УДК 372.862

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛОЩАДКАХ, НАКЛОНЕННЫХ К БОКОВЫМ ГРАНЯМ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА, ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Подобед С.А.

Политехнический институт (филиал) ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова», Мирный, e-mail: podobedsa@mail.ru

В статье выводятся формулы для определения касательных и нормальных напряжений в площадке, наклоненной к боковым граням элементарного параллелепипеда (сопромат). Для восьми положений площадки относительно горизонтальных и вертикальных граней элементарного параллелепипеда поставлено восемь задач – вывести формулы для определения касательных и нормальных напряжений на этих площадках. В первой задаче выведены формулы для определения касательных и нормальных напряжений в площадке, наклоненной к нижней горизонтальной грани элементарного параллелепипеда под углом $\alpha > 0$. Во второй задаче выведены формулы для определения касательных и нормальных напряжений в площадке, наклоненной к нижней горизонтальной грани элементарного параллелепипеда под углом $\alpha < 0$. В третьей задаче выведены формулы для определения касательных и нормальных напряжений в площадке, наклоненной к правой вертикальной грани элементарного параллелепипеда под углом $\alpha > 0$. В четвертой задаче выведены формулы для определения касательных и нормальных напряжений в площадке, наклоненной к правой вертикальной грани элементарного параллелепипеда под углом $\alpha < 0$. В пятой задаче выведены формулы для определения касательных и нормальных напряжений в площадке, наклоненной к верхней горизонтальной грани элементарного параллелепипеда под углом $\alpha > 0$. В шестой задаче выведены формулы для определения касательных и нормальных напряжений в площадке, наклоненной к верхней горизонтальной грани элементарного параллелепипеда под углом $\alpha < 0$. В седьмой задаче выведены формулы для определения касательных и нормальных напряжений в площадке, наклоненной к левой вертикальной грани элементарного параллелепипеда под углом $\alpha > 0$. В восьмой задаче выведены формулы для определения касательных и нормальных напряжений в площадке, наклоненной к левой вертикальной грани элементарного параллелепипеда под углом $\alpha < 0$. Составлена таблица соответствия формул положению площадки относительно граней элементарного параллелепипеда.

Ключевые слова: интенсификация обучения, факторы интенсификации обучения, плоское напряженное состояние в точке, касательные и нормальные напряжения, элементарный параллелепипед

CONCERNING THE DETERMINATION OF STRESSES IN AREA ELEMENTS SLOPED TOWARDS PLATELIKE ELEMENT OF VOLUME LATERAL FACES IN PLAIN STRESS CONDITION

Podobed S.A.

M.K. Ammosov North-Eastern Federal University, Mirny, e-mail: podobedsa@mail.ru

The purpose of the present article is to derive formulas for determining the tangent as well as normal stresses in an area element sloped towards the lateral faces of a platelike element of volume (strength of materials). Eight tasks have been set for eight positions of the area element relative to the lateral and top faces of the platelike element of volume, aimed at derivation of formulas for determining the tangent as well as normal stresses in the given area elements. The first task results in the formulas for determining the tangent and normal stresses in the area element sloped towards the lower lateral face of a platelike element of volume at an angle $\alpha > 0$. The second task presents the formulas for determining the tangent and normal stresses in the area element sloped towards the lower lateral face of a platelike element of volume at an angle $\alpha < 0$. The third task brings in the formulas for determining the tangent and normal stresses in the area element sloped towards the right lateral face of a platelike element of volume at an angle $\alpha > 0$. Task four is aimed at obtaining the formulas for determining the tangent and normal stresses in the area element sloped towards the right lateral face of a platelike element of volume at an angle $\alpha < 0$. Task five is aimed at obtaining the formulas for determining the tangent and normal stresses in the area element sloped towards the upper top face of a platelike element of volume at an angle $\alpha > 0$. The purpose of the task number six is the derivation of formulas for determining the tangent and normal stresses in the area element sloped towards the upper top face of a platelike element of volume at an angle $\alpha < 0$. The seventh task is to get the formulas for determining the tangent and normal stresses in the area element sloped towards the left lateral face of a platelike element of volume at an angle $\alpha > 0$. The task number eight is set to derive formulas for determining the tangent and normal stresses in the area element sloped towards the left lateral face of a platelike element of volume at an angle $\alpha < 0$. The table No. 1 is compiled to demonstrate the relation between the formulas an area element positions towards the faces of a platelike element of volume.

