

УДК 519.65

ЧАСТОТНАЯ МОДЕЛЬ СГЛАЖИВАЮЩЕГО КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА И ЕЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Воскобойников Ю.Е.

*ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет
(Сибстрин)», Новосибирск, e-mail: voscob@mail.ru;*

*ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет»,
Новосибирск, e-mail: voscob@mail.ru*

Сглаживающий кубический сплайн дефекта единица является достаточно универсальным и эффективным инструментом для фильтрации шумов измерения различной статистической природы, и поэтому сплайн часто используется при обработке экспериментальных данных. Такая популярность отчасти обусловлена тем, что на всем интервале определения сплайна его первая и вторая производные непрерывны и поэтому сплайн можно использовать не только для фильтрации шума (погрешностей) измерения, но и для устойчивого вычисления первой производной по зашумленным значениям обрабатываемой функции. Сплайн имеет некоторый управляющий параметр – параметр сглаживания, от величины которого существенно зависит ошибка сглаживания зашумленных данных и выбор которого является основной проблемой при использовании сглаживающих сплайнов на практике. Предложены несколько алгоритмов выбора, позволяющие с приемлемой для практики точностью оценить оптимальное значение параметра сглаживания, при котором ошибка сглаживания минимальна. Однако такой подход к построению сплайна не позволяет анализировать и синтезировать сглаживающий сплайн как фильтр низкой частоты, которым сплайн по принципу своей работы и является. Поэтому в данной работе предлагается частотная модель сглаживающего кубического сплайна, в которую входят основные параметры сплайна, включая и параметр сглаживания. Получены амплитудно-частотная характеристика сплайна и импульсная переходная функция сплайна – аппаратная функция сплайна. Введены понятия эквивалентная ширина аппаратной функции и разрешающая способность сплайна. Приводится пример выбора параметра сглаживания из решения задачи синтеза сплайна с заданной величиной эквивалентной ширины аппаратной функции.

Ключевые слова: сглаживающий кубический сплайн, частотная модель сплайна, разрешающая способность сплайна, выбор параметра сглаживания из решения задачи синтеза сплайна

FREQUENCY MODEL OF A SMOOTHING CUBIC SPLINE AND IT'S CHARACTERISTICS

Voskoboynikov Yu.E.

*Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin),
Novosibirsk, e-mail: voscob@mail.ru;*

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, e-mail: voscob@mail.ru

The smoothing cubic defect spline unit is a fairly versatile and effective tool for filtering measurement noise of various statistical nature, and therefore the spline is often used in the processing of experimental data. This popularity of the part is due to the fact that the first and second derivatives of the spline are continuous over the entire interval of the definition of the spline, and therefore the spline can be used not only to filter the noise (errors) of the measurement, but also for the stable calculation of the first derivative from the noisy values of the processed function. The spline has a certain control parameter – the smoothing parameter, on the value of which the error of smoothing noisy data depends significantly and the choice of which is the main problem when using smoothing splines in practice. Several selection algorithms are proposed that allow estimating the optimal value of the smoothing parameter with an accuracy acceptable for practice, at which the smoothing error is minimal. However, such an approach to the construction of a spline does not allow analyzing and synthesizing a smoothing spline as a low-frequency filter, which the spline is by the principle of its operation. Therefore, in this paper we propose a frequency model of a smoothing cubic spline, which includes the main parameters of the spline, including the smoothing parameter. The amplitude-frequency characteristic of the spline and the pulse transient function of the spline – the hardware function of the spline – are obtained. The concepts of the equivalent width of the hardware function and the resolution of the spline are introduced. An example of the choice of the smoothing parameter from the solution of the problem of spline synthesis with a given resolution is given.

Keywords: smoothing cubic spline, frequency model of the spline, resolution of the spline, the choice of the smoothing parameter from the solution of the problem of synthesis of the spline

Сглаживающие кубические сплайны (СКС) находят широкое применение для фильтрации шумов измерений экспериментальных данных или, другими словами, для сглаживания зашумленных данных [1, 2]. К основному преимуществу СКС по сравнению с другими алгоритмами фильтрации можно отнести тот факт, что сглаживающий

сплайн и его первые две производные являются непрерывными функциями на всем интервале построения сплайна. Это позволяет использовать СКС для устойчивого вычисления производных по зашумленным измерениям обрабатываемой функции, в частности в задачах непараметрической идентификации как линейных [3–5], так и нелинейных

