СТАТЬИ

УДК 517.956.226:519.624:66.011

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА МАССООБМЕНА В ОКРЕСТНОСТИ КАПЛИ С УЧЁТОМ ОБЪЁМНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

Ахметов Р.Г., Ложкина Е.В.

ФГБОУ ВО «Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы», Уфа, e-mail: akhmetov051@bk.ru, lenalozhkina15@gmail.com

Исследуется задача о массообмене вне капли, обтекаемой потоком жидкости при наличии гомогенной химической реакции. Особенности задачи: 1) малые числа Рейнольдса, 2) большие значения диффузионного числа Пекле Pe, 3) большие значения константы скорости объёмной химической реакции k_v. Этот случай, когда числа Pe, k_v – соизмеримы, наиболее трудный для исследования. Задача сводится к исследованию полулинейного эллиптического уравнения со слабой нелинейностью. Это соответствует нелинейной химической реакции в среде вне капли. Малый параметр $\varepsilon = \frac{1}{Pe}$, что соответствует большим числам Пекле. При этом задача носит бисингулярный характер. Ранее был исследован случай объёмной химической реакции первого порядка (линейная задача). В бисингулярных задачах эффективным становится метод согласования асимптотических разложений. В окрестности капли естественным образом возникают несколько пограничных слоёв. В этом случае между соседними областями требуется задание условий согласования. В диффузионном пограничном слое получены главные члены асимптотик решений задачи. В работе показано, что в окрестности задней критической точки решение задачи существенно носит слабо нелинейный характер. Это влияет на характер массообмена и в следе за каплей.

Ключевые слова: асимптотическое разложение, конвективная диффузия, метод согласования, число Пекле

COMPUTER MODELING OF THE MASS EXCHANGE PROCESS IN THE NEIGHBORHOOD OF A DROP TAKING INTO ACCOUNT A VOLUME NONLINEAR CHEMICAL REACTION

Akhmetov R.G., Lozhkina E.V.

Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla, Ufa, e-mail: akhmetov051@bk.ru, lenalozhkina15@gmail.com

The problem of mass transfer outside a droplet in a fluid flow in the presence of a homogeneous chemical reaction is investigated. Features of the problem: 1) small Reynolds numbers, 2) large values of the diffusion Peclet number Pe, 3) large values of the rate constant of the volumetric chemical reaction k_v. This case, when the numbers Pe, k_v – are comparable, is the most difficult for research. The problem is reduced to the study of a semilinear elliptic equation with a weak nonlinearity. This corresponds to a nonlinear chemical reaction in a medium outside the droplet. Small parameter ε = 1 / Pe, which corresponds to large Peclet numbers. In this case, the problem is bisingular in nature. Previously, the case of a first-order volumetric chemical reaction (linear problem) was investigated. In bisingular problems, the method of matching asymptotic expansions becomes effective. Several boundary layers naturally arise in the vicinity of the drop. In this case, between neighboring areas, it is required to set the conditions of matching. In the diffusion boundary layer, the leading terms of the asymptotics of the solutions of the problem are obtained. It is shown in the work that in the vicinity of the rear critical point the solution of the problem is essentially weakly nonlinear. This affects the nature of mass transfer in the wake of the drop.

Keywords: asymptotic expansions, convective diffusion, matching method, Peclet number

Распределение концентрации удовлетворяет уравнению [1]

$$\Delta C = Pe\left(\bar{V},\nabla\right)C + k_v F\left(C\right), \qquad (1)$$

где число Пекле $Pe = aU / D$, k_v – константа скорости объемной химической реакции, Δ – оператор Лапласа. Поле скоростей $\bar{V}$ определяется [1] функцией тока $\psi(r, \theta)$. Исследуется решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$C = 1 \text{ при } r = 1;\ C \to 0 \text{ при } r \to \infty. \qquad (2)$$

В случае, когда числа Pe, k_v – соизмеримы, наиболее трудный для исследования (величина $\mu = k_v/Pe$ – постоянная). Задача сводится к исследованию полулинейного эллиптического уравнения со слабой нелинейностью, величина $\mu = k_v/Pe$ – постоянная. В случае $F(u) \equiv u$ асимптотика всюду вне капли построена в работе [1].

Задача массообмена тонкой капли в протяженном потоке исследована в работе [2], а в простом сдвиговом потоке в [3], при больших числах Пекле в [4], в нелинейном объемном потоке в [5]. В случаях деформированных капель задачи тепломассопереноса исследованы в работах [6–8]. А задачам конвективного массопереноса с переменными коэффициентами посвящены работы [9–10].