Keywords: learning augmentation, factors of learning augmentation, plain stress condition at a point, tangent and normal stresses, platelike element of volume

Увеличение объема информации в науках и уменьшение времени на освоение учебного материала дисциплин, преподаваемых в вузах, стало объективной реальностью. Перед педагогической наукой стоит вопрос, как за короткий срок дать обучаемым максимально большое количество необходимой информации, как повысить результаты учебного труда. Ответы на эти вопросы дает совокупность педагогических приемов, позволяющих увеличить производительность учебного труда с одновременным повышением качества образования, называемая интенсификацией процесса обучения. В работах ученых выделен ряд факторов интенсификации обучения [1]. Такой фактор, как ускорение темпа учебных действий, имеет непосредственное отношение к написанию данной статьи. В учебной литературе по сопротивлению материалов даются задачи по определению касательных и нормальных напряжений в площадках, наклоненных к граням элементарного параллелепипеда. Формулы для определения этих напряжений даются только для одного положения площадки [2–4], хотя таких положений восемь. Для того чтобы решать задачи, студенту надо выводить эти формулы, что замедляет темп учебных действий. Здесь ставится другая задача – ускорить изучение темы «Напряженное и деформированное состояние в точке» и ускоренно применять знания на практике. С.П. Грушевский, А.А. Остапенко показали, что такие задачи решаются путем сгущения (уплотнения, сжатия, компрессии, концентрации) учебной информации [5].

Цель исследования – дать изучающим сопротивление материалов формулы для определения касательного и нормального напряжения в площадках, наклоненных к граням элементарного параллелепипеда, при плоском напряженном состоянии.

Материалы и методы исследования

Для определения напряжений на любых площадках, проходящих через данную точку при плоском напряженном состоянии, будем рассматривать равновесие бесконечно малой (элементарной) треугольной призмы, образованной рассечением бесконечно малого (элементарного) параллелепипеда, построенного в окрестности рассматриваемой точки, плоскостью под углом α к боковым его граням, перпендикулярным плоскости чертежа. Высота призмы в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, равна dz. Основания призмы представляют собой прямоугольные треугольники (abc) с размерами dx, dy, ds, свободные от напряжений (рис. 1, а, б). Совместим систему координатных осей u, v с наклонной площадкой. Примем следующее правило знаков. Касательное напряжение по боковой грани положительно, если изображающий его вектор стремится вращать призму по часовой стрелке относительно любой точки, лежащей на внутренней нормали к этой грани, или внешнюю нормаль к грани необходимо поворачивать по часовой стрелке для совпадения с вектором касательного напряжения. Растягивающее напряжение положительно, а сжимающее – отрицательно. Угол α между площадкой, проходящей через рассматриваемую точку, и боковыми гранями элементарного параллелепипеда положителен, если грани надо поворачивать для совпадения с этой площадкой против часовой стрелки. Обозначим σ_x и τ_x напряжения, параллельные оси x, σ_y и τ_y – параллельные оси y, σ_α и τ_α – параллельные осям v и u соответственно. Напряжения σ_x, τ_x, σ_y, σ_α, τ_α возьмем положительными.

Задача 1. Определение касательных и нормальных напряжений на площадках, наклоненных к нижней грани элементарного параллелепипеда под углом $\alpha > 0$ (рис. 1, а).

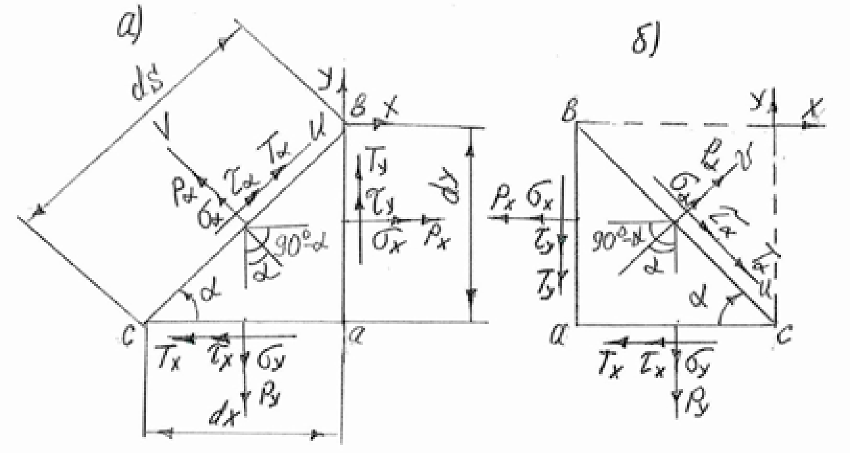


Рис. 1. Плоское напряженное состояние в точке:
а) площадка bc наклонена к нижней грани ac под углом α > 0;
б) площадка bc наклонена к нижней грани ac под углом α < 0