[6, 7] динамических систем. Для последнего класса систем СКС используется для вычисления смешанных производных [8]. СКС имеет некоторый управляющий параметр – параметр сглаживания, от величины которого существенно зависит ошибка сглаживания зашумленных данных [2, 9]. Выбор этого параметра является основной проблемой при использовании сглаживающих сплайнов на практике. Предложены несколько алгоритмов выбора, позволяющие с приемлемой для практики точностью оценить оптимальное значение параметра сглаживания (ошибка сглаживания минимальна) при различной априорной информации о дисперсии шума измерений [2, 8]. Хотя СКС по принципу своей работы является низкочастотным фильтром (удаляющим высокочастотные – шумовые составляющие обрабатываемого сигнала) традиционный подход к построению СКС не позволяет интерпретировать СКС как такой фильтр и, как следствие, решать задачи анализа и синтеза СКС в терминах низкочастотного фильтра и его характеристик, которые естественны и понятны экспериментатору.

Поэтому в данной работе предлагается частотная модель СКС и вводятся динамические характеристики СКС, позволяющие решать задачи анализа и синтеза СКС как низкочастотного фильтра, а именно:

- строится амплитудно-частотная характеристика СКС, включающая все основные параметры СКС;
- вводятся понятия аппаратной функции сплайна и эквивалентной ширины аппаратной функции сплайна;
- предлагается процедура синтеза СКС (выбор параметра сглаживания) по заданной величине эквивалентной ширины аппаратной функции.

Материалы и методы исследования

В начале приведём некоторые определения, нужные для построения частотной модели СКС [1, 9]. Предположим, что на интервале $[T_1, T_2]$ заданы n узлов $t_1 = T_1 < t_2 < \dots < t_n = T_2$ и в этих узлах измерены значения функции:

$$\tilde{f}_j = f(t_j) + \eta_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где η_j – случайный шум (погрешность) измерений с нулевым средним и дисперсией σ_η^2 (равноточные измерения). Функция $S_{n,\alpha}(t)$ называется сглаживающим кубическим сплайном дефекта единица, если: а)

на каждом отрезке $[t_j, t_{j+1})$ функция $S_{n,\alpha}(t)$ является кубическим многочленом вида

$$S_{n,\alpha}(t) = a_j + b_j(t - t_j) + c_j(t - t_j)^2 + d_j(t - t_j)^3; \quad (2)$$

б) функция $S_{n,\alpha}(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на всём интервале $[T_1, T_2]$.

Сглаживающий кубический сплайн $S_{n,\alpha}(t)$ в общем случае не проходит через точки (t_j, \tilde{f}_j) , а проходит в некоторой окрестности (её размеры определяются величиной параметра сглаживания) от этих точек, обеспечивая тем самым сглаживание (фильтрацию) шума измерений. Для однозначного определения коэффициентов СКС (2) в узлах t_1, t_n задаются краевые условия сплайна, из которых наиболее часто используют:

– условия на значения первой производной вида

$$S'_{n,\alpha}(t_1) = s'_1, \quad S'_{n,\alpha}(t_n) = s'_n; \quad (3)$$

– условия на нулевые значения второй производной

$$S''_{n,\alpha}(t_1) = 0; \quad S''_{n,\alpha}(t_n) = 0; \quad (4)$$

– или сочетание условий (3), (4) (например, в узле t_1 задается (3), а в t_n – условие (4)).

Доказано, что СКС, построенный при краевых условиях (3) или (4), доставляет минимум функционалу [1]:

$$F_\alpha(S) = \alpha \int_{t_1}^{t_n} |S''(t)|^2 dt + \sum_{j=1}^n p_j^{-1} (\tilde{f}_j - S(t_j))^2, \quad (5)$$

где p_j – весовые множители, отражающие точность j -го измерения \tilde{f}_j (в случае равноточных измерений задаются одинаковыми, например $p_j \equiv 1$), α – параметр сглаживания.

Перейдем к построению частотной модели СКС. Для этого представим СКС в виде «черного» ящика, на вход которого поступает последовательность измеренных значений $\tilde{f}_j, j = 1, \dots, n$, а выходом является функция $S_{n,\alpha}(t)$ с непрерывными производными до второй включительно и определенная на интервале $[T_1, T_2]$. При этом будем полагать, что шаг сетки равный и равен Δ_t и весовые множители p_j одинаковы и равны p .