Пусть функция $F(u)$ удовлетворяет условиям

$$(A): F: R^1 \to R^1, F(0) = 0 \text{ и } 0 \le F'(u) \tag{3}$$

и справедливо разложение

$$F(u) = u + F_2u^2 + F_3u^3 + \ldots + F_ku^k + O(u^{k+1}) \tag{4}$$

при $u \to 0$ и для некоторого $k > 1$.

Уравнение (1), с учетом обозначений $\varepsilon = Pe^{-1/2}$ и $\mu = k_v/Pe$, приводим к виду

$$\varepsilon^2 \Delta C - \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial C}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial C}{\partial \theta}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) - \mu_0 F(C) = 0. \tag{5}$$

Цель исследования: построение асимптотики решения в малой окрестности капли, сначала в диффузионном пограничном слое исследуется асимптотика по малому параметру, далее вблизи точки стекания жидкости с капли исследуется асимптотика по пространственной переменной. Здесь используется техника исследования асимптотики средствами абстрактной математики в среде MAPLE и построена асимптотика на бесконечности. Далее, проводится компьютерное моделирование решений краевой задачи, используя построенную асимптотику. А затем в окрестности задней критической точки методом сращивания получен главный член асимптотики по параметру ε.

Диффузионный пограничный слой

В диффузионном пограничном слое асимптотика ищется в переменных $x = \varepsilon^{-1}(r-1), \theta$. Тогда главный член $c_0(x, \theta)$ строится как решение задачи

$$\frac{\partial^2 c_0}{\partial x^2} - \frac{x\cos\theta}{\lambda+1}\frac{\partial c_0}{\partial x} + \frac{\sin\theta}{2(\lambda+1)}\frac{\partial c_0}{\partial \theta} - \mu_0 F(c_0(x,\theta)) = 0. \tag{6}$$

$$c_0(0,\theta) = 1; c_0(x,\theta) \to 0 \text{ при } t \to \infty, \frac{\partial c_0}{\partial \theta}(x,\pi) = 0. \tag{7}$$

В случае, когда $F(v_0)$ удовлетворяет условиям (3), (4), при $\theta \to 0$ для определения $v_0(x)$ получаем задачу

$$v_0''(x) - xv_0'(x) - \mu F(v_0) = 0, \tag{8}$$

$$v_0(0) = 1, v_0(x) = O(1) \text{ при } x \to \infty. \tag{9}$$

где $\mu = \dfrac{\mu_0}{2}$. Справедлива теорема:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (3) и (4). Тогда при $x \to \infty$ для решения уравнения (8) справедливо асимптотическое представление*

$$v_0(x) = \sum_{j=1, i=0}^{N} c_{j,i} x^{-\mu j - 2i} + O(x^{-N}), \tag{10}$$

где

$$c_{1,0} = const,\ c_{1,1} = \frac{c_{1,0}(-\mu^2 - \mu)}{2},\ c_{1,2} = \frac{-c_{1,1}(\mu^2 + 5\mu + 6)}{4}, \ldots,$$

$$c_{2,0} = F_2 c_{1,0}^2,\ c_{2,1} = \frac{2\mu F_2 c_{1,0} c_{1,1} - (4\mu^2 + 2\mu) c_{2,0}}{\mu + 2},$$

$$c_{2,2} = \frac{2\mu F_2 c_{1,1} c_{1,2} + \mu F_2 c_{1,1}^2 - (4\mu^2 + 10\mu + 6) c_{2,1}}{\mu + 4}, \ldots, c_{3,0} = \frac{c_{1,0}(F_3 c_{1,0}^2 + 2F_2 c_{2,0})}{2},$$

$$c_{3,1}=\frac{3\mu F_3 c_{1,0}c_{1,1}+2\mu F_2 c_{1,0}c_{2,1}+2\mu F_2 c_{1,1}c_{2,0}-\left(9\mu^2+3\mu\right)c_{2,0}}{2\mu+2},$$

$$c_{3,2}=\frac{3\mu F_3 c_{1,0}^2 c_{1,2}+3\mu F_3 c_{1,0}c_{1,1,}^2+2\mu F_2 c_{1,1,}c_{2,1}+2\mu F_2 c_{1,0}c_{2,2}-\left(9\mu^2+15\mu+6\right)c_{3,1}}{2\mu+4},\ldots,$$

