УДК 372.851

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ – КЛЮЧ К ФОРМИРОВАНИЮ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ КОМПЕТЕНЦИЙ

Морозов А.В.

ФГБОУ ВПО «Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского», Санкт-Петербург, e-mail: vka@mil.ru

Известно, что наиболее сложные задачи школьного курса математики содержат параметры. Дальнейшее изучение таких задач проводится уже в высшей школе, в частности в курсах аналитической геометрии, алгебры, дифференциальных уравнений, а с общих позиций и современных приложений они излагаются в курсах нелинейной динамики и теории бифуркаций, преподаваемых на физико-математических факультетах университетов. Что касается политехнических вузов, то эти вопросы освещаются, с нашей точки зрения, недостаточно. Напомним, что параметр – это числовая величина, входящая в математическую модель $\mathbb{S}$, значение которой изначально не задается, но определяется некоторым промежутком ее возможного изменения. Часто смысл ее введения в модель заключается в том, что мы не все физические величины знаем точно, таким образом, любая модель таит некоторую ошибку. Возможность такой ошибки и закладывается в термине «параметр». В статье проводится анализ сущности понятия «параметр»; рассматриваются различные аспекты его использования; подчеркивается, что параметр порождает семейство математических моделей, свойства которых часто существенно зависят от выбора его значения; приводятся примеры использования параметра при исследовании интегралов и дифференциальных уравнений; утверждается, что основой инженерного математического образования должна служить система тщательно подобранных задач, включающих параметры. При этом формирование такой математической культуры у учащихся должно быть перманентным, начинаться с первого курса. Целью статьи является разработка концепции использования в учебном процессе вузов системы задач с параметрами. Педагогический опыт применения такого подхода обучения показывает, что эти задачи развивают гибкость и вариативность мышления учащихся, способствуют формированию креативного, нестандартного мышления.

Ключевые слова: задачи с параметрами в вузе, формирование исследовательских компетенций

ASKS WITH PARAMETERS-THE KEY TO THE FORMATION RESEARCH COMPETENCIES

Morozov A.V.

Military Space Academy named after A. F. Mozhaisky, Saint Petersburg, e-mail: vka@mil.ru

It is known that the most difficult problems of the school mathematics course contain parameters. Further study of such problems is carried out already in higher school, in particular, in the courses of analytical geometry, algebra, differential equations, and from a general point of view and modern applications, they are presented in the courses of nonlinear dynamics and bifurcation theory taught at the physics and mathematics departments of universities. As for polytechnic universities, these issues are not sufficiently covered from our point of view. Recall that a parameter is a numerical value included in the mathematical model S, the value of which is not initially set, but is determined by a certain interval of its possible change. Often the meaning of its introduction into the model is that we do not know all the physical quantities exactly, so any model is fraught with some error. The possibility of such an error is laid down in the term parameter. The article analyzes the essence of the concept of parameter, considers various aspects of its use, emphasizes that the parameter generates a family of mathematical models, the properties of which often significantly depend on the choice of its value, provides examples of the use of the parameter in the study of integrals and differential equations, states that the basis of engineering mathematical education should be a system of carefully selected problems, including parameters. At the same time, the formation of such a mathematical culture among students should be permanent, starting from the first year. The purpose of the article is to develop the concept of using a system of tasks with parameters in the educational process of higher education institutions. The pedagogical experience of using this approach of teaching shows that these tasks develop the flexibility and variability of students ‘ thinking, contribute to the formation of creative, non-standard thinking.

Keywords: tasks with parameters in the university, the formation of research competencies

По определению параметр есть величина, значения которой позволяют различать элементы некоторого множества между собой. Рассмотрим, например, уравнения $x = at - a\sin t$, $y = a - a\cos t$. Видно, что каждому числу t, согласно этим равенствам, можно поставить в соответствие точку на плоскости с координатами (x, y). Множество всех таких точек, как известно, образует кривую, называемую циклоидой. Согласно приведенному определению, t следует назвать параметром.

