

СТАТЬИ

УДК 004.8:519.86/.87

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВОСПИТАНИЯ  
КОМПЛЕКСНЫХ ЭМОЦИЙ РОБОТА**

**Анисимова С.И.**

*ФГАОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет»,  
Пермь, e-mail: kolsve@mail.ru*

Введена и рассмотрена интегральная характеристика достижения цели воспитания роботов. Предложена математическая модель целеустремленности робота при достижении цели воспитания. Введено математическое определение зависимости интегральной характеристики достижения цели от целеустремленности робота. Сформулирована и доказана теорема, связывающая условия стремления воспитания робота и его достижение цели воспитания. Сформулированы условия приближения воспитания робота к цели его воспитания для разных коэффициентов памяти робота. Показано, что при коэффициенте памяти, равном нулю, для приближения к цели воспитания достаточно, чтобы элементарное воспитание на текущем такте превосходило воспитание на предыдущем такте. Показано, что для роботов с абсолютной памятью для приближения к цели воспитания достаточно положительного скалярного произведения текущего воспитания и цели воспитания. Показано, что для равномерно забывчивых роботов, если элементарное воспитание на текущем такте превосходит некоторую «забытую» долю воспитания на предыдущем такте, то робот стремится к цели воспитания. Сформулировано необходимое условие приближения воспитания робота к цели воспитания в процессе увеличения воспитательных тактов. Сформулирована и доказана теорема о том, что базис комплексных гармонических эмоций робота порождает базис его гармонических воспитаний. Согласно приведенным в статье результатам, предлагается определять величину достижения роботом поставленной воспитательной цели и формулировать условие достижения цели, обеспечивающее достижение воспитательной цели за наименьшее количество воспитательных тактов. Результаты, описанные в статье, предлагается применять для проектирования воспитания групп роботов, исходя из того, что каждый робот группы имеет общую цель воспитания, разные векторы воспитания в настоящий момент времени и разные коэффициенты памяти.

**Ключевые слова:** целеустремленность, модель, базис, общеэмоциональный, робот

**MATHEMATICAL MODEL OF INTEGRATED EDUCATION  
OF COMPLEX EMOTIONS OF A ROBOT**

**Anisimova S.I.**

*Perm State University, Perm, e-mail: kolsve@mail.ru*

An integral characteristic of achieving the goal of educating robots is introduced and considered. A mathematical model of the purposefulness of the robot in achieving the goal of education is proposed. A mathematical definition of the dependence of the integral characteristic of achieving the goal on the purposefulness of the robot is introduced. A theorem is formulated and proved that links the conditions of striving for the upbringing of a robot and its achievement of the goal of upbringing. The conditions for the approximation of the upbringing of the robot to the goal of its upbringing are formulated for different coefficients of the robot's memory. It is shown that with a memory coefficient equal to zero, to approach the goal of education, it is sufficient that elementary education at the current cycle is superior to education at the previous cycle. It is shown that for robots with absolute memory to approach the goal of upbringing, a positive scalar product of the current upbringing and the goal of upbringing are sufficient. It is shown that for uniformly forgetful robots, if elementary education at the current cycle exceeds some «forgotten» share of education at the previous cycle, then the robot strives for the goal of education. The necessary condition for bringing the robot upbringing closer to the goal of upbringing in the process of increasing the upbringing measures has been formulated. The theorem is formulated and proved that the basis of complex harmonic emotions of a robot generates the basis of its harmonious upbringing. According to the results presented in the article, it is proposed to determine the value of the robot's achievement of the set educational goal and to formulate the conditions for achieving the goal, ensuring the achievement of the educational goal in the least number of educational steps. The results described in the article are proposed to be applied to the design of the education of groups of robots, based on the fact that each robot of the group has a common goal of education, different vectors of education at the present time and different memory coefficients.

**Keywords:** purposefulness, model, basis, general emotional, robot

В монографии [1] приведено определение комплексных эмоций робота. Также введено определение воспитания робота. Программист может ставить перед собой цель добиться заданного воспитания робота. При этом возникает задача контроля достижения роботом поставленной воспитательной цели на каждом этапе воспитания.

Актуальность данной статьи продиктована необходимостью нахождения способов численной оценки достижения воспитательной цели.

Цель данной статьи состоит в построении математических моделей эмоционального состояния робота и целеустремленности робота при достижении поставленной воспитательной цели.

