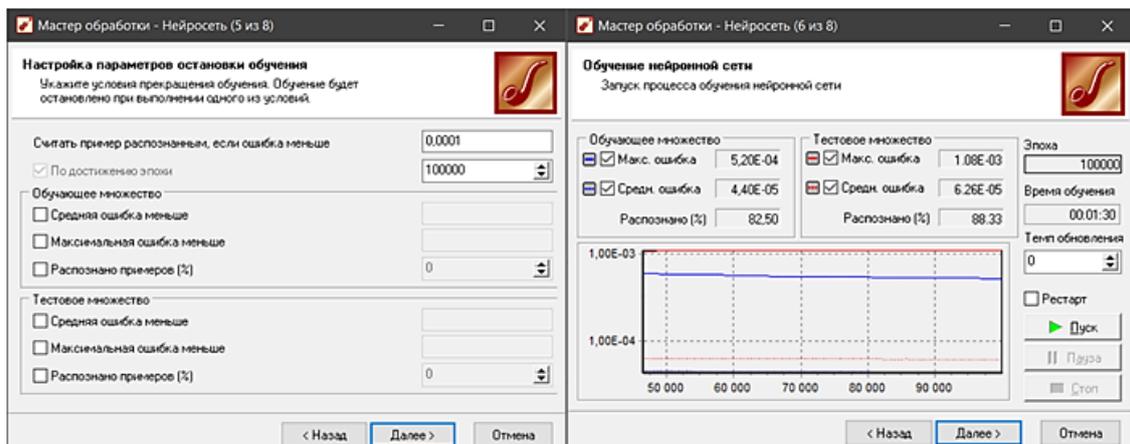


Рис. 2. Настройка параметров остановки обучения и результат обучения сети 4х6х1

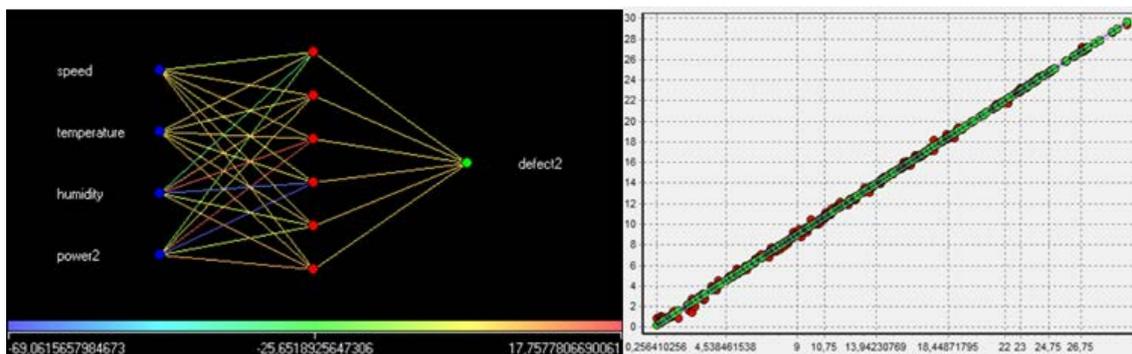


Рис. 3. Графы и диаграмма рассеивания нейросети 4x6x1

Таблица 4

Сравнение нейросетей

Нейросеть	I	II	III
Число скрытых слоев	1	1	2
Число нейронов	6	73	6 / 6
Время обучения, с	90	68	204
Количество эпох	100 000	2 488	54 905
Обучающее множество			
Распознано, %	82,50	86,25	90,00
Максимальная ошибка	0,000520	0,001280	0,000331
Средняя ошибка	0,0000440	0,0000485	0,0000283
Тестовое множество			
Распознано, %	88,33	85,00	75,00
Максимальная ошибка	0,001080	0,000754	0,000380
Средняя ошибка	0,0000626	0,0000617	0,0000592

Создается ещё одна нейросеть с одним скрытым слоем. Параметры будут аналогичны предыдущей сети за исключением числа нейронов на скрытом слое – оно равно максимальному значению – 73 нейрона. Обучение было прервано на 2488 эпохе ввиду начавшегося переобучения модели. Эффект переобучения выражается прекращением снижения значения средней ошибки на тестовом множестве исходных данных и начинающимся неуклонным ростом этого значения. Время обучения 1 мин 8 с (68 с).