Первоначально установим связь между значениями $\tilde{f}_j, j = 1, \dots, n$, и вторыми производными M_j сплайна $S_{n,\alpha}(t)$ в узлах t_j . За исключением двух первых и двух последних узлов эта связь выражается следующим разностным уравнением [1, 2]:

$$\beta_\alpha M_{j-2} + \mu_\alpha M_{j-1} + \lambda_\alpha M_j + \mu_\alpha M_{j+1} + \beta_\alpha M_{j+2} = \frac{\tilde{f}_{j+1} - 2\tilde{f}_j + \tilde{f}_j}{\Delta_t}, \quad j = 3, \dots, n - 2. \quad (6)$$

В формуле (6)

$$\beta_\alpha = \frac{\alpha p}{\Delta_t^2}, \quad \mu_\alpha = \frac{\Delta_t}{6} - \frac{4\alpha p}{\Delta_t^2},$$

$$\lambda_\alpha = \frac{2\Delta_t}{3} + \frac{6\alpha p}{\Delta_t^2}. \quad (7)$$

Уравнение (6) отражает структуру дискретного фильтра, преобразующего входную последовательность $\{\tilde{f}_j\}$ в последовательность $\{M_j\}$. Для построения частотной характеристики такого фильтра обратимся к так называемому D -преобразованию бесконечной последовательности $\{h_j\}$, $j=1, \dots, \infty$, определяемому соотношением

$$H_D(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \exp\left(-\frac{i(j-1)\omega}{\Delta_t}\right).$$

где $i = \sqrt{-1}$. Заметим, что $H_D(\omega)$ является периодической функцией с периодом $2\pi / \Delta_t$. Обозначим через $M_D(\omega)$, $\tilde{F}_D(\omega)$ – D -преобразования дискретных последовательностей $\{M_j\}$, $\{\tilde{f}_j\}$. Тогда частотная характеристика рассматриваемого дискретного фильтра определяется как отношение $\frac{M_D(\omega)}{\tilde{F}_D(\omega)}$. С учетом свойств D -преобразова-

ния для сдвинутых последовательностей $M_{j-2}, M_{j-1}, M_{j+1}, M_{j+2}, \tilde{f}_{j-1}, \tilde{f}_{j+1}$ [], получаем частотную характеристику дискретного преобразования $\{\tilde{f}_j\} \Rightarrow \{M_j\}$:

$$K_\alpha(\omega) = \frac{2}{\Delta_t \cdot \omega^2} \cdot \left[\frac{\sin(\frac{\omega \cdot \Delta_t}{2})}{\frac{\omega \cdot \Delta_t}{2}} \right]^2 \cdot \left[\frac{1 - \cos(\omega \cdot \Delta_t)}{\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha \cos(\omega \cdot \Delta_t) + 2\beta_\alpha \cos(2\omega \cdot \Delta_t)} \right], \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (12)$$

Характеристика (12), по сути, является амплитудно-частотной характеристикой динамического звена $\{\tilde{f}_j\} \Rightarrow \{M_j\}$. Введем понятие аппаратной функции СКС $k_\alpha(t)$ как обратное преобразование Фурье от частотной характеристики (12):

$$k_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(\omega) \cdot \exp(i\omega t) d\omega. \quad (13)$$

Возникает вопрос: как использовать понятия частотной характеристики и аппаратной функции СКС для его анализа и синтеза? Предположим, что функция $f(t)$ имеет Фурье-образ, равный $\Phi F(\omega)$. Тогда Фурье-

$$\frac{2}{\Delta_t} \cdot \left[\frac{\cos(\omega \cdot \Delta_t) - 1}{\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha \cos(\omega \cdot \Delta_t) + 2\beta_\alpha \cos(2\omega \cdot \Delta_t)} \right],$$

$$-\frac{\pi}{\Delta_t} \leq \omega \leq \frac{\pi}{\Delta_t} \quad (8)$$

Далее рассмотрим преобразование дискретных значений $\{M_j = S_{n,\alpha}^{(2)}(t_j)\}$ второй производной в непрерывную вторую производную сплайна:

$$S_{n,\alpha}^{(2)}(t) = M_{j-1} \cdot \frac{t_j - t}{\Delta_t} + M_j \cdot \frac{t - t_{j-1}}{\Delta_t}, \quad (9)$$