На гранях действуют сосредоточенные силы P_x, P_y, T_x, T_y, P_α, T_α, равные произведению соответствующего напряжения на площадь грани и приложенные в центрах тяжести этих граней:

$$P_x = \sigma_x dydz;\; P_y = \sigma_y dxdz;\; T_x = \tau_x dxdz \;\; T_y = \tau_y dydz;\; P_\alpha = \sigma_\alpha dsdz;\; T_\alpha = \tau_\alpha dsdz. \quad (1)$$

Призма находится в равновесии. Составим уравнения равновесия (приравниваем к нулю сумму проекций всех сил на оси *u* и *v*):

$$\sum V = P_\alpha - \left(P_x - T_x\right)\sin\alpha - \left(P_y - T_y\right)\cos\alpha = 0; \quad (2)$$

$$\sum U = T_\alpha - \left(P_x - T_x\right)\cos\alpha - \left(P_y - T_y\right)\sin\alpha = 0. \quad (3)$$

Подставим в уравнения (2) и (3) выражения сил из равенств (1):

$$\sum V = \sigma_\alpha dsdz - \left(\sigma_x dydz - \tau_x dxdz\right)\sin\alpha - \left(\sigma_y dxdz - \tau_y dydz\right)\cos\alpha = 0;$$

$$\sum U = \tau_\alpha dsdz + \left(\sigma_x dydz - \tau_x dxdz\right)\cos\alpha - \left(\sigma_y dxdz - \tau_y dydz\right)\sin\alpha = 0.$$

Сократив эти уравнения на $dsdz$, учитывая при этом, что $(dy / ds) = \sin\alpha$, а $(dx / ds) = \cos\alpha$ будем иметь:

$$\sigma_\alpha - \left(\sigma_x \sin\alpha - \tau_x \cos\alpha\right)\sin\alpha - \left(\sigma_y \cos\alpha - \tau_y \sin\alpha\right)\cos\alpha = 0; \quad (4)$$

$$\tau_\alpha + \left(\sigma_x \sin\alpha - \tau_x \cos\alpha\right)\cos\alpha - \left(\sigma_y \cos\alpha - \tau_y \sin\alpha\right)\sin\alpha = 0. \quad (5)$$

Раскрывая скобки и решая уравнения (4) и (5) относительно σ_α и τ_α, получаем

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \sin^2\alpha - \tau_x \sin\alpha\cos\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha - \tau_y \sin\alpha\cos\alpha; \quad (6)$$

$$\tau_\alpha = -\sigma_x \sin\alpha\cos\alpha + \tau_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin\alpha\cos\alpha - \tau_y \sin^2\alpha. \quad (7)$$

Заменяя τ_y на τ_x (они равны по модулю) в уравнениях (6) и (7), окончательно получаем

$$\sigma_\alpha = \sigma_y \cos^2\alpha + \sigma_x \sin^2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha; \quad (8)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha. \quad (9)$$

Задача 2. Определение касательных и нормальных напряжений на площадках, наклоненных к нижней грани элементарного параллелепипеда под углом $\alpha < 0$ (рис. 1, б).

Призма находится в равновесии. Составим уравнения равновесия (приравниваем к нулю сумму проекций всех сил на оси *u* и *v*):

$$\sum V = P_\alpha - \left(P_x + T_x\right)\sin\alpha - \left(P_y + T_y\right)\cos\alpha = 0; \quad (10)$$

$$\sum U = T_\alpha - \left(P_x + T_x\right)\cos\alpha + \left(P_y + T_y\right)\sin\alpha = 0. \quad (11)$$

Подставим в уравнения (10) и (11) выражения сил из равенств (1):

$$\sum V = \sigma_\alpha dsdz - \left(\sigma_x dydz + \tau_x dxdz\right)\sin\alpha - \left(\sigma_y dxdz + \tau_y dydz\right)\cos\alpha = 0;$$

$$\sum U = \tau_\alpha dsdz - \left(\sigma_x dydz + \tau_x dxdz\right)\cos\alpha + \left(\sigma_y dxdz + \tau_y dydz\right)\sin\alpha = 0.$$

Сократив эти уравнения на $dsdz$, учитывая при этом, что $(dy / ds) = \sin\alpha$, а $(dx / ds) = \cos\alpha$, будем иметь

$$\sigma_\alpha - \left(\sigma_x \sin\alpha + \tau_x \cos\alpha\right)\sin\alpha - \left(\sigma_y \cos\alpha + \tau_y \sin\alpha\right)\cos\alpha = 0;$$

$$\tau_\alpha - \left(\sigma_x \sin\alpha + \tau_x \cos\alpha\right)\cos\alpha + \left(\sigma_y \cos\alpha + \tau_y \sin\alpha\right)\sin\alpha = 0.$$