$$c_{4,0}=\frac{\mu F_4 c_{1,0}^4+3F_3 c_{1,0}^2 c_{2,0}+F_2 c_{2,0}^2+2F_2 c_{1,0}c_{3,0}}{3},\ldots,$$

$$c_{4,2}=\frac{6\mu F_3 c_{1,0}c_{1,1}c_{3,0}+4\mu F_4 c_{1,0}^3 c_{1,1}+3\mu F_3 c_{1,0}^2 c_{2,1}+2\mu F_2 c_{2,0}c_{2,1}}{3\mu+2}+$$

$$+\frac{2\mu F_2 c_{1,0}c_{3,1}+2\mu F_2 c_{1,1}c_{3,0}-\left(16\mu^2+4\mu\right)c_{4,0}}{3\mu+2},$$ и выполняются условия

$$v_0(x)>0;\ v_0'(x)<0 \ \text{ для } x>0.$$

Доказательство теоремы. Сначала строится формальное асимптотическое решение вида (10). Для получения коэффициентов разложения применяются символьные вычисления в среде MAPLE.

Для начала в программе Maple набираем ряд для нахождения производных:

$$>u\cdot x\to c_{1,0}\cdot x^{-\mu}+c_{1,1}\cdot x^{-\mu-2}+c_{1,2}\cdot x^{-\mu-4}+c_{2,0}\cdot x^{-2\cdot\mu}++c_{2,1}\cdot x^{-2\cdot\mu-2}+$$

$$+c_{2,2}\cdot x^{-2\cdot\mu-4}+c_{3,0}\cdot x^{-3\cdot\mu}+c_{3,1}\cdot x^{-3\cdot\mu-2}+c_{3,2}\cdot x^{-3\cdot\mu-4}+c_{4,0}\cdot x^{-4\cdot\mu}+c_{4,1}\cdot x^{-4\cdot\mu-2};$$

$$x\to c_{1,0}x^{-\mu}+c_{1,1}x^{-\mu-2}+c_{1,2}x^{-\mu-4}+c_{2,0}x^{-2\mu}+c_{2,1}x^{-2\mu-2}+c_{2,2}x^{-2\mu-4}+c_{3,0}x^{-3\mu}+$$

$$+c_{3,1}x^{-3\mu-2}+c_{3,2}x^{-3\mu-4}+c_{4,0}x^{-4\mu}+c_{4,1}x^{-4\mu-2}.$$

Находим производную ряда:

$$>du:=x\to diff\left(u(x),x\right):$$

$$>du(x);$$

$$-\frac{c_{1,0}x^{-\mu}\mu}{x}+\frac{c_{1,1}x^{-\mu-2}(-\mu-2)}{x}+\frac{c_{1,2}x^{-\mu-4}(-\mu-4)}{x}-\frac{2c_{2,0}x^{-2\mu}\mu}{x}+\frac{c_{2,1}x^{-2\mu-2}(-2\mu-2)}{x}+$$

$$+\frac{c_{2,2}x^{-2\mu-4}(-2\mu-4)}{x}-\frac{3c_{3,0}x^{-3\mu}\mu}{x}+\frac{c_{3,1}x^{-3\mu-2}(-3\mu-2)}{x}+\frac{c_{3,2}x^{-3\mu-4}(-3\mu-4)}{x}-$$

$$-\frac{4c_{4,0}x^{-4\mu}\mu}{x}+\frac{c_{4,1}x^{-4\mu-2}(-4\mu-2)}{x}.$$

Вторая производная ряда находится:

$$>d2u:=x\to diff\left(du(x),x\right):$$

$$>d2u(x);$$

$$\frac{c_{1,0}x^{-\mu}\mu^2}{x^2}+\frac{c_{1,0}x^{-\mu}\mu}{x^2}+\frac{c_{1,1}x^{-\mu-2}(-\mu-2)^2}{x^2}-\frac{c_{1,1}x^{-\mu-2}(-\mu-2)}{x^2}+\frac{c_{1,2}x^{-\mu-4}(-\mu-4)^2}{x^2}-$$

$$-\frac{c_{1,2}x^{-\mu-4}(-\mu-4)}{x^2}+\frac{4c_{2,0}x^{-2\mu}\mu^2}{x^2}+\frac{2c_{2,0}x^{-2\mu}\mu}{x^2}+\frac{c_{2,1}x^{-2\mu-2}(-2\mu-2)^2}{x^2}-$$