*Общая математическая модель цели воспитания робота*

Пусть задана цель воспитания робота, определяемая соотношением:

$$\bar{A} = (A_1, \dots, A_n),$$

где  $A_i > 0, i = \overline{1, n}$   $n$  – количество базовых эмоций в комплексной эмоции робота [1].

Пусть вектор воспитаний робота, полученных в результате возникших у него эмоций в ответ на раздражающий стимул, имеет вид:

$$\bar{R} = (R_1, \dots, R_n).$$

Пусть  $\psi$  – угол между векторами  $\bar{A}$  и  $\bar{R}$ .

Известно, что скалярное произведение векторов удовлетворяет соотношению [2]:

$$(\bar{A}, \bar{R}) = |\bar{A}| |\bar{R}| \cos \psi.$$

Следовательно, косинус угла  $\psi$  между векторами можно определить по формуле:

$$\cos \psi = \frac{(\bar{A}, \bar{R})}{|\bar{A}| |\bar{R}|}.$$

По определению проекции [2] справедливо равенство:

$$\bar{R}_{\text{пр}} = |\bar{R}| \cos \psi,$$

где  $\bar{R}_{\text{пр}}$  – это проекция вектора  $\bar{R}$  на  $\bar{A}$ .

Таким образом, интегральную характеристику  $\delta$ , описывающую величину достижения поставленной воспитательной цели при заданном воспитании робота, можно вычислить по следующей формуле:

$$\delta = \frac{|\bar{R}_{\text{пр}}|}{|\bar{A}|}.$$

Пусть  $\alpha = \cos \psi$ , тогда справедливо соотношение:

$$\alpha = \cos \psi = \frac{(\bar{A}, \bar{R})}{|\bar{A}| |\bar{R}|} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i R_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n R_i^2}}. \quad (1)$$

Очевидно соотношение:  $\alpha \in [-1, 1]$ .

Величину  $\alpha$  назовем целеустремленностью робота при достижении воспитательной цели.

Очевидно то, что большему численному значению  $\alpha$  соответствует большая целеустремленность к цели воспитания.

Справедлива цепочка равенств:

$$\delta = \frac{|\bar{R}| (\bar{A}, \bar{R})}{|\bar{A}| |\bar{A}| |\bar{R}|} = \frac{(\bar{A}, \bar{R})}{|\bar{A}|^2} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i R_i}{\sum_{i=1}^n A_i^2}, \quad (2)$$

$$\delta = \frac{\alpha |\bar{R}|}{|\bar{A}|}, \alpha = \frac{\delta |\bar{A}|}{|\bar{R}|}.$$

*Общая математическая модель достижения цели для гармонических эмоций робота*

В монографии [1] описывается элементарная эмоция в виде гармонической функции

$$M_j(t) = P_j \sin \left( \frac{\pi}{t_j - t_{j-1}} (t - t_{j-1}) \right),$$

где  $t \in [t_{j-1}, t_j]$ ,  $P_j = \text{const}$ ,  $t$  – текущий момент времени,  $t_{j-1}$  – момент времени начала действия элементарной эмоции,  $t_j$  – момент времени окончания действия элементарной эмоции,  $j$  – номер такта.

Исходя из предыдущей формулы и работы [1] вычислим элементарное воспитание робота:

$$R_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} P_j \sin\left(\frac{\pi}{t_j - t_{j-1}}(t - t_{j-1})\right) dt = \frac{2P_j(t_j - t_{j-1})}{\pi}.$$

Отсюда следует, что вектор воспитаний робота, полученный на такте с номером  $j$ , будет иметь вид:

$$\bar{R}_{i,j} = (R_{1,j} \dots R_{n,j}).$$

Тогда становится очевидным соотношение:

$$\delta_j = \frac{\sum_{i=1}^n A_i R_{i,j}}{\sum_{i=1}^n A_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \frac{2P_{i,j}(t_j - t_{j-1})}{\pi}}{\sum_{i=1}^n A_i^2}. \quad (3)$$

В работе [1] предложено элементы вектора комплексного эмоционального воспитания робота вычислять по формуле:

$$R_{i,j} = r_{i,j} + \Theta_{i,j} R_{i,j-1},$$

где  $j$  – номер такта,  $\Theta_{i,j} \in [0,1]$  – коэффициент памяти,  $r_{i,j}$  – элементарное воспитание.