Раскрывая скобки и решая данные уравнения относительно σ_α и τ_α, получаем

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \sin^2\alpha + \tau_x \sin\alpha\cos\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha + \tau_y \sin\alpha\cos\alpha\ ;$$

$$\tau_\alpha = \sigma_x \sin\alpha\cos\alpha + \tau_x \cos^2\alpha - \sigma_y \sin\alpha\cos\alpha - \tau_y \sin^2\alpha\ .$$

Заменяя τ_y на τ_x (они по модулю равны), окончательно будем иметь

$$\sigma_\alpha = \sigma_y \cos^2\alpha + \sigma_x \sin^2\alpha + \tau_x \sin 2\alpha\ ; \qquad (12)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha. \qquad (13)$$

Задача 3. Определение касательных и нормальных напряжений на площадках, наклоненных к правой вертикальной грани элементарного параллелепипеда под углом $\alpha > 0$ (рис. 2, а).

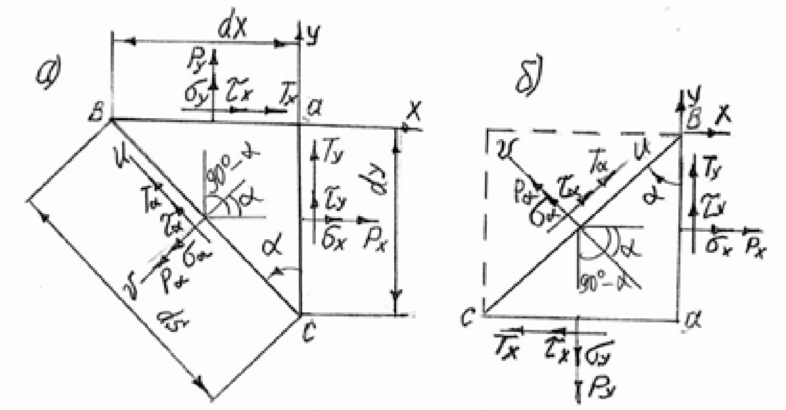


Рис. 2. Плоское напряженное состояние в точке:
а) площадка bc наклонена к правой грани ac под углом α > 0;
б) площадка bc наклонена к правой грани ab под углом α < 0

Призма находится в равновесии. Составим уравнения равновесия (приравниваем к нулю сумму проекций всех сил на оси *u* и *v*):

$$\sum V = P_\alpha - \left(P_x + T_x\right)\cos\alpha - \left(P_y + T_y\right)\sin\alpha = 0\ ; \qquad (14)$$

$$\sum U = T_\alpha - \left(P_x + T_x\right)\sin\alpha + \left(P_y + T_y\right)\cos\alpha = 0. \qquad (15)$$

Подставим в уравнения (14) и (15) выражения сил из равенств (1):

$$\sum V = \sigma_\alpha dsdz - \left(\sigma_x dydz + \tau_x dxdz\right)\cos\alpha - \left(\sigma_y dxdz + \tau_y dydz\right)\sin\alpha = 0;$$

$$\sum U = \tau_\alpha dsdz - \left(\sigma_x dydz + \tau_x dxdz\right)\sin\alpha + \left(\sigma_y dxdz + \tau_y dydz\right)\cos\alpha = 0.$$

Сократив эти уравнения на *dsdz*, учитывая при этом, что (*dy* / *ds*) = cos *α*, а (*dx* / *ds*) = sin *α*, будем иметь

$$\sigma_\alpha - \left(\sigma_x \cos\alpha + \tau_x \sin\alpha\right)\cos\alpha - \left(\sigma_y \sin\alpha + \tau_y \cos\alpha\right)\sin\alpha = 0;$$

$$\tau_\alpha - \left(\sigma_x \cos\alpha + \tau_x \sin\alpha\right)\sin\alpha + \left(\sigma_y \sin\alpha + \tau_y \cos\alpha\right)\cos\alpha = 0.$$

Раскрывая скобки и решая данные уравнения относительно σ_α и τ_α, получаем

$$\sigma_\alpha = \sigma_x cos^2\alpha + \tau_x \sin\alpha\cos\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \tau_y \sin\alpha\cos\alpha\ ;$$

$$\tau_\alpha = \sigma_x \sin\alpha\cos\alpha + \tau_x \sin^2\alpha - \sigma_y \sin\alpha\cos\alpha - \tau_y \cos^2\alpha\ .$$

Заменяя τ_y на τ_x (они равны по модулю), окончательно будем иметь

$$\sigma_\alpha = \sigma_y \sin^2\alpha + \sigma_x \cos^2\alpha + \tau_x \sin 2\alpha\ ; \tag{16}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_x \cos 2\alpha. \tag{17}$$

Эти формулы совпадают с формулами, выведенными в [3, с. 28], заменив τ_x на τ_{xy}.