$$-\frac{c_{2,1}x^{-2\mu-2}(-2\mu-2)}{x^2}+\frac{c_{2,2}x^{-2\mu-4}(-2\mu-4)^2}{x^2}-\frac{c_{2,2}x^{-2\mu-4}(-2\mu-4)}{x^2}+\frac{9c_{3,0}x^{-3\mu}\mu^2}{x^2}+$$

$$+\frac{3c_{3,0}x^{-3\mu}\mu}{x^2}+\frac{c_{3,1}x^{-3\mu-2}(-3\mu-2)^2}{x^2}-\frac{c_{3,1}x^{-3\mu-2}(-3\mu-2)}{x^2}+\frac{c_{3,2}x^{-3\mu-4}(-3\mu-4)^2}{x^2}-$$

$$-\frac{c_{3,2}x^{-3\mu-4}(-3\mu-4)}{x^2}+\frac{16c_{4,0}x^{-4\mu}\mu^2}{x^2}+\frac{4c_{4,0}x^{-4\mu}\mu}{x^2}+\frac{c_{4,1}x^{-4\mu-2}(-4\mu-2)^2}{x^2}-$$

$$-\frac{c_{4,1}x^{-4\mu-2}(-4\mu-2)}{x^2}.$$

Введем повторно ряд:

$$> f := c_{1,0}\cdot x^{-\mu}+c_{1,1}\cdot x^{-\mu-2}+c_{1,2}\cdot x^{-\mu-4}+c_{2,0}\cdot x^{-2\cdot\mu}+c_{2,1}\cdot x^{-2\cdot\mu-2}$$

$$+c_{2,2}\cdot x^{-2\cdot\mu-4}+c_{3,0}\cdot x^{-3\cdot\mu}+c_{3,1}\cdot x^{-3\cdot\mu-2}+c_{3,2}\cdot x^{-3\cdot\mu-4}+c_{4,0}\cdot x^{-4\cdot\mu}+c_{4,1}\cdot x^{-4\cdot\mu-2};$$

$$c_{1,0}x^{-\mu}+c_{1,1}x^{-\mu-2}+c_{1,2}x^{-\mu-4}+c_{2,0}x^{-2\mu}+c_{2,1}x^{-2\mu-2}+c_{2,2}x^{-2\mu-4}+c_{3,0}x^{-3\mu}$$

$$+c_{3,1}x^{-3\mu-2}+c_{3,2}x^{-3\mu-4}+c_{4,0}x^{-4\mu}+c_{4,1}x^{-4\mu-2}.$$

Далее возводим набранный ряд в квадрат:

$$> expand\left(\left(f\right)^2\right);$$

$$\frac{c_{1,0}^2}{\left(x^\mu\right)^2}+\frac{2c_{1,0}c_{1,1}}{\left(x^\mu\right)^2x^2}+\frac{2c_{1,0}c_{1,2}}{\left(x^\mu\right)^2x^4}+\frac{c_{1,1}^2}{\left(x^\mu\right)^2x^4}+\ldots+\frac{2c_{1,0}c_{2,0}}{\left(x^\mu\right)^3}+\frac{2c_{1,0}c_{2,1}}{\left(x^\mu\right)^3x^2}+\frac{2c_{1,1}c_{2,0}}{\left(x^\mu\right)^3x^2}+\frac{2c_{1,0}c_{2,2}}{\left(x^\mu\right)^3x^4}+$$

$$+\frac{2c_{1,2}c_{2,0}}{\left(x^\mu\right)^3x^4}+\frac{2c_{1,1}c_{2,1}}{\left(x^\mu\right)^3x^4}+\ldots+\frac{2c_{1,0}c_{3,0}}{\left(x^\mu\right)^4}+\frac{c_{2,0}^2}{\left(x^\mu\right)^4}+\frac{2c_{1,1}c_{3,0}}{\left(x^\mu\right)^4x^2}+\frac{2c_{2,0}c_{2,1}}{\left(x^\mu\right)^4x^2}+\ldots$$