что соответствует линейной интерполяции с частотной характеристикой:

$$\left[\frac{\sin(\frac{\omega \cdot \Delta_t}{2})}{\frac{\omega \cdot \Delta_t}{2}} \right]^2, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (10)$$

Для нахождения $S_{n,\alpha}^{(2)}(t)$ по второй производной $S_{n,\alpha}^{(2)}(t)$ выполним двойное интегрирование, что соответствует преобразованию с частотной характеристикой:

$$\frac{1}{(i \cdot \omega)^2}, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (11)$$

Очевидно, что частотная характеристика СКС равна произведению частотных характеристик (8), (10), (11) и определяется выражением

образ $\Phi \bar{S}_\alpha(\omega)$ сплайна $\bar{S}_\alpha(t)$, построенного по точным значениям $\{f_j = f(t_j)\}$, будет определяться выражением

$$\Phi \bar{S}_\alpha(\omega) = K_\alpha(\omega) \Phi F(\omega), \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (14)$$

В соответствии с теоремой о свертке [10, с. 527–529], сплайн $\bar{S}_{n,\alpha}(t)$ можно представить как результат интегрирования:

$$\bar{S}_{n,\alpha}(t) = \int_{t_a}^{t_b} k_\alpha(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (15)$$

и его можно интерпретировать как «усреднение» функции $f(t)$ аппаратной функцией сплайна. Очевидно, что чем меньше «ши-

рина» аппаратной функции, тем меньше $S_{n,\alpha}(t)$ отличается от $f(t)$ и тем меньше систематическая ошибка сглаживания. Для количественной оценки ширины аппаратной функции введем характеристику, которую назовем эквивалентной шириной аппаратной функции (ЭШАФ) $W(\alpha)$:

$$W(\alpha) = \int_{t_c}^{t_d} |k_\alpha(\tau)| d\tau / k_\alpha(0). \quad (16)$$

Величина $W(\alpha)$ уже позволяет говорить о разрешающей способности СКС, а именно: если функция имеет две δ -образных структуры, то они проявятся в СКС (возможно, в сглаженном виде), если «расстояние» (по шкале аргумента t) между ними будет не меньше $W(\alpha)$ (см. результаты вычислительного эксперимента).

Замечание. В силу конечной длительности функций $f(t)$, $k(\tau)$ пределы интегрирования t_a, t_b, t_c, t_d в (15), (16) имеют конечные значения, что позволяет вычислить (15), (16), применяя подходящие квадратурные формулы.

Таким образом, введение характеристики $W(\alpha)$ позволяет говорить об *анализе разрешающей способности* СКС – когда по заданному параметру сглаживания вычисляется значение $W(\alpha)$ и о задаче *синтеза* СКС – когда по заданному максимальному значению $W(\alpha)$ вычисляется величина параметра сглаживания. Так как сглаживающая способность сплайна увеличивается по мере возрастания параметра сглаживания и $W(\alpha)$ при этом также увеличивается, то, решая задачу синтеза сплайна по заданной максимальной величине $W(\alpha)$, можно говорить о построении сплайна с наименьшим уровнем случайной ошибки среди всех сплайнов с ЭШАФ не более $W(\alpha)$.

Результаты исследования и их обсуждение

Первоначально рассмотрим результаты вычисления частотной характеристики (12) и аппаратной функции (13) сплайна с параметрами $\Delta_t = 0.05, p = 1$. На рис. 1 изображены графики частотной характеристики $K_\alpha(\omega)$ при разных параметрах сглаживания: сплошная кривая – $\alpha = 0$; штриховая кривая – $\alpha = 0.0001$, точечная кривая – $\alpha = 0.1$. На рис. 2 показаны графики аппаратных функций сплайна при тех же параметрах сглаживания (соответствие типов кривых те же, что и на рис. 1). Хорошо видно, что при увеличении параметра сглаживания уменьшается ширина полосы пропускания СКС (как низкочастотного фильтра), а следовательно, увеличивается подавление шума измерений, но при этом увеличивается ширина аппаратной функции, что вызывает ухудшение разрешающей способности сплайна – известное противоречие между систематической и случайной составляющей ошибки фильтрации любого линейного алгоритма фильтрации.