Задача 4. Определение касательных и нормальных напряжений в площадках, наклоненных к правой грани элементарного параллелепипеда под углом $\alpha < 0$ (рис. 2, б).

Призма находится в равновесии. Составим уравнения равновесия (приравниваем к нулю сумму проекций всех сил на оси u и v):

$$\sum V = P_\alpha - \left(P_x + T_x\right)\cos\alpha - \left(P_y + T_y\right)\sin\alpha = 0\ ; \tag{18}$$

$$\sum U = T_\alpha - \left(P_x + T_x\right)\sin\alpha + \left(P_y + T_y\right)\cos\alpha = 0. \tag{19}$$

Подставим в уравнения (18) и (19) выражения сил из равенств (1):

$$\sum V = \sigma_\alpha dsdz - \left(\sigma_x dydz + \tau_x dxdz\right)\cos\alpha - \left(\sigma_y dxdz + \tau_y dydz\right)\sin\alpha = 0;$$

$$\sum U = \tau_\alpha dsdz - \left(\sigma_x dydz + \tau_x dxdz\right)\sin\alpha + \left(\sigma_y dxdz + \tau_y dydz\right)\cos\alpha = 0.$$

Сократив эти уравнения на $dsdz$, учитывая при этом, что $(dy / ds) = \cos\alpha$, а $(dx / ds) = \sin\alpha$, будем иметь:

$$\sigma_\alpha - \left(\sigma_x \cos\alpha + \tau_x \sin\alpha\right)\cos\alpha - \left(\sigma_y \sin\alpha + \tau_y \cos\alpha\right)\sin\alpha = 0;$$

$$\tau_\alpha - \left(\sigma_x \cos\alpha + \tau_x \sin\alpha\right)\sin\alpha + \left(\sigma_y \sin\alpha + \tau_y \cos\alpha\right)\cos\alpha = 0.$$

Раскрывая скобки и решая данные уравнения относительно σ_α и τ_α, получаем

$$\sigma_\alpha = \sigma_x cos^2\alpha + \tau_x \sin\alpha\cos\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \tau_y \sin\alpha\cos\alpha\ ;$$

$$\tau_\alpha = \sigma_x \sin\alpha\cos\alpha + \tau_x \sin^2\alpha - \sigma_y \sin\alpha\cos\alpha - \tau_y \cos^2\alpha\ .$$

Заменяя τ_y на τ_x (они равны по модулю), окончательно будем иметь

$$\sigma_\alpha = \sigma_y \sin^2\alpha + \sigma_x \cos^2\alpha + \tau_x \sin 2\alpha\ ; \tag{20}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_x \cos 2\alpha. \tag{21}$$

Задача 5. Определение касательных и нормальных напряжений на площадках, наклоненных к верхней горизонтальной грани элементарного параллелепипеда под углом $\alpha > 0$ (рис. 3, а).

Рис. 3. Плоское напряженное состояние в точке:
а) площадка bc наклонена к верхней грани ac под углом α > 0;
б) площадка bc наклонена к верхней грани ab под углом α < 0

Призма находится в равновесии. Составим уравнения равновесия (приравниваем к нулю сумму проекций всех сил на оси *u* и *v*):

$$\sum V = P_\alpha - \left(P_x - T_x\right)\sin\alpha - \left(P_y - T_y\right)\cos\alpha = 0; \tag{22}$$

$$\sum U = T_\alpha + \left(P_x - T_x\right)\cos\alpha - \left(P_y - T_y\right)\sin\alpha = 0. \tag{23}$$

Подставим в уравнения (22) и (23) выражения сил из равенств (1):

$$\sum V = \sigma_\alpha dsdz - \left(\sigma_x dydz - \tau_x dxdz\right)\sin\alpha - \left(\sigma_y dxdz - \tau_y dydz\right)\cos\alpha = 0;$$

$$\sum U = \tau_\alpha dsdz + \left(\sigma_x dydz - \tau_x dxdz\right)\cos\alpha - \left(\sigma_y dxdz - \tau_y dydz\right)\sin\alpha = 0.$$

Сократив эти уравнения на $dsdz$, учитывая при этом, что $(dy / ds) = \sin\alpha$, а $(dx / ds) = \cos\alpha$, заменяя τ_y на τ_x и решая их относительно σ_α и τ_α будем иметь следующие уравнения:

$$\sigma_\alpha = \sigma_y \cos^2\alpha + \sigma_x \sin^2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha; \tag{24}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha. \tag{25}$$

Задача 6. Определение касательных и нормальных напряжений на площадках, наклоненных к верхней горизонтальной грани элементарного параллелепипеда под углом $\alpha < 0$ (рис. 3, б).