Возводим ряд в куб:

$$> expand\left(\left(f\right)^3\right);$$

$$\frac{c_{1,0}^3}{\left(x^\mu\right)^3}+\frac{3c_{1,0}^2c_{1,1}}{\left(x^\mu\right)^3x^2}+\frac{3c_{1,0}^2c_{1,2}}{\left(x^\mu\right)^3x^4}+\frac{3c_{1,0}c_{1,1}^2}{\left(x^\mu\right)^3x^4}+\ldots+\frac{3c_{1,0}^2c_{2,0}}{\left(x^\mu\right)^4}+\frac{3c_{1,0}^2c_{2,1}}{\left(x^\mu\right)^4x^2}+\frac{6c_{1,0}c_{1,1}c_{2,0}}{\left(x^\mu\right)^4x^2}+\ldots$$

Возводим ряд в четвертую степень:

$$> expand\left(\left(f\right)^4\right);$$

$$\frac{c_{1,0}^4}{(x^\mu)^4}+\frac{4c_{1,0}^3c_{1,1}}{(x^\mu)^4x^2}+\frac{6c_{1,0}^2c_{1,1}^2}{(x^\mu)^4x^4}+\ldots$$

Набираем уравнение:

$$> eq := g \to d2u(x) - x\cdot du(x) - \mu\cdot\left(f + F_2\cdot f^2 + F_3\cdot f^3 + F_4\cdot f^4\right);$$

$$g \to d2u(x) - xdu(x) - \mu\left(f + F_2 f^2 + F_3 f^3 + F_4 f^4\right).$$

Подставляем все найденные выражения в уравнение:

$$> expand\left(eq(g)\right);$$

$$\frac{c_{1,0}\mu}{x^\mu x^2}+\frac{c_{1,0}\mu^2}{x^\mu x^2}+\frac{2c_{1,1}}{x^\mu x^2}+\frac{6c_{1,1}}{x^\mu x^4}+\frac{5\mu c_{1,1}}{x^\mu x^4}+\frac{\mu^2 c_{1,1}}{x^\mu x^4}+\frac{4c_{1,2}}{x^\mu x^4}+\ldots+\frac{c_{2,0}\mu}{\left(x^\mu\right)^2}-\frac{\mu F_2 c_{1,0}^2}{\left(x^\mu\right)^2}+\frac{2c_{2,1}}{\left(x^\mu\right)^2x^2}+$$

$$+\frac{\mu c_{2,1}}{\left(x^\mu\right)^2x^2}+\frac{2\mu c_{2,0}}{\left(x^\mu\right)^2x^2}++\frac{4c_{2,0}\mu^2}{\left(x^\mu\right)^2x^2}-\frac{2\mu F_2 c_{1,0}c_{1,1}}{\left(x^\mu\right)^2x^2}-\frac{2\mu F_2 c_{1,0}c_{1,2}}{\left(x^\mu\right)^2x^4}+\frac{4c_{2,2}}{\left(x^\mu\right)^2x^4}+\frac{6c_{2,1}}{\left(x^\mu\right)^2x^4}+$$

$$+\frac{10\mu c_{2,1}}{\left(x^\mu\right)^2x^4}+\frac{\mu c_{2,2}}{\left(x^\mu\right)^2x^4}+\frac{4c_{2,1}\mu^2}{\left(x^\mu\right)^2x^4}-\frac{\mu F_2 c_{1,1}^2}{\left(x^\mu\right)^2x^4}+\ldots+\frac{2c_{3,0}\mu}{\left(x^\mu\right)^3}-\frac{\mu F_3 c_{1,0}^3}{\left(x^\mu\right)^3}-\frac{2\mu F_2 c_{1,0}c_{2,0}}{\left(x^\mu\right)^3}-$$

$$-\frac{2\mu F_2 c_{1,0}c_{2,1}}{\left(x^\mu\right)^3x^2}+\frac{9c_{3,0}\mu^2}{\left(x^\mu\right)^3x^2}+\frac{3\mu c_{3,0}}{\left(x^\mu\right)^3x^2}+\frac{2\mu c_{3,1}}{\left(x^\mu\right)^3x^2}-\frac{2\mu F_2 c_{1,1}c_{2,0}}{\left(x^\mu\right)^3x^2}+\frac{2c_{3,1}}{\left(x^\mu\right)^3x^2}-\frac{2\mu F_2 c_{1,1}c_{2,1}}{\left(x^\mu\right)^3x^4}-$$