Перейдем к рассмотрению эквивалентной ширины аппаратной функции СКС, определяемой соотношением (16). На рис. 3 представлен график характеристики $W(\alpha)$ от параметра сглаживания. Используя этот график, попробуем определить параметр сглаживания по заданной величине $W(\alpha) = W_s = 0.2$. Для этого по оси ординат (рис. 3) откладываем величину 0.2 и проводим штриховую прямую до пересечения с графиком $W(\alpha)$ (точка пересечения обозначена буквой A), а затем из этой точки опускаем перпендикуляр на ось абсцисс – и точку пересечения с этой осью обозначим как B . Значение α в точке B примерно равно $\alpha_{0.2} = 3 \cdot 10^{-4}$, и, по сути, это значение является «графическим» решением нелинейного уравнения $W(\alpha) = W_s$.

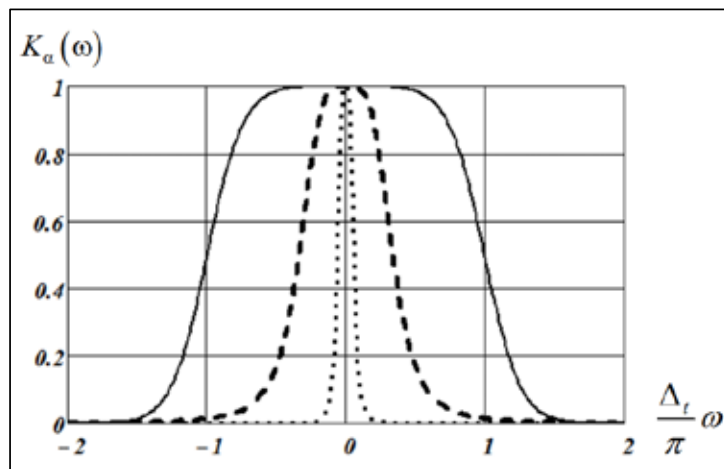


Рис. 1. Частотная характеристика СКС при различных значениях параметра α

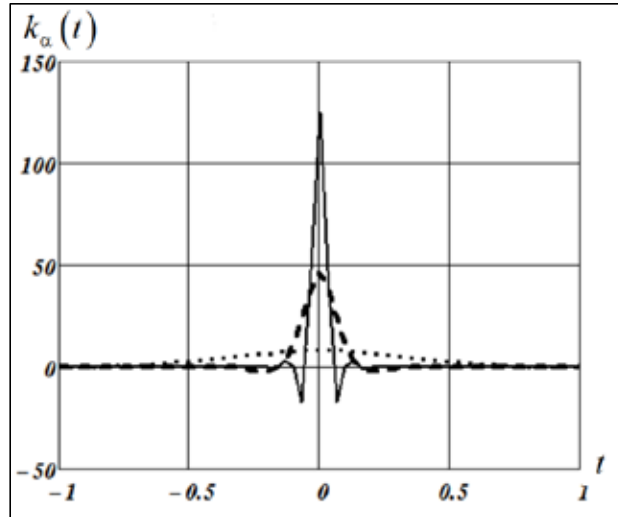


Рис. 2. Аппаратная функция СКС при различных значениях параметра α

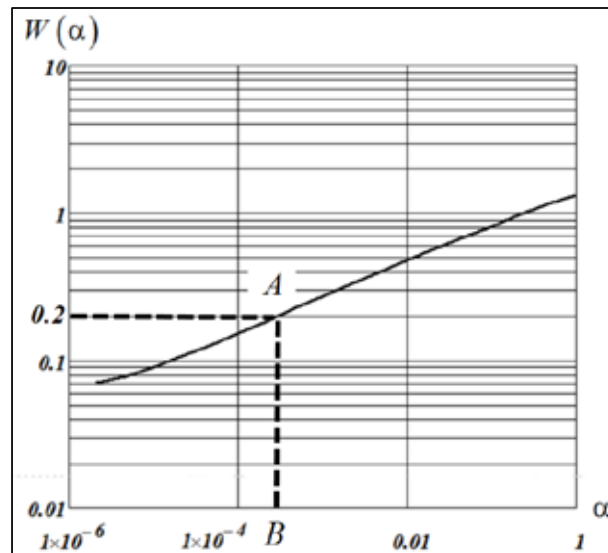


Рис. 3. Зависимость характеристики $W(\alpha)$ от параметра сглаживания α

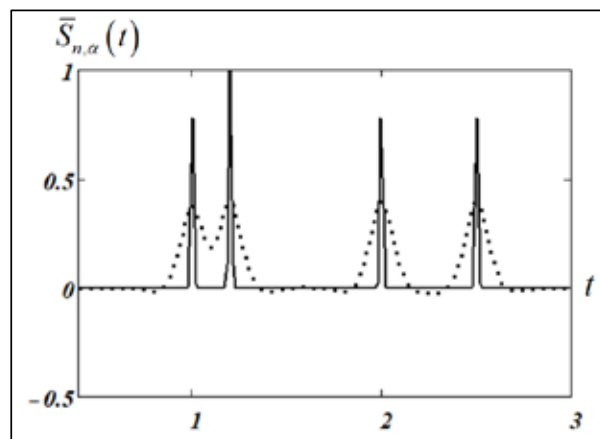


Рис. 4. СКС при заданной разрешающей способности

На рис. 4 показаны графики четырех δ -образных функций. Расстояние между левой парой кривых равно 0,2, т.е. равно заданной величине W_s , а расстояние между правой парой равно 0,5. Точечной кривой на рис. 4 показаны значения сглаживающего сплайна, построенного при $\alpha_{0,2} = 3 \cdot 10^{-4}$.

Видно, что в сплайне четко «проявились» две левых δ -образных функций, расстояние между которыми равно заданной величине ЭШАФ построенного СКС. Следовательно, по величине ЭШАФ сплайна можно определить расстояние между «тонкими» деталями функции, сохраненные в построенном СКС, т.е. можно говорить о разрешающей способности СКС, которую можно характеризовать ЭШАФ. Так как расстояние между правыми δ -образных функций в 2,5 раза больше заданной ЭШАФ, то эти функции полностью сохранились в построенном СКС.

Заключение

Предложенная в работе частотная модель СКС позволяет интерпретировать сглаживающий сплайн как низкочастотный фильтр, полоса пропускания которого зависит от параметра сглаживания. Введенная аппаратная функция сплайна и ее эквивалентная ширина дает возможность определить разрешающую способность СКС, и это позволяет решать:

– задачу анализа СКС – когда по заданному параметру сглаживания определяют введенные частотные и временные характеристики сплайна;

– задачу синтеза СКС – когда по заданной ЭШАФ W_s находят значение параметра сглаживания СКС путем решения нели-

нейного уравнения $W(\alpha) = W_s$ численными методами.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 22-21-00409.

Список литературы

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 345 с.
2. Воскобойников Ю.Е., Преображенский Н.Г., Седелников А.И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984. 238 с.
3. Воскобойников Ю.Е., Боева В.А. Новый устойчивый алгоритм непараметрической идентификации технических систем // Современные наукоемкие технологии. 2019. № 5. С. 25–29.
4. Cheng C.M. Volterra-series-based nonlinear system modeling and its engineering applications: A state-of-the-art review. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2017. Vol. 87. P. 430–364.
5. Apartsyn A.S., Solodusha S.V., Spiryaev V.A. Modeling of Nonlinear Dynamic Systems with Volterra Polynomials: Elements of Theory and Applications. *Int. J. Energy Optim. Eng.* 2013. No. 2. P. 16–43. DOI: 10.4018/ijeoe.2013100102.
6. Солодуша С.В. Численное моделирование динамики теплообмена модифицированным квадратичным полиномом Вольтерры // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18. № 2. С. 84–94.
7. Solodusha S.V. Quadratic and cubic Volterra polynomials: Identification and application. *Vestnik Sankt-Petersburgskogo Universiteta. Prikladnaya Matematika, Informatika, Protsessy Upravleniya*. 2018. Vol. 14. No. 2. P. 131–144. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2018.205.
8. Воскобойников Ю.Е., Боева В.А. Устойчивый алгоритм вычисления смешанных производных в задачах непараметрической идентификации нелинейных систем // Современные наукоемкие технологии. 2021. № 4. С. 25–29. DOI: 10.17513/snt.38610.
9. Wang Y. *Smoothing Splines Methods and Applications*. Ser. Monographs on Statistics and Applied Probability v. 121. A Chapman & Hall book, 2014. 347 p.
10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3: учебник для вузов. 12-е изд., стер. СПб.: Лань, 2021. 656 с.