С учетом коэффициентов памяти робота справедливы соотношения:

$$\delta_j = \frac{\sum_{i=1}^n A_i R_{i,j}}{\sum_{i=1}^n A_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i (r_{i,j} + \Theta_{i,j} R_{i,j-1})}{\sum_{i=1}^n A_i^2}, \quad (4)$$

$$\alpha_j = \frac{\sum_{i=1}^n A_i R_{i,j}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n R_{i,j}^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i (r_{i,j} + \Theta_{i,j} R_{i,j-1})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_{i,j} + \Theta_{i,j} R_{i,j-1})^2}}. \quad (5)$$

Рассмотрим разность интегральных характеристик достижения цели для двух последовательных тактов, где  $\delta_j$  – значение величины достижения поставленной цели при воспитательном такте с порядковым номером  $j$ .

Очевидна следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \delta_j - \delta_{j-1} &= \frac{\sum_{i=1}^n A_i (r_{i,j} + \Theta_{i,j} R_{i,j-1})}{\sum_{i=1}^n A_i^2} - \frac{\sum_{i=1}^n A_i R_{i,j-1}}{\sum_{i=1}^n A_i^2} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n A_i (R_{i,j-1} (\Theta_{i,j} - 1) + r_{i,j})}{\sum_{i=1}^n A_i^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 1.

При стремлении воспитания к цели воспитания должно выполняться условие:

$$\sum_{i=1}^n A_i (R_{i,j-1} (1 - \Theta_{i,j})) < \sum_{i=1}^n A_i (r_{i,j}). \quad (7)$$

Доказательство.

Очевидно, что при достижении цели разность  $\delta_j - \delta_{j-1}$  должна быть положительна, т.е. должно выполняться неравенство:

$$\frac{\sum_{i=1}^n A_i (R_{i,j-1} (\Theta_{i,j} - 1) + r_{i,j})}{\sum_{i=1}^n A_i^2} > 0.$$

Преобразовывая полученное неравенство и учитывая то, что знаменатель дроби всегда положительный и  $\Theta_{i,j} \in [0,1]$ , получаем неравенство (7).

Таким образом, теорема доказана.

Из теоремы 1 следует несколько выводов.

1. Если коэффициент памяти равен нулю  $\Theta_{i,j} = 0$ , то

$$\sum_{i=1}^n A_i(R_{i,j-1}) < \sum_{i=1}^n A_i(r_{i,j}). \quad (8)$$

Если элементарное воспитание на текущем такте превосходит воспитание на предыдущем такте, тогда воспитание будет приближаться к цели.

2. Если робот обладает абсолютной памятью [1] ( $\Theta_{i,j} = 1$ ), то

$$\sum_{i=1}^n A_i(r_{i,j}) > 0. \quad (9)$$

3. Если робот равномерно забывчивый [3, 4] ( $\Theta_{i,j}$  не зависит от номера такта  $j$ ), то

$$\sum_{i=1}^n A_i(R_{i,j-1}(1-\Theta_i)) < \sum_{i=1}^n A_i(r_{i,j}). \quad (10)$$

Очевидно, что воспитание робота стремится к воспитательной цели, если элементарное воспитание на текущем такте превосходит некоторую «забытую» долю воспитания на предыдущем такте.

Очевидно, что, чем ближе воспитательный процесс приближается к цели воспитания  $A$ , тем больше забываемая величина текущего воспитания и тем больше должно быть элементарное воспитание  $r_{i,j}$ .

*Исследование математической модели достижения цели при комплексных гармонических эмоциях*

Очевидна цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{\sum_{i=1}^n A_i(r_{i,j} + \Theta_{i,j}R_{i,j-1})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_{i,j} + \Theta_{i,j}R_{i,j-1})^2}} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (R_{i,j-1})^2}}{\sum_{i=1}^n A_i R_{i,j-1}} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n A_i(r_{i,j} + \Theta_{i,j}R_{i,j-1})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (r_{i,j} + \Theta_{i,j}R_{i,j-1})^2}} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_{i,j-1})^2}}{\sum_{i=1}^n A_i R_{i,j-1}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим только положительные целеустремленности  $\alpha$ , которые приближают робота к цели воспитания.