Призма находится в равновесии. Составим уравнения равновесия (приравниваем к нулю сумму проекций всех сил на оси *u* и *v*):

$$\sum V = P_\alpha - \left(P_x + T_x\right)\sin\alpha - \left(P_y + T_y\right)\cos\alpha = 0; \tag{26}$$

$$\sum U = T_\alpha - \left(P_x + T_x\right)\cos\alpha + \left(P_y + T_y\right)\sin\alpha = 0. \tag{27}$$

Подставим в уравнения (26) и (27) выражения сил из равенств (1):

$$\sum V = \sigma_\alpha dsdz - \left(\sigma_x dydz + \tau_x dxdz\right)\sin\alpha - \left(\sigma_y dxdz + \tau_y dydz\right)\cos\alpha = 0;$$

$$\sum U = \tau_\alpha dsdz - \left(\sigma_x dydz + \tau_x dxdz\right)\cos\alpha + \left(\sigma_y dxdz + \tau_y dydz\right)\sin\alpha = 0.$$

Сократив эти уравнения на $dsdz$, учитывая при этом, что $(dy / ds) = \sin\alpha$, а $(dx / ds) = \cos\alpha$, заменяя τ_y на τ_x и решая их относительно σ_α и τ_α будем иметь следующие уравнения:

$$\sigma_\alpha = \sigma_y \cos^2\alpha + \sigma_x \sin^2\alpha + \tau_x \sin 2\alpha; \tag{28}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha. \tag{29}$$

Задача 7. Определение касательных и нормальных напряжений на площадках, наклоненных к левой вертикальной грани элементарного параллелепипеда под углом $\alpha > 0$ (рис. 4, а).

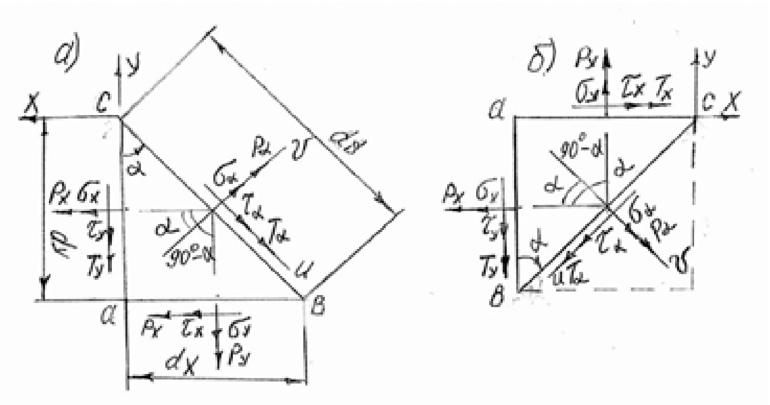


Рис. 4. Плоское напряженное состояние в точке:
а) площадка bc наклонена к левой грани ac под углом α > 0;
б) площадка bc наклонена к левой грани ab под углом α < 0

Призма находится в равновесии. Составим уравнения равновесия (приравниваем к нулю сумму проекций всех сил на оси *u* и *v*):

$$\sum V = P_\alpha - \left(P_x + T_x\right)\cos\alpha - \left(P_y + T_y\right)\sin\alpha = 0; \quad (30)$$

$$\sum U = T_\alpha - \left(P_x + T_x\right)\sin\alpha + \left(P_y + T_y\right)\cos\alpha = 0. \quad (31)$$

Подставим в уравнения (30) и (31) выражения сил из равенств (1):

$$\sum V = \sigma_\alpha dsdz - \left(\sigma_x dydz + \tau_x dxdz\right)\cos\alpha - \left(\sigma_y dxdz + \tau_y dydz\right)\sin\alpha = 0;$$

$$\sum U = \tau_\alpha dsdz - \left(\sigma_x dydz + \tau_x dxdz\right)\sin\alpha + \left(\sigma_y dxdz + \tau_y dydz\right)\cos\alpha = 0.$$

Сократив эти уравнения на $dsdz$, учитывая при этом, что $(dy / ds) = \cos\alpha$, а $(dx / ds) = \sin\alpha$, заменяя τ_y на τ_x и решая их относительно σ_α и τ_α будем иметь следующие уравнения:

$$\sigma_\alpha = \sigma_y \sin^2\alpha + \sigma_x \cos^2\alpha + \tau_x \sin 2\alpha; \quad (32)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha - \tau_x \cos 2\alpha. \quad (33)$$

Эти формулы совпадают с формулами, выведенными в [4, с.75], заменив τ_x на $-\tau$.