$$-\frac{2\mu F_2 c_{1,0}c_{2,2}}{\left(x^\mu\right)^3x^4}+\frac{9c_{3,1}\mu^2}{\left(x^\mu\right)^3x^4}+\frac{15\mu c_{3,1}}{\left(x^\mu\right)^3x^4}+\frac{2\mu c_{3,2}}{\left(x^\mu\right)^3x^4}+\frac{4c_{3,2}}{\left(x^\mu\right)^3x^4}+\frac{6c_{3,1}}{\left(x^\mu\right)^3x^4}-\frac{3\mu F_3 c_{1,0}c_{1,1}^2}{\left(x^\mu\right)^3x^4}-$$

$$-\frac{2\mu F_2 c_{1,2}c_{2,0}}{\left(x^\mu\right)^3x^4}+\ldots+\frac{3\mu c_{4,0}}{\left(x^\mu\right)^4}-\frac{2\mu F_2 c_{1,0}c_{3,0}}{\left(x^\mu\right)^4}-\frac{3\mu F_3 c_{1,0}^2c_{2,0}}{\left(x^\mu\right)^4}-\frac{\mu F_2 c_{2,0}^2}{\left(x^\mu\right)^4}-\frac{\mu F_4 c_{1,0}^4}{\left(x^\mu\right)^4}+\ldots$$

Из конечного выражения приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x и получаем равенства для определения коэффициентов $c_{j,i}$:

$$> c_{1,1} := coeff\left(eq(g),\left(x^{-\mu}\cdot x^{-2}\right)\right);$$

$$c_{1,1}=\frac{1}{2}\left(-\mu^2 c_{1,0}-\mu c_{1,0}\right)$$

$$> c_{1,2} := coeff\left(eq(g),\left(x^{-\mu}\cdot x^{-4}\right)\right);$$

$$c_{1,2}=\frac{1}{4}\left(-\mu^2 c_{1,1}-5\mu c_{1,1}-6c_{1,1}\right)$$

$$> c_{2,0} := coeff\left(eq(g),\left(x^{-2\cdot\mu}\right)\right);$$

$$c_{2,0} = F_2 c_{1,0}^2$$

$$> c_{2,1} := coeff\left(eq(g),\left(x^{-2\cdot\mu}\cdot x^{-2}\right)\right);$$

$$c_{2,1} = \frac{1}{\mu+2}\left(2\mu F_2 c_{1,0} c_{1,1} - 2\mu c_{2,0} - 4\mu^2 c_{2,0}\right)$$

$$> c_{2,2} := coeff\left(eq(g),\left(x^{-2\cdot\mu}\cdot x^{-4}\right)\right);$$

$$c_{2,2} = \frac{1}{\mu+4}\left(2\mu F_2 c_{1,1} c_{1,2} + \mu F_2 c_{1,1}^2 - 4\mu^2 c_{2,1} - 10\mu c_{2,1} - 6c_{2,1}\right)$$

$$> c_{3,0} := coeff\left(eq(g),\left(x^{-3\cdot\mu}\right)\right);$$

$$c_{3,0} = \frac{1}{2}\left(F_3 c_{1,0}^3 + 2F_2 c_{1,0} c_{2,0}\right)$$

$$> c_{3,1} := coeff\left(eq(g),\left(x^{-3\cdot\mu}\cdot x^{-2}\right)\right);$$

$$c_{3,1} = \frac{1}{2\mu+2}\left(3\mu F_3 c_{1,0} c_{1,1} + 2\mu F_2 c_{1,0} c_{2,1} + 2\mu F_2 c_{1,1} c_{2,0} - 9\mu^2 c_{2,0} - 3\mu c_{2,0}\right)$$

$$> c_{3,2} := coeff\left(eq(g),\left(x^{-3\cdot\mu}\cdot x^{-4}\right)\right);$$

$$c_{3,2} = \frac{1}{2\mu+4}\left(3\mu F_3 c_{1,0}^2 c_{1,2} + 3\mu F_3 c_{1,0} c_{1,1}^2 + 2\mu F_2 c_{1,1} c_{2,1} + 2\mu F_2 c_{1,0} c_{2,2} - 9\mu^2 c_{3,1} - 15\mu c_{3,1} - 6c_{3,1}\right)$$

$$> c_{4,0} := coeff\left(eq(g),\left(x^{-4\cdot\mu}\right)\right);$$

$$c_{4,0} = \frac{1}{3}\left(F_4 c_{1,0}^4 + 3F_3 c_{1,0}^2 c_{2,0} + 2F_2 c_{1,0} c_{3,0} + F_2 c_{2,0}^2\right)$$

