СТАТЬИ

УДК 519.216:519.224

РАЗРАБОТКА И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ИДЕНТИФИКАЦИИ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Акимов С.С., Трипкош В.А.

ФГБОУ ВО Оренбургский государственный университет, Оренбург, e-mail: sergey_akimov_work@mail.ru

Цель исследования заключается в том, чтобы, основываясь на синтезе проведенных ранее исследований, разработать новый метод идентификации закона распределения вероятностей с возможностью его программной реализации на машинном языке для автоматизации расчетов, а также сравнения полученного метода с наиболее известными аналогами. В качестве методов использованы разработанные ранее подходы. Общий алгоритм исследования основан на классификации законов распределения по различным параметрам. Определение непрерывности и дискретности проводилось на основе итерационного поиска повторов в совокупностях данных и обнаружении стандартного изменения каждой величины. Оценка симметричности и плосковершиности распределений проводилась при помощи стандартных коэффициентов асимметрии и эксцесса, для чего потребовалось рассчитывать критические значения для обоих коэффициентов применительно к каждому из идентифицированных законов. Оценка тяжести хвоста распределения проведена при помощи оценки Хилла, адаптированной таким образом, чтобы полученное численное решение возможно было использовать при идентификации закона распределения. Также были вычислены характеристики необходимого объема анализируемых данных с учетом вероятности ошибки. Кроме того, изучены случаи, когда идентификация затруднена, и продумал алгоритм принятия решения в этом случае. Программная реализация полученного комплексного метода («Knowlaw») была сравнена с различными программными средствами-аналогами («Настройка распределения» и «Обработка массивов данных»). Данные для исследования были получены при помощи генератора случайных чисел, численность совокупностей варьировалась от 25 до 1000. Анализируемые программные средства сравнивались по функционалу, а также по количеству ошибок первого и второго рода. Отличительными особенностями программного средства «Knowlaw» являются большее количество идентифицируемых законов распределения, а также возможность выбора результата среди нескольких вариантов. Среднее количество находится на уровне других программных средств. Таким образом, разработанное программное средство позволяет идентифицировать 17 законов распределения с большой долей вероятности в автоматизированном режиме, не уступая аналогам и имея несколько более широкий функционал.

Ключевые слова: идентификация закона распределения, программное средство, разработка

DEVELOPMENT AND SOFTWARE IMPLEMENTATION OF THE METHOD OF IDENTIFICATION OF DISTRIBUTION LAWS

Akimov S.S., Tripkosh V.A.

Orenburg State University, Orenburg, e-mail: sergey_akimov_work@mail.ru

The purpose of the study is to develop a new method for identifying the probability distribution law, based on a synthesis of previous studies, with the possibility of its software implementation in machine language to automate calculations, as well as comparing the obtained method with the most well-known analogues. Previously developed approaches were used as methods. The general research algorithm is based on the classification of distribution laws according to various parameters. The determination of continuity and discreteness was carried out on the basis of an iterative search for repetitions in data sets and the detection of a standard change in each value. The evaluation of the symmetry and flatness of distributions was carried out using standard coefficients of asymmetry and kurtosis, for which it was necessary to calculate the critical values for both coefficients in relation to each of the identified laws. The estimate of the severity of the tail of the distribution was carried out using the Hill estimate, adapted in such a way that the obtained numerical solution could be used to identify the distribution law. The characteristics of the required volume of analyzed data were also calculated, taking into account the probability of error. In addition, cases were studied when identification is difficult, and a decision algorithm was thought out in this case. The software implementation of the obtained complex method («Knowlaw») was compared with various analogous software tools («Distribution setting» and «Data array processing»). The data for the study were obtained using a random number generator, the number of populations varied from 25 to 1000. The analyzed software was compared in terms of functionality, as well as in terms of the number of errors of the first and second kind. Distinctive features of the Knowlaw software tool are a greater number of identifiable distribution laws, as well as the ability to select a result among several options. The average number is at the level of other software tools. Thus, the developed software tool allows you to identify 17 distribution laws with a high degree of probability in an automated mode, not inferior to analogues and having a slightly wider functionality.