Задача 8. Определение касательных и нормальных напряжений на площадках, наклоненных к левой вертикальной грани элементарного параллелепипеда под углом $\alpha < 0$ (рис. 4, б).

Призма находится в равновесии. Составим уравнения равновесия (приравниваем к нулю сумму проекций всех сил на оси *u* и *v*):

$$\sum V = P_\alpha - \left(P_x - T_x\right)\cos\alpha - \left(P_y - T_y\right)\sin\alpha = 0; \quad (34)$$

$$\sum U = T_\alpha + \left(P_x - T_x\right)\sin\alpha - \left(P_y - T_y\right)\cos\alpha = 0. \quad (35)$$

Подставим в уравнения (34) и (35) выражения сил из равенств (1):

$$\sum V = \sigma_\alpha dsdz - \left(\sigma_x dydz - \tau_x dxdz\right)\cos\alpha - \left(\sigma_y dxdz - \tau_y dydz\right)\sin\alpha = 0;$$

$$\sum U = \tau_\alpha dsdz + \left(\sigma_x dydz - \tau_x dxdz\right)\sin\alpha - \left(\sigma_y dxdz - \tau_y dydz\right)\cos\alpha = 0.$$

Сократив эти уравнения на $dsdz$, учитывая при этом, что $(dy / ds) = \cos\alpha$, а $(dx / ds) = \sin\alpha$, заменяя τ_y на τ_x и решая их относительно σ_α и τ_α будем иметь следующие уравнения:

$$\sigma_\alpha = \sigma_y \sin^2\alpha + \sigma_x \cos^2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha; \quad (36)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\sin 2\alpha - \tau_x \cos 2\alpha. \quad (37)$$

Для ускорения вычисления касательных и нормальных напряжений в площадках, наклоненных к граням элементарного параллелепипеда, при плоском напряженном состоянии составлена таблица, где в одной строке выставлены формулы и соответствующие им положения площадок относительно граней.

Пример 1. Для напряженного состояния, изображенного на рис. 5, определить напряжения σ_α и τ_α на площадке *I-I*, наклоненной к нижней грани под углом $\alpha = 60°$, к правой грани под углом $\alpha = -30°$, если $\sigma_y = -500$ *кгс/см*², $\sigma_x = 1000$ *кгс/см*², $\tau_x = 250$ *кгс/см*².

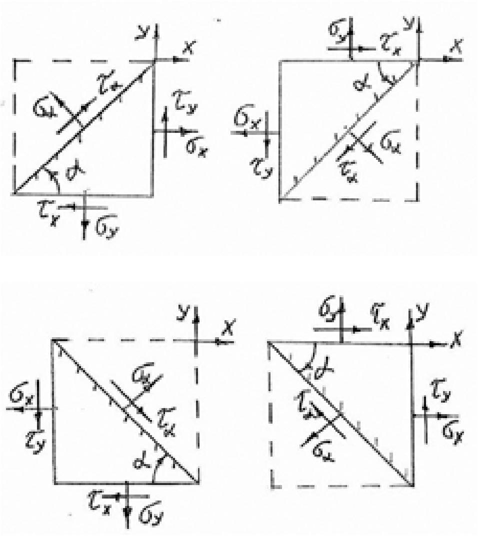
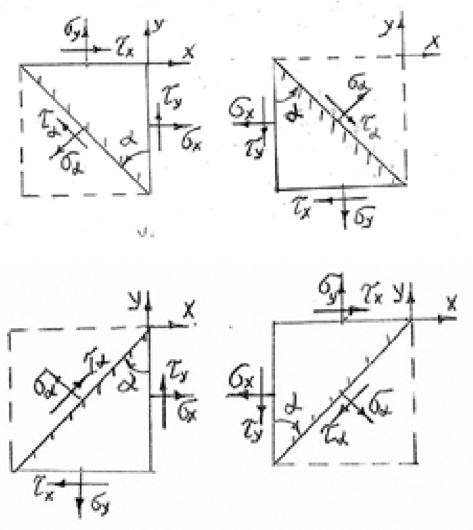
Решение. В первой строке таблицы находим заданное положение площадки и соответствующие ему формулы для нахождения напряжений на этой площадке с наклоном 60° к нижней грани (пример 1.3 из [2. с. 114]). Подставим в эти формулы заданные напряжения σ_y, σ_x, τ_x и угол α в соответствии с правилом знаков

$$\sigma_\alpha = \sigma_y \cos^2\alpha + \sigma_x \sin^2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha =$$

$$-500\cos^2 60^\circ + 1000\sin^2 60^\circ - 250\sin 120^\circ = 410 \text{ кгс/см}^2,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha \frac{-500 - 1000}{2}\sin 120^\circ + \tau_x \cos 120^\circ = -775 \text{ кгс/см}^2.$$