$$> c_{4,1} := coeff\left(eq(g),\left(x^{-4\cdot\mu}\cdot x^{-2}\right)\right);$$

$$c_{4,1} = \frac{1}{3\mu+2}\left(6\mu F_3 c_{1,0} c_{1,1} c_{3,0} + 4\mu F_4 c_{1,0}^3 c_{1,1} + 3\mu F_3 c_{1,0}^2 c_{2,1} + 2\mu F_2 c_{2,0} c_{2,1} + \right.$$
$$\left. + 2\mu F_2 c_{1,0} c_{3,1} + 2\mu F_2 c_{1,1} c_{3,0} - 16\mu^2 c_{4,0} - 4\mu c_{4,0}\right)$$

… … … … … … … … … …

Функция $v_0(x)$ ищется в виде суммы

$$v_0(x) = v_N(x) + w(x), \tag{11}$$

где

$$v_N(x) = \sum_{j=1, i=0}^{N} c_{j,i} x^{-\mu j - 2i} \tag{12}$$

для $x \geq 2,\ v_N(x) \in C(x \geq 0),\ \ \max\{\mu j + 2i\} = N,\ N \leq k.$

Подставляя сумму (11) в уравнение (8), мы получаем задачу

$$Lw - \mu\left(F(w + v_N) - F(v_N)\right) = h_N(x), \tag{13}$$

$$w(x) \to 0,\ w'(x) \to 0,\ x \to \infty, \tag{14}$$

где

$$\left|h_N(x)\right| \leq Mx^{-N}. \tag{15}$$

Дальнейшее доказательство состоит в следующем. Аналогично работе [11] в левой части уравнения (13) выделяем линейную часть, а нелинейную часть переносим вправо.

$$w''(x) - xw'(x) - \mu F'\left(\hat{v}_N(x)\right)w(x) = \mu R\left(\hat{v}_N(x), w(x)\right) + h_N(x), \tag{16}$$

где

$$R\left(\hat{v}_N, w, x\right) = F\left(w(x) + \hat{v}_N(x)\right) - F\left(\hat{v}_N(x)\right) - \mu F'\left(\hat{v}_N(x)\right)w(x),$$

$$R\left(\hat{v}_N(x), w(x)\right) = O\left(F''\left(\hat{v}_N(x)\right)w^2(x)\right). \tag{17}$$

Для доказательства существования решения уравнения (16) исследуется однородное уравнение, затем задача сводится к решению интегрального уравнения.

Область задней критической точки

Решение задачи в пограничном слое задней критической точки строится в переменных $x = \varepsilon^{-1}(\lambda+1)^{-\frac{1}{2}}(r-1),\ \ \xi = \varepsilon^{-1}(\lambda+1)^{-\frac{1}{2}}\theta.$ Главный член асимптотики строится как решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,\xi)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u(x,\xi)}{\partial x^2} - t\frac{\partial u(x,\xi)}{\partial x} + \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{\xi}\right)\frac{\partial u(x,\xi)}{\partial \xi} - \mu(\lambda+1)F\left(u(x,\xi)\right) = 0, \tag{18}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0,\xi) = 0;\ \ \frac{\partial u(x,\xi)}{\partial \xi} = 0\ \text{ при } \xi = 0 \tag{19}$$

и условию согласования

$$u(x, \xi) - u_1(x) \to 0 \text{ при } \xi \to \infty. \tag{20}$$

Функция $u_1(x)$, построенная в теореме 1, удовлетворяет всем требуемым условиям (18)–(20).

Численное моделирование

Переходим к решению краевой задачи (8), (9). Здесь следует учесть, что в полученных разложениях (10) есть произвольная константа $c_{1,0}$. Для того чтобы удовлетворить первому из ограниченных условий (9), то есть $v(0) = 1$, применяем теорему о непрерывной зависимости решения от параметров. Уравнение (8) перепишем в виде системы

$$\begin{cases} v'(x) = z(x) \\ z'(x) = xz(x) + \mu F(v(x)) \end{cases}. \quad (21)$$