Тогда необходимое условие приближения к цели воспитания описывается соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^n A_i(r_{i,j} + \Theta_{i,j}R_{i,j-1})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (r_{i,j} + \Theta_{i,j}R_{i,j-1})^2}} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_{i,j-1})^2}}{\sum_{i=1}^n A_i R_{i,j-1}} > 1, \\ \frac{\sum_{i=1}^n A_i(r_{i,j} + \Theta_{i,j}R_{i,j-1})}{\sum_{i=1}^n A_i R_{i,j-1}} > \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (r_{i,j} + \Theta_{i,j}R_{i,j-1})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_{i,j-1})^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим равномерно забывчивого робота с равноценными эмоциями. Согласно [5] для такого робота воспитание вычисляется по формуле:

$$R_{i,j-1} = q_i \frac{1 - \Theta_i^{j-1}}{1 - \Theta_i},$$

где  $q_i$  – элементарное воспитание робота,  $i$  – постоянное для каждого такта  $j$ .

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \delta_j - \delta_{j-1} &= \frac{\sum_{i=1}^n A_i \left( q_i \frac{1 - \Theta_i^j}{1 - \Theta_i} \right)}{\sum_{i=1}^n A_i^2} - \frac{\sum_{i=1}^n A_i \left( q_i \frac{1 - \Theta_i^{j-1}}{1 - \Theta_i} \right)}{\sum_{i=1}^n A_i^2} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n A_i q_i \Theta_i^{j-1}}{\sum_{i=1}^n A_i^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Описанная выше цепочка равенств дает основание утверждать, что, если  $q_i$  имеет один знак с  $A_i$ , то  $\delta_j$  будет возрастающей последовательностью, что определяет увеличение значения достижения поставленной воспитательной цели.

Рассмотрим разность интегральных характеристик достижения воспитательной цели для гармонических эмоций.

Для гармонических эмоций справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \delta_j - \delta_{j-1} &= \frac{\sum_{i=1}^n A_i \frac{2P_{i,j}(t_j - t_{j-1})}{\pi}}{\sum_{i=1}^n A_i^2} - \frac{\sum_{i=1}^n A_i \frac{2P_{i,j-1}(t_{j-1} - t_{j-2})}{\pi}}{\sum_{i=1}^n A_i^2} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{2A_i}{\pi} (P_{i,j}(t_j - t_{j-1}) - P_{i,j-1}(t_{j-1} - t_{j-2}))}{\sum_{i=1}^n A_i^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Анализ цепочки равенств позволяет утверждать, что для того, чтобы разность  $\delta_j - \delta_{j-1}$  была положительной, требуется совпадение по знаку величин  $A_i$  и  $P_{ij}$  (независимо от номера такта  $j$ ), а также длительность воздействия или амплитуда эмоции  $P_{ij}$  каждой последующей эмоции должна увеличиваться с увеличением номера такта  $j$ .

Рассмотрим разность интегральных характеристик  $\delta_j - \delta_{j-1}$  достижения цели для гармонических эмоций, когда такты равны между собой  $t_j - t_{j-1} = t$ .

Для этого случая справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \delta_j - \delta_{j-1} &= \frac{\sum_{i=1}^n A_i \frac{2P_{i,j}(t)}{\pi}}{\sum_{i=1}^n A_i^2} - \frac{\sum_{i=1}^n A_i \frac{2P_{i,j-1}(t)}{\pi}}{\sum_{i=1}^n A_i^2} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\pi} 2t (P_{i,j} - P_{i,j-1}) > 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда следует, что для приближения воспитания к цели знак разности  $(P_{ij} - P_{i,j-1})$  должен совпадать со знаком  $A_i$ .

В статье [6] описываются гармонические эмоции и гармонические воспитания робота, а также предложены базисы гармонических воспитаний. Рассмотрим базис для гармонических воспитаний при  $P_{ij} = 1$ . Этот базис имеет вид:

$$\bar{e}_1 = \left( 2 \frac{t_j - t_{j-1}}{\pi}, 0, 0, \dots, 0 \right),$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_2 &= \left( 0, 2 \frac{t_j - t_{j-1}}{\pi}, 0, \dots, 0 \right), \\ &\dots \\ \bar{e}_n &= \left( 0, 0, 0, \dots, 2 \frac{t_j - t_{j-1}}{\pi} \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что цель воспитания и полученное воспитание по гармоническому базису имеют вид [7]:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A_1 \bar{e}_1 + A_2 \bar{e}_2 + \dots + A_n \bar{e}_n, \\ \bar{R}_j &= R_{1,j} \bar{e}_1 + R_{2,j} \bar{e}_2 + \dots + R_{n,j} \bar{e}_n. \end{aligned}$$

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. Базис гармонических эмоций порождает базис гармонических воспитаний.