Keywords: identification of the distribution law, software, development

В настоящее время большинство методов обработки и анализа данных опираются на вероятностные методы. Характеристики вероятности задаются при помощи законов распределения, однако вид закона в случае работы с прикладными данными редко бывает известен заранее. Потому идентификация закона распределения вероятности является важной задачей, решение которой позволяет значительно повысить точность расчетов и прогнозов на их основе. В теории вероятности задача идентификации за-

кона распределения вероятностей является обратной задачей, ключевой для математической статистики. Это определяет основную цель и направление математических изысканий в данной сфере.

Необходимо отметить, что процесс идентификации является достаточно сложным процессом. Примером тому может служить метод Парзена–Розенблатта [1], при использовании которого оценка ряда параметров является более трудоемкой задачей, чем собственно исходная задача идентификации распределения. Для упрощения идентификации закона распределения было разработано программное средство, получившее название «Knowlaw».

1. Принцип работы программного средства «Knowlaw»

В большинстве случаев для идентификации закона распределения используются какие-либо характеристики исследуемых совокупностей данных, которые позволяют выявить общие закономерности для формулирования закона распределения.

Ранее нами уже был представлен алгоритм, позволяющий идентифицировать законы распределения [2]. В его основе лежит ряд методов, позволяющих поэтапно отвергать законы распределения из общего их набора, которые не соответствуют тем или иным критериям. Среди таких методов выделены: определение непрерывности или дискретности исходных данных; определение моментов третьего и четвертого порядка – симметричности и плосковершинности искомого распределения; определение тяжести хвоста распределения; построение гистограммы и ее анализ. Кроме того, сформированная четкая последовательность действий позволяет подстраивать алгоритм под программный язык.

При этом каждый из указанных методов нуждается в проработке, что также было отражено в ряде ранее опубликованных работ. Метод определения непрерывности и дискретности исходных данных [3] основан на отборе повторов в совокупностях данных и обнаружении стандартного изменения каждой величины.

Другим методом является определение симметричности и плосковершиности распределений, для чего использовались коэффициенты асимметрии и эксцесса [4]. Отметим, что использование данных коэффициентов для идентификации законов распределения предлагалось и ранее [5], однако только для выделения нормального распределения из общего их числа. Общее количество идентифицируемых законов было определено посредством составления рейтинга, в котором учитывались отечественные и зарубежные работы, применяющие в процессе исследования те или иные законы распределения [6]. Примеров методов оценок тяжести хвоста достаточно много в современной научной литературе [7].

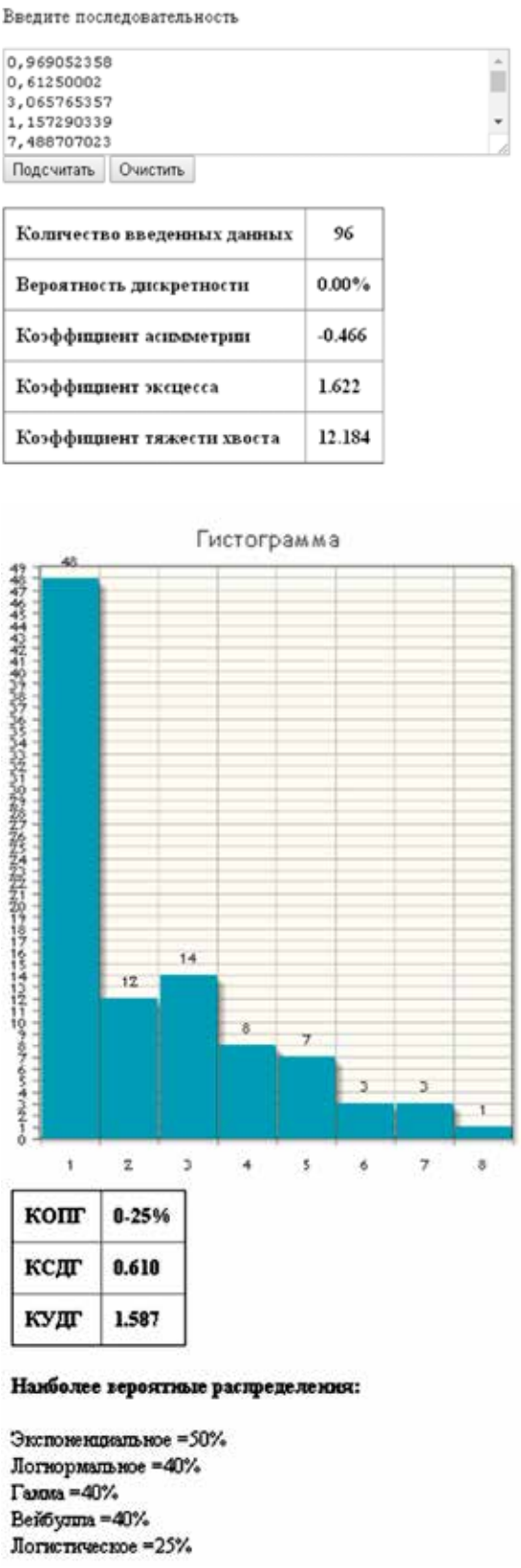
В качестве метода определения тяжести хвоста распределения для программного средства «Knowlaw» применялся метод, основанный на оценке Хилла [8]. Кроме того, в работе приведена адаптация данной оценки, поскольку ее базовый вариант не дает численного решения для задачи определения тяжести хвоста, что, в свою очередь, не дает возможности для идентификации закона распределения, и потому требует соответствующей доработки. Стоит отметить, что оценка Хилла является достаточно распространенной оценкой, применяемой в настоящее время [9].