При более общей трактовке понятия «параметр» некоторому числу или числам в соответствие ставится некоторый объект. Пусть, например, $\mathbb{S}$ – математическая модель (объект), структура которой задана, но некоторые величины, входящие в нее, заранее не определены. В простейших случаях модель $\mathbb{S}$ с заданной структурой полностью определяется одним параметром λ, тогда говорят о семействе $\mathbb{S}(\lambda)$. Таким образом, при этой трактовке понятия параметра каждому значению λ ставится в соответствие объект $\mathbb{S}(\lambda)$, обладающий теми или иными свойствами, которые мы и изучаем при различных возможных изменениях λ. Объект может быть функцией (оператором, функционалом), системой уравнений или неравенств, пространственной кривой или поверхностью, совокупностью кривых на плоскости или в пространстве. Приведем простые примеры.

1. Пусть $\mathbb{S}(\lambda):\begin{cases}2x+3y=4,\\4x+\lambda y=5.\end{cases}$ Исследуйте решения системы в окрестности точки $\lambda_*=6$.

2. Пусть $\mathbb{S}(\lambda):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{(a-\lambda)^2}=1$. Изобразите всю совокупность кривых. Что с геометрической точки зрения отвечает параметру $\lambda_*=a$?

3. Изобразите эскизы поверхностей $\mathbb{S}(\lambda):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=\lambda$. Что происходит при переходе через значение $\lambda_*=0$?

4. Пусть $\mathbb{S}(\lambda):\left\{(1-\lambda)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Каким λ отвечают сходящиеся последовательности?

5. Пусть $\mathbb{S}(\lambda)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 x}},\lambda\in[0,1]$. Вычислите $\mathbb{S}(0)$, $\mathbb{S}(1)$. Докажите монотонность функции $\mathbb{S}(\lambda)$ в интервале $\lambda\in[0,1]$.

6. Дано дифференциальное уравнение $\mathbb{S}(\lambda)$: $\ddot{x}+4x=\sin\lambda t$. При каких λ решения уравнения ограничены (не ограничены)?

Целью настоящей статьи является построение методологии обучения математике в политехническом вузе, в центр которой предлагается ставить понятие семейства $\mathbb{S}(\lambda)$ математических моделей, зависящих от параметра. В целом для математики это не является новым. Новизна здесь в том, чтобы эта концепция проходила лейтмотивом через весь курс математики с акцентом на том, что наличие параметра (или параметров) в задаче вносит дополнительную особенность: требует повышенного внимания, оттачивает логику рассуждений, стимулирует интерес. Таким образом, рассмотрение таких задач способствует постепенному формированию у студентов исследовательских навыков [1–3]. Обратим внимание, что четко усвоенные алгоритмы решения задач и многочисленное их повторение на практике такой функции не решают, при этом притупляется сознание, а интерес у студентов пропадает. Задачи с параметрами можно ставить во всех разделах курса математики: алгебре, геометрии, анализе, теории вероятностей, но особенно в дифференциальных уравнениях и информатике. Последнее объясняется тем, что область исследования дифференциальных уравнений и отображений (так именуются дискретные динамические системы) с параметрами, называемая *теорией бифуркаций*, по существу, *междисциплинарная* и является краеугольным камнем современной нелинейной динамики, активно развивающейся в настоящее время [4–6]. В информатике рассмотрение таких задач дает возможность познакомить студентов с результатами, которые в науке были изучены сравнительно недавно. Здесь имеется в виду феномен детерминированного хаоса, открытого в 1970-х гг. [7, 8]. Подчеркнем, что параметр – это, с одной стороны, математический изыск, с другой – требование практики, и культуру работы с ним необходимо постепенно формировать и совершенствовать.

Разноуровневые исследовательские задачи

Прежде всего отметим, что параметры, входящие в математическую модель, выполняют разную роль. В одних задачах за ними скрываются числовые величины, изменение которых принципиально ничего не меняет в поведении модели, и это самое простое толкование параметра (в этом случае говорят о грубой модели [4]). При этом малым изменениям параметра отвечают малые изменения свойств в модели (в поведении системы). В других, принципиально иных задачах, параметр вводят в задачу специально, чтобы воспользоваться возникающими на этом пути возможностями в решении задачи [9]. В-третьих, параметр в исходной модели вовсе отсутствует, но появляется в процессе решения задачи [10–12]. В-четвертых, параметр отражает философский закон перехода количества в качество. А именно при переходе параметра через некоторое значение λ_* модель $\mathbb{S}(\lambda)$ изменяется качественно (в этом случае говорят, что модель не является грубой при λ_*). Именно такие изменения являются предметом теории бифуркаций [4, 11]. Обсудить все возможные ситуации с достаточной полнотой в одной статье нам не удастся. Остановимся на некоторых отмеченных аспектах появления и использования параметра и расставим необходимые акценты.