Третья нейросеть создается с двумя скрытыми слоями. Для сравнения также возьмем максимальное число синаптических связей, равное 367. Количество нейронов в обоих скрытых слоях примем одинаковым. Тогда формула количества синаптических связей равна

$$N \cdot N_x + N^2 + N \cdot N_y = N_w. \quad (6)$$

$$N \cdot 4 + N^2 + N \cdot 1 = 367.$$

Решая полученное уравнение, находим его положительный корень: $N = 5,971 \approx 6$.

Таким образом, создаем сеть с двумя скрытыми слоями по 6 нейронов в каждом. Остальные настройки остаются аналогичными предыдущим нейросетям. Обучение было прервано на 54905 эпохе ввиду начавшегося переобучения модели. Время обучения 3 мин 24 с (204 с). Сравнение результата обучения всех трех нейросетей приведено в табл. 4.

Анализируя полученные в табл. 4 результаты, можно сделать вывод, что использование двух и более скрытых слоев нецелесообразно. Получающиеся модели обладают значительно более низкой эффективностью на тестовых данных, что свидетельствует о явлении переобучения. Данное явление обусловлено чрезмерно высокой размерностью сети для данного набора обучающих данных.

Таким образом, поиск оптимальной нейросетевой модели следует продолжать

среди многослойных перцептронов с одним скрытым слоем. Количество нейронов на данном слое было оценено в интервале [6, с. 73]. Поиск осуществляли методом расчётной сетки в логарифмическом масштабе [8; 9]. Так, разбивая интервал на 4 участка, получали точки: 11, 21, 39. Определив, что наилучшие результаты дала нейронная сеть с 1 нейронами на скрытом слое, методом бисекции всё также в логарифмическом масштабе для каждой нейросети вычисляли долю распознанных примеров на обучающем и тестовом множествах. Результаты представлены в табл. 5.

Исходя из полученных данных, наибольшую эффективность, одновременно как на обучающем, так и на тестовом множествах исходных данных, показывает искусственная нейронная сеть с 9 нейронами на единственном скрытом слое (рис. 4). Для данной сети обучение завершилось после превышения количества эпох. Время обучения 2 мин 2 с (122 с).

Провели анализ эффективности нейросетевой модели. Среднеквадратическое

отклонение для задачи множественной регрессии определяется по формуле

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - k - 1}, \quad (7)$$

где y_i – фактическое значение выходной переменной в i -м примере; \hat{y}_i – расчётное значение выходной переменной в i -м примере; n – количество примеров; k – количество факторов.

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = 8,758;$$

$$\sigma = \frac{8,758}{300 - 4 - 1} = 0,0297.$$

Стандартное отклонение находим по формуле

$$S = \sqrt{\sigma}, \quad (8)$$

$$S = \sqrt{0,0297} = 0,172.$$

Таблица 5

Сравнение нейросетей с одним скрытым слоем

Число нейронов на скрытом слое	Доля распознанных примеров, %	
	обучающее множество	тестовое множество
6	82,50	88,33
8	89,17	85,00
9	92,92	86,67
10	92,50	85,00
11	89,17	85,00
21	89,17	78,33
39	85,83	83,33
73	86,25	85,00

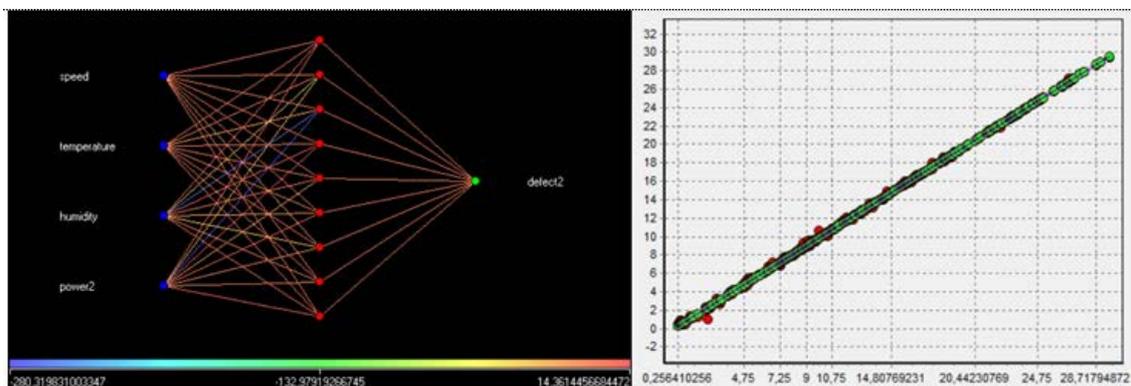


Рис. 4. Граф и диаграмма рассеивания нейросети 4x9x1

Для оценки качества нейросетевой модели используется множественный коэффициент корреляции, вычислив его через коэффициент детерминации