Одним из наиболее распространенных методов, применяемых при идентификации закона распределения, является метод гистограмм [10]. Данный метод позволяет эксперту приблизительно оценить плотность распределения закона распределения, что дает возможность для приближенного принятия решения о виде закона распределения [11]. Как правило, гистограмма строится на основе ранжированного ряда распределения, количество столбцов гистограммы определяют при помощи формулы Стерджесса [12]. Подобные проверки также осуществляются различным набором методов, в большинстве случаев для этого применяется широко распространенный критерий Колмогорова [13].

Также для реализации метода применялся ряд коэффициентов, облегчающих принятие решения при оценивании распределения при помощи гистограммы [14]. Данные коэффициенты имеют в своей основе те же принципы, которые применяются в задачах распознавания образом. Полученные коэффициенты оценки гистограммы были проверены и на других работах, что подтверждает их адекватность и применимость [15].

Каждый из перечисленных выше методов имеет самостоятельное значение, однако их особенность заключается в том, что все они могут быть применены в комплексе [16]. Данная особенность создала предпосылки для разработки программного средства «Knowlaw».

Пример решения задачи идентификации закона распределения вероятности в данной программе приведен на рисунке.



Пример решения задачи идентификации закона распределения вероятности в данной программе «Knowlaw»

Функционал программы включает в себя: расчет ряда коэффициентов (адаптированных для идентификации закона распределения); построение и анализ гистограммы посредством специально разработанных гистограммных коэффициентов; подбор решения на основе вероятностных характеристик появления у определенного закона распределения полученного набора результатов расчета каждого из коэффициентов.

Отличительной характеристикой программного средства является возможность его применения на достаточно малых выборках (от 10 наблюдений). Кроме того, решение принимается на основе комплексного анализа, и пользователю предлагаются также другие варианты, имеющие более низкую вероятность. Автоматизация процесса идентификации позволяет выбрать наиболее предпочтительный закон сразу из общего их количества.

2. Результаты проверки эффективности разработанной программы «Knowlaw»

Ниже приведем сравнение полученной программы с другими аналогичными программными средствами. Среди них в целях сравнения использовались модуль «Настройка распределения» в пакете Statistica, а также программа восстановления плотности «Обработка массивов данных», приведенная на сайте «Exponenta» [17]. В пакете прикладных программ Statistica имеется встроенная функция «Настройка распределения». Точность подгонки оценивается при помощи критерия Колмогорова, хи-квадрат, критериев Шапиро–Уилка и Лиллиефорса.

Образовательный математический сайт Exponenta.ru (http://www.exponenta.ru) имеет встроенный модуль «Обработка массивов данных», который предназначен для идентификации закона распределения. В программе имеется возможность идентификации таких законов распределения, как нормальный, экспоненциальный, равномерный непрерывный, треугольный, а также распределений Лапласа и Рэлея. Точность подгонки оценивается при помощи одновыборочного критерия Колмогорова или хи-квадрат Пирсона. Имеется возможность отображать гистограмму плотности распределения.