Обсудим для начала идею введения параметра в математическую модель с целью решения задачи. Продемонстрируем метод на примерах из интегрального исчисления. Метод элементарен, познавателен и полезен как инструментарий многочисленных учебных заданий.

Пример 1. Требуется вычислить следующий несобственный интеграл $S = \int_0^1 \ln^2 x dx$. С этой целью рассмотрим вспомогательный интеграл с параметром λ:

$$\mathbb{S}(\lambda) = \int_0^1 x^\lambda dx = \left.\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right|_0^1 = \frac{1}{\lambda+1}$$

На первый взгляд, никакой связи между двумя интегралами нет. Однако, вычисляя последовательно производные по λ под знаком интеграла (данная операция здесь корректна), получим: $\mathbb{S}'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\int_0^1 x^\lambda dx = \int_0^1 x^\lambda \ln x dx = -\frac{1}{(\lambda+1)^2}$, $\mathbb{S}''(\lambda) = \int_0^1 x^\lambda \ln^2 x dx = \frac{2}{(\lambda+1)^3}$.

Отсюда, полагая в последней формуле λ = 0, получим $S = \int_0^1 \ln^2 x dx = \mathbb{S}''(0) = 2$.

Понятно, что на основе этой идеи вычисляются не только интегралы $\int_0^1 \ln^n x dx$, но и другие.

Пример 2. Пусть требуется вычислить интеграл $S = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^4}$. Мы знаем, что $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим его обобщение, $\mathbb{S}(\lambda) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\lambda^2} = \frac{\pi}{2\lambda}$. Дифференцируя последнее равенство по λ, легко находим $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda^2)^2} = \frac{\pi}{4\lambda^3}$. Дифференцируя еще раз, получим $\int_0^\infty \frac{-4\lambda dx}{(x^2+\lambda^2)^3} = -\frac{3\pi}{4\lambda^4}$. Отсюда находим $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda^2)^3} = -\frac{3\pi}{16\lambda^5}$. Дифференцируя третий раз, окончательно получаем $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda^2)^4} = \frac{5\pi}{32\lambda^6}$. Таким образом, $S = \mathbb{S}(1) = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^4} = \frac{5\pi}{32}$.

Пример 3. Интеграл $S = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. Введем в рассмотрение параметр, обобщая наш интеграл $\mathbb{S}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{\sin x}{x} dx$. Ясно, что $\mathbb{S}(0) = S$. Продифференцируем $\mathbb{S}(\lambda)$ по параметру $\mathbb{S}'(\lambda) = -\int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin x dx$. Вычисляя последний интеграл по частям два раза, приходим к уравнению $\mathbb{S}'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2+1}$. Отсюда, интегрируя, получим $\mathbb{S}(\lambda) = -\mathrm{arctg}\lambda + C$. Для определения константы C перейдем в последнем равенстве к пределу при $\lambda \to +\infty$ и, учитывая, что $\mathbb{S}(+\infty) = 0$, получим $C = \frac{\pi}{2}$. Тогда $\mathbb{S}(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\lambda$. А тогда $S = \mathbb{S}(0) = \frac{\pi}{2}$.

Замечание. Идея искусственного введения параметра в модель с целью решения задачи используется в математике давно. Посмотрим на историческом примере [4], как в свое время она позволила разобраться с интегрированием уравнения $\ddot{x} + 2a\dot{x} + a^2 x = 0$ (символы $\dot{x}$, $\ddot{x}$ обозначают 1-ю и 2-ю производные по t). Видно, что его характеристическое уравнение $k^2 + 2ak + a^2 = 0$ имеет кратные корни $k_1 = k_2 = -a$ и функция $x_1(t) = e^{-at}$ – решение. Согласно теории, есть второе решение – линейно независимое с первым. Как же его нашли? Предположим, что корни характеристического уравнения были бы разные. Например, $k_1 = -a$ и $k_2 = -(a-\lambda)$. Здесь λ – малое число. Таким способом в задачу мы ввели параметр. Тогда вторым решением будет функция $x_2(t) = e^{-(a-\lambda)t}$. Но мы знаем из свойств решений линейных уравнений, что решением будет и комбинация $x(t) = \frac{1}{\lambda}\left(e^{-(a-\lambda)t} - e^{-at}\right) = te^{-at}\frac{e^{\lambda t}-1}{\lambda t}$.