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad (9)$$

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - 13,899)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - 13,899)^2} = \frac{16343,989}{17665,563} = 0,925.$$

Следовательно, около 92,5% вариации зависимой переменной учтено в нейросетевой модели и обусловлено влиянием включенных факторов.

Скорректированный коэффициент детерминации вычисляется по формуле

$$R_{adj}^2 = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{n-1}{n-k}. \quad (10)$$

$$R_{adj}^2 = 1 - (1 - 0,925) \cdot \frac{300-1}{300-4} = 0,915.$$

Множественный коэффициент корреляции составит: $R = \sqrt{0,915} = 0,957$.

Результаты исследования и их обсуждение

Таким образом, было показано, что применение нейросетей для решения задач аппроксимации зависимостей математических моделей является высокоэффективным подходом и наиболее действенным. Однако в процессе поиска оптимальной размерности нейронной сети следует учитывать эффект переобучения, который, несмотря на высокую точность для обучающих примеров, приводит к тому, что нейросеть перестает адекватно описывать исследуемый процесс. В ходе построения нейросетевой модели в данной работе учитывался риск присутствия данного эффекта и в случае его возникновения процесс обучения прекращался.

Заключение

Таким образом, в качестве математической модели исследуемого процесса была выбрана искусственная нейронная сеть

типа многослойный перцептрон с одним скрытым слоем. Для программной реализации обученной нейронной сети с целью её дальнейшего использования в составе клиентского приложения, так и в составе программного обеспечения программируемого логического контроллера (ПЛК), был выбран язык программирования C#.

Практическая значимость работы заключается в том, что разработанный программный продукт на основе созданной нейронной сети дает возможность с небольшой ошибкой устанавливать мощность инфракрасного потока, необходимого для наилучшей оксидации краски при различных внешних факторах. Благодаря этому разработанная модель является эффективным инструментом в печатной промышленности.

Список литературы

1. Галустов Г.Г., Седов А.В. Математическое моделирование и прогнозирование в технических системах: учебное пособие. Ростов н/Д.: Издательство ЮФУ, 2016. 107 с.
2. Домашнев П.А. Разработка и исследование нейросетевых инструментов моделирования и управления сложными технологическими процессами: дис. ... канд. техн. наук. Липецк, 2006. 199 с.
3. Григорьева Т.В., Белобородова Т.Г., Барменкова Е.А. Корреляционно-регрессионный анализ выявления факторов, влияющих на производительность компании (на примере ПАО «ГАЗПРОМ») // Материалы 46-й Всероссийской научно-технической конференции молодых ученых, аспирантов и студентов с международным участием. Том 2. (Октябрьский, 26 апреля 2019 г.). Уфа: Издательство Уфимского государственного нефтяного технического университета, 2019. С. 77–80.
4. Воловиков Б.П. Стратегическое прогнозирование развития промышленного предприятия на основе метода нейронных сетей и аппарата нечеткой логики // Стратегический менеджмент. 2011. № 4. С. 256–268.
5. Головкин В.А., Краснопрошин В.В. Нейросетевые технологии обработки данных: учеб. пособие. Минск: БГУ, 2017. 263 с.
6. Ясницкий Л.Н. Интеллектуальные системы. М.: Лаборатория знаний, 2016. 221 с.
7. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Пер. с польск. И.Д. Рудинского. 2-е изд., стереотип. М.: Горячая линия – Телеком, 2013. 384 с.
8. Сток Д., Уотсон М. Анализ статистических данных: учебник / Под науч. ред. М.Ю. Турунцевой; пер. с англ. В. Акимова, Б. Гафарова, М. Леонова и др. М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2015. 865 с.
9. Никонов О.И., Крутчиков С.В., Медведева М.А. Математическое моделирование и методы принятия решений: учебное пособие. 2-е изд., стер. М.: Флинта, Изд-во Урал-ун-та, 2017. 100 с.