Доказательство

Рассмотрим матрицу  $H$ , построенную на векторах  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  [7]:

$$H = \begin{pmatrix} 2 \frac{t_j - t_{j-1}}{\pi} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 \frac{t_j - t_{j-1}}{\pi} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \frac{t_j - t_{j-1}}{\pi} \end{pmatrix}.$$

Определитель  $\Delta$  данной матрицы имеет вид [7]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 \frac{t_j - t_{j-1}}{\pi} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 \frac{t_j - t_{j-1}}{\pi} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \frac{t_j - t_{j-1}}{\pi} \end{vmatrix} = 2^n \left( \frac{t_j - t_{j-1}}{\pi} \right)^n.$$

Поскольку длина такта  $t_j - t_{j-1} \neq 0$ , то данный определитель не равен нулю. Отсюда следует, что базис гармонических воспитаний действительно будет базисом.

Таким образом, интегральная характеристика достижения цели  $\delta_j$  сама по себе описывается через базис гармонических воспитаний и имеет вид:

$$\delta_j = \frac{\sum_{i=1}^n A_i R_{i,j}}{\sum_{i=1}^n A_i^2}. \quad (16)$$

В РФ разработана программная система численной оценки психоэмоционального состояния человека VibraImage [8]. Система

позволяет автоматически вычислять и визуально оценивать психоэмоциональное состояние человека с помощью компьютерной обработки телевизионного сигнала и его преобразования в виброизображение. Психоэмоциональное состояние человека характеризуется на основе запатентованных авторами разработки алгоритмов анализа вестибулярно-эмоционального рефлекса и макродвижений. Система VibraImage анализирует и регистрирует более 20 параметров виброизображения и позволяет пользователю осуществлять настройку системы в соответствии со своими задачами и определять требуемые психофизиологические параметры человека.

### Заключение

Таким образом, в настоящей статье впервые доказано, что базис гармонических воспитаний является базисом; впервые рассмотрены условия достижения роботом цели воспитания, а также сформулирована теорема об условиях достижения роботом поставленной воспитательной цели при разных коэффициентах памяти робота. По приведенным в статье результатам становится возможным определять величину достижения роботом поставленной воспитательной цели и формулировать условия достижения цели за определенное количество воспитательных тактов.

Практическая значимость результатов, представленных в данной статье, позволяет проектировать воспитание групп роботов исходя из того, что каждый робот группы имеет общую цель воспитания, разные векторы воспитания в настоящий момент времени и разные коэффициенты памяти. На основе математических моделей роботов, предложенных в настоящей статье, можно использовать программу VibrImage для хотя бы весьма приближенного вычисления достижения поставленной

воспитательной цели человеком согласно измеренным его воспитанием с помощью компьютера.

### Список литературы

1. Пенский О.Г., Шарапов Ю.А., Ощепкова Н.В. Математические модели роботов с неабсолютной памятью и приложения моделей: монография. Пермь: Изд-во ПермГУ, 2018. 310 с.
2. Минорский В.П. Векторная Алгебра. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1951. 80 с.
3. Кузнецов А.Г. Пенский О.Г., Ощепкова Н.В. Математическая модель и алгоритм накопления информации роботом с неабсолютной памятью // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2018. Т. 18. № 2. С. 142–148.
4. Черников К.В. Математические модели роботов с неабсолютной памятью: дис. ... канд. ф.-м. наук. Пермь, 2013. 138 с.
5. Пенский О.Г., Анисимова С.И. Математические модели комплексных эмоций и комплексных воспитаний робота // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 12 (2). С. 343–346.
6. Анисимова С.И. Общие свойства математических моделей комплексных эмоций робота // Современные наукоемкие технологии. 2019. № 8. С. 9–13.
7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 280 с.
8. Система контроля психоэмоционального состояния человека (Версия VibrImage 7.0) [Электронный ресурс]. URL: <http://www.elsys.ru/vibrimage.php> (дата обращения: 27.07.2021).