Переходя в этой последней формуле к пределу при $\lambda \longrightarrow 0$, получим $x_2(t) = te^{-at}$. Таким образом, была найдена фундаментальная система решений $x_1(t) = e^{-at}, x_2(t) = te^{-at}$ дифференциального уравнения с кратными корнями.

Большие возможности для постановки учебно-исследовательских задач дает теория дифференциальных уравнений с параметрами. Начнем с задачи классификации типов положений равновесия линейных систем второго порядка. Постановка вопроса здесь предельно проста. Требуется дать классификацию положений равновесия в системе с параметром. Например, для системы $\mathbb{S}(\lambda): \begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = x + \lambda y \end{cases}$ провести разбиение прямой λ на промежутки с одинаковым поведением траекторий и изобразить все фазовые картины. Эта задача редуцируется к школьной – анализу квадратного уравнения с параметром λ [12] – и приведена в статье [13]. Ее можно отнести ко 2-му уровню сложности.

К задаче 3-го уровня сложности можно отнести следующую. Дано дифференциальное уравнение второго порядка $\ddot{x} - x + x^3 = 0$ и требуется найти решения, обладающие свойством $x(t) \to 0$ $(t \to \pm\infty)$. На первом шаге легко находится первый интеграл уравнения $\mathbb{S}(\lambda): \dot{x}^2 - x^2 + \frac{x^4}{2} = \lambda$. Заметим, что $\mathbb{S}(\lambda)$ есть семейство дифференциальных уравнений 1-го порядка. Затем на плоскости $(x, y), y = \dot{x}$ строится семейство кривых $\mathbb{S}(\lambda)$. Далее необходимо сообразить, что искомое решение определяется значением параметра $\lambda = 0$, ибо уравнение $y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2} = 0$ $(\dot{x} = y)$ задает инвариантное множество, проходящее через начало координат. Интегрируя последнее уравнение с начальными условиями $x(0) = \pm\sqrt{2}$, находим два искомых решения $x(\mathrm{t}) = \pm\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{cht}}$. Обратим внимание, что параметр λ возник здесь естественным образом по ходу решения задачи. Другие подобные задачи приведены в статье [6].

Широкие возможности для постановки учебно-исследовательских задач предоставляет *теория бифуркаций* [4, 5, 13] – бурно развивающаяся сегодня отрасль нелинейной науки, имеющая многочисленные приложения в технике. Приведем несколько типовых задач такого плана, рассмотрение которых, с нашей точки зрения, является целесообразным.

Задача 1 сводится к бифуркационному анализу системы $\mathbb{S}(\lambda): \begin{cases} \dot{x} = x^2 - \lambda, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$

Требуется исследовать ее по параметру как на плоскости *x*, *y*, так и в пространстве *x*, *y*, *t*. Заметим, что каждому значению параметра λ отвечает своя фазовая картина, т.е. множество «всех» траекторий на плоскости, отвечающих решениям $x(t)$, $y(t)$ системы. Причем при переходе через значение $\lambda_* = 0$ фазовая картина качественно меняется, т.е. происходит бифуркация. Эта перестройка фазового портрета обсуждалась нами в статье [11]. При $\lambda > 0$ система имеет два состояния равновесия. Они являются устойчивым узлом и седлом. При $\lambda_* = 0$ состояния равновесия сливаются в одно – полуустойчивое. При $\lambda < 0$ состояния равновесия исчезают. Такая бифуркация называется бифуркацией седла–узла. Эта задача может быть отнесена к первому уровню сложности, ибо уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\lambda - x^2}$ легко интегрируется, и вся сложность ложится на анализ функции $y(x, \lambda)$, зависящей от параметра.

Задача 2 знакомит с бифуркацией рождения предельного цикла из положения равновесия. Задача важна для многих технических специальностей (радиотехники, электроники, теории колебаний, теории регулирования). Модель имеет вид:

$$\mathbb{S}(\lambda): \begin{cases} \dot{x} = \lambda x - y - x