Из условий устойчивости явных схем [12] следует, что следует интегрировать назад (т.е. с шагом $h < 0$). Начальные условия для системы (21) имеют вид

$$v(X_0) = v_0,\ z(X_0) = z_0, \quad (22)$$

где постоянные v_0, z_0 определяются из выражения (10) и ее производной

$$v_0 = c_{1,0}x^{-\mu} + c_{1,1}x^{-\mu-2} + c_{1,2}x^{-\mu-4} + c_{2,0}x^{-2\mu} + c_{2,1}x^{-2\mu-2} + c_{2,2}x^{-2\mu-4} + \ldots,$$

$$z_0 = -\mu c_{1,0}x^{-\mu-1} + (-\mu-2)c_{1,1}x^{-\mu-3} + (-\mu-4)c_{1,2}x^{-\mu-5} + (-2\mu)c_{2,0}x^{-2\mu-1} +$$

$$+(-2\mu-2)c_{2,1}x^{-2\mu-3} + (-2\mu-4)c_{2,2}x^{-2\mu-5} + \ldots$$

В качестве промежутка для $c_{1,0}$ зададим (a, b), где, например, $a = 0{,}01$, $b = 20$. Далее используем цикл с предусловием. Условие для цикла задаем: $|y_0 - 1| > \varepsilon$, где $y_0 = v_0(0)$. После указываем значение $x = 150$ и переходим к коэффициентам, которые задаются из формулы (10), а коэффициент $c_{1,0}$ находим методом половинного деления, т.е. $c_{1,0} = \frac{a+b}{2}$ и далее уточняем приближения.

Рассмотрим случай, когда $F(u) = u \cdot \cos(u)$. Методом Рунге – Кутты получены следующие результаты:

$\mu = 0{,}5$, y = 1,0000; z = -0,3427; c = 0,9540;

$\mu = 1$, y = 1,0000; z = -0,6272; c = 0,9345;

$\mu = 3$, y = 1,0000; z = -1,3495; c = 1,7560;

$\mu = 4{,}5$, y = 0,9999; z = -1,7173; c = 4,6988;

$\mu = 5{,}5$, y = 1,0000; z = -1,9253; c = 10,4955;

$\mu = 6$, y = 1,0001; z = -2,0216; c = 16,2519.

Заключение

В работе показано, что в окрестности задней критической точки решение задачи существенно носит слабо нелинейный характер. Данный результат получен методом согласования асимптотики решения с асимптотикой решения в диффузионном пограничном слое.

Список литературы

1. Животягин А.Ф. Влияние гомогенной химической реакции на распределение концентрации в диффузном следе капли // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика и механика. 1980. № 6. С. 73–78.

2. Favelukis M., Lavrenteva O.M., Nir A. On the evolution and breakup of slender drops in an extensional flow. Phys. Fluids. 2012. Vol. 24. P. 043101.

3. Favelukis M. On the diffusion around a slender drop in a simple shear flow, Can. J. Chem. Eng. 2017. Vol. 95. P. 1626–1630.

4. Favelukis M. Mass transfer around slender drops in an extensional flow: inertial effects at large Peclet numbers. Can. J. Chem. Eng. 2015. Vol. 93. P. 2274–2285.

5. Favelukis M. Mass transfer around a slender drop in a nonlinear extensional flow, Nonlinear Eng. 2019. Vol. 8. P. 117–126.

6. Favelukis M., Lavrenteva O.M. Mass transfer around oblate spheroidal drops in biaxial stretching motion. The Canadian Journal. 2013. Vol. 92. No. 5. P. 964–972.

7. Zhao J.F., Zhang L., Li Z.D., Qin W.T. Topological structure evolvement of flow and temperature fields in deformable drop Marangoni migration in microgravitv. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2011. Vol. 54. No. 21. P. 4655–4663. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.06.012.

8. Zhang Sh., Duan L., Kang Q. Experimental research on thermocapillary migration of drops by using digital holographic interferometry. Exp. Fluids. 2016. Vol. 57. No. 7. P. 113.

9. Полянин А.Д. Точные решения в неявном виде нелинейных уравнений конвективного массо- и теплопереноса с переменными коэффициентами // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2019. Т. 8. № 5. С. 415–427.

10. Полянин А.Д. Редукции и новые точные решения уравнений конвективного тепло- и массопереноса с нелинейным источником // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2018. Т. 7. № 6. С. 458–469.

11. Akhmetov R.G. Asymptotics of Solution for a Problem of Convective Diffusion with Volume Reaction Near a Spherical Drop. Proceedings of the Steclov Institute of Mathematics, Suppl. 1. 2003. P. S8–S12.

12. Ахметов Р.Г., Милюкова А.В. Асимптотические решения задачи конвективной диффузии внутри капли, обтекаемой потоком жидкости // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 9. С. 29–34.