Формулы для определения напряжений в площадках, наклоненных к граням элементарного параллелепипеда, при плоском напряженном состоянии

№ п/п 1		$\sigma_\alpha = \sigma_y \cos^2\alpha + \sigma_x \sin^2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$ $\tau_\alpha = \dfrac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$
2		$\sigma_\alpha = \sigma_y \sin^2\alpha + \sigma_x \cos^2\alpha + \tau_x \sin 2\alpha$ $\tau_\alpha = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha - \tau_x \cos 2\alpha$

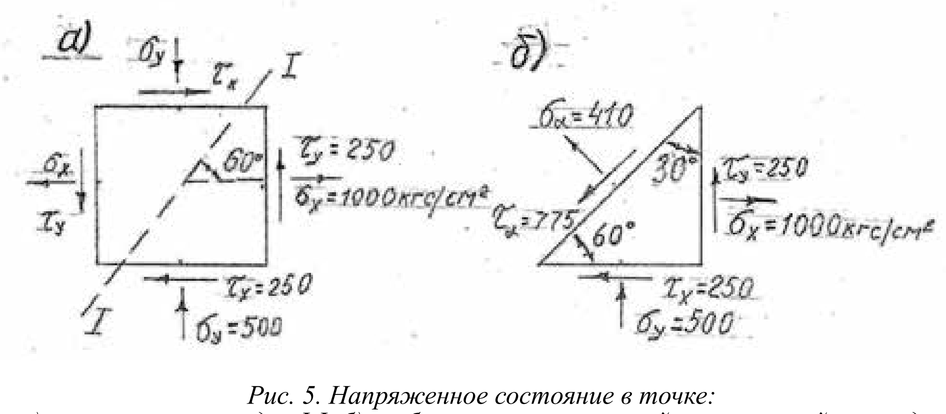


Рис. 5. Напряженное состояние в точке:
а) положение площадки I-I; б) изображение напряжений на наклонной площадке

Результаты исследования и их обсуждение

При выводе формул для вычисления касательных и нормальных напряжений в площадках, наклоненных к боковым граням элементарного параллелепипеда, рассматривалось их положение под углом $\alpha > 0$ и под углом $\alpha < 0$. Было получено восемь пар формул. Анализ этих формул показал, что при наклоне площадки либо к нижней, либо к верхней грани формулы имеют одинаковый вид. Одинаковый вид также имеют формулы для определения напряжений на площадке, наклоненной к левой и правой вертикальной грани. Для определения напряжений в рассматриваемых площадках с использованием выведенных формул необходимо напряжения σ_y, σ_x, τ_x и угол α подставлять в эти формулы в соответствии с правилом знаков. Результаты исследования сведены в таблицу.

Заключение

Анализ информации из источников по сопротивлению материалов показывает, что формулы для определения напряжений в площадках, наклоненных к вертикальной левой грани и к вертикальной правой грани элементарного параллелепипеда – разные. В данной статье установлено, что формулы для определения напряжений в площадке с наклоном к левой и к правой грани одинаковы. Уменьшение формул вдвое, информация о правилах пользования формулами, представление результатов исследования в таблице для всех возможных положений наклонной площадки способствует ускорению учебных действий как одного из факторов интенсификации обучения. Результаты исследования будут полезны студентам, преподавателям, всем, кто изучает сопротивление материалов.

Список литературы

1. Одинцов А.И. Проблема интенсификации процесса обучения в современной педагогической науке // Молодой ученый. 2015. № 3 (83). С. 829–831.

2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов: учебник для технических вузов. 5-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1989. 624 с.

3. Кривошапко С.Н. Сопротивление материалов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата. М.: Юрайт, 2015. 413 с. Серия: Профессиональное образование.

4. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов: учебник / под общ. ред. Г.Д. Межецкого, Г.Г. Загребина. 5-е изд. М., 2016. 432 с.

5. Грушевский С.П., Остапенко А.А. Сгущение учебной информации в профессиональном образовании: монография. Краснодар: Кубанский государственный университет, 2012. 188 с.