Сравним возможности каждого из перечисленных программах средств (табл. 1).

Согласно данным таблицы 1, авторское программное средство имеет ряд преимуществ перед другими программами. К этим преимуществам можно отнести заметно большее число законов распределения, которые удается идентифицировать, а также потенциальную возможность выбора определенного закона из нескольких схожих вариантов.

Таблица 1

Сравнение возможностей программных средств, применяемых для идентификации закона распределения

Критерии сравнения	«Настройка распределения»	«Обработка массивов данных»	«Knowlaw»
Количество различаемых распределений	12	6	17
Минимальное количество данных	3	25	10
Необходимость выбора распределения «вручную»	Да	Нет	Нет
Учет дискретных распределений	Да	Нет	Да
Возможность выбора из нескольких вариантов распределения	Нет	Нет	Да

Таблица 2

Величина ошибки первого рода в процессе идентификации законов распределения программными средствами, %

Сравниваемые распределения	«Настройка распределения»	«Обработка массивов данных»	«Knowlaw»
Нормальное	4,5	5,5	5,0
Равномерное непрерывное	4,5	4,0	3,5
Экспоненциальное	3,5	6,5	4,5
Рэлея	6,0	3,5	5,0
Среднее количество ошибок	4,6	4,9	4,5

Далее проведем непосредственную оценку качества идентификации распределений. Поскольку каждое из приведенных программных средств может идентифицировать разное количество законов распределения, то остановимся только на тех из них, которые могут быть идентифицированы всеми тремя программами. Таким образом, среди всего многообразия законов распределения идентификации подлежат только нормальный, равномерный (непрерывный), экспоненциальный, а также распределение Рэлея.

Методика проверки следующая: на генераторе случайных чисел было сгенерировано множество совокупностей данных – 200 для каждого из распределений в интервале от 25, что составляет минимальный интервал для идентификации программой «Обработка массивов данных», до 1000 значений. В качестве генератора использовалась программа Mathcad 14. Каждое из распределений затем подвергалось идентификации, и каждый результат фиксировался. Итоговые результаты приведены в таблице 2.

По полученным данным в таблице 2 видно, что лучший результат в процессе идентификации таких законов распределения, как экспоненциальный и нормальный, дает «Настройка распределения». Однако данное программное средство имеет наиболее низкие результаты при оценке распределения Рэлея и непрерывного равномерного распределения.

Программное средство «Обработка массивов данных» имеет наилучший результат при идентификации распределения Рэлея, но наихудший для экспоненциального и нормального закона распределения. Программное средство «Knowlaw» наиболее точно идентифицирует равномерное непрерывное распределение, при этом все остальные рассматриваемые законы распределения идентифицируются с не самыми худшими результатами.

Далее проведем проверку на наличие ошибок второго рода. Для этого сгенерируем массивы данных в том же количестве, что и в предыдущей проверке, и имеющих схожие законы распределения, такие как: для проверки идентификации равномерного закона распределения: нормальное и бета-распределение; для проверки идентификации нормального закона распределения: равномерное, гипергеометрическое, биномиальное, логистическое и гамма-распределение; для проверки идентификации экспоненциального закона распределения: распределения Коши, Пуассона, геометрическое и логнормальное распределения; для проверки идентификации закона распределения Рэлея: распределение Вейбулла и гамма-распределение. В результате проведенной проверки получаем величины ошибок второго рода (табл. 3).

По полученным данным в таблице 3 лучший результат для экспоненциального и нормального законов распределения вероятностей имеет программное средство «Настройка распределения».

Таблица 3

Величина ошибки второго рода в процессе идентификации законов распределения программными средствами, %

Сравниваемые распределения	«Настройка распределения»	«Обработка массивов данных»	«Knowlaw»
Нормальное	4,0	4,5	4,5
Равномерное непрерывное	4,0	4,0	3,0
Экспоненциальное	4,5	5,5	4,5
Рэлея	5,0	3,0	5,5
Среднее количество ошибок	4,4	4,3	4,4

Программное средство имеет худший среди рассматриваемых продуктов результат при идентификации равномерного непрерывного распределения.

Программное средство «Обработка массивов данных» наилучший результат показывает при идентификации распределения Рэлея, при этом худший – для нормального и экспоненциального распределений. Программа «Knowlaw» имеет наилучший результат в процессе идентификации равномерного закона распределения. Таким образом, оптимальным методом является программный продукт «Knowlaw». Данный вывод сделан с учетом всех представленных преимуществ, а также меньшей суммарной ошибки первого и второго рода.

Заключение

Результаты исследования эффективности программы для идентификации закона распределения вероятностей «Knowlaw» позволяют сделать вывод, что данная программа – средство с широким функционалом и имеет преимущества перед аналогами. К ним относятся большее число законов распределения, которые удается оценить, а также возможность выбора определенного закона из нескольких вариантов. Кроме того, оценка точности подбора законов показала, что программное средство «Knowlaw» наиболее точно идентифицирует равномерное непрерывное распределение, при этом все остальные рассматриваемые законы распределения идентифицируются с не самыми худшими результатами.

Список литературы

1. Заморёнов М.В., Карташов Л.Е., Копп В.Я. Идентификации законов распределения по экспериментальным данным нейронными сетями // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2019. № 4-1 (336). С. 66-76.

2. Акимов, С.С. Использование коэффициентов асимметрии и эксцесса при гистограммном методе определения закона распределения вероятности // Известия Оренбургского государственного аграрного университета. 2014. № 1 (45). С. 225-227.

3. Шепель В.Н., Акимов С.С. Эвристическая процедура определения подходящего распределения вероятности // Компьютерная интеграция производства и ИПИ-технологии: V Всероссийская научно-практическая конференция с элементами научной школы-семинара молодых ученых и специалистов, посвященная 50-летию механического факультета Аэрокосмического института ОГУ. Оренбург: ОГУ, 2011. С. 137-139.

4. Галкин В.М., Ерофеева Л.Н., Лещева С.В. Оценки параметра распределения Коши // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2014. № 2. С. 314-319.

5. Пытьев Ю.П. Математические методы субъективного моделирования в научных исследованиях // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. 2018. № 2. С. 3-17.

6. Rhodes Ch.K. Mathematics-physics identity // Прикладная физика и математика. 2018. № 6. С. 21-28.

7. Акимов С.С. Оценка Хилла как ключевая оценка для распознавания тяжело- и легкохвостовых законов распределения вероятности // Научное обозрение. 2014. № 10-2. С. 349-352.

8. Заморёнов М.В., Карташов Л.Е., Копп В.Я. Идентификации законов распределения по экспериментальным данным нейронными сетями // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2019. № 4-1 (336). С. 66-76.

9. Заморёнов М.В., Карташов Л.Е., Копп В.Я. Идентификации законов распределения по экспериментальным данным нейронными сетями // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2019. № 4-1 (336). С. 66-76.

10. Соловьев И.А. Модифицированный закон нормального распределения вероятностей // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ. 2020. Т. 2. С. 3-8.

11. Вайчюлис М., Маркович Н.М. Класс семипараметрических оценок тяжести хвоста распределения и его применения // Автоматика и телемеханика. 2019. № 10. С. 62-77.

12. Глебов В.И., Криволапов С.Я. О принадлежности к области притяжения устойчивых законов распределений, обобщающих распределение Коши // Успехи современной науки. 2016. Т. 6. № 11. С. 32-35.

13. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика. Основы эконометрики (в 2-х т.). Теория вероятностей и прикладная статистика. М.: Юнити-Дана, 2007. 656 с.

14. Богданов Ю.И. Метод максимального правдоподобия и корневая оценка плотности распределения // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2004. Т. 70. № 3. С. 52-61.

15. Орлов А.И. Распространенная ошибка при использовании критериев Колмогорова и омега-квадрат // Заводская лаборатория. 1985. № 1. Т. 51. С. 60-62.

16. Шепель В.Н., Акимов С.С. Модернизация метода гистограмм для выявления принадлежности неизвестного массива данных определенному закону распределения вероятностей // Вестник Оренбургского государственного университета. 2014. № 9 (170). С. 179-181.

17. Акимов С.С. Расчёт объёма выборки эксперимента в условиях отсутствия нормальности данных // Известия Оренбургского государственного аграрного университета. 2015. № 5 (55). С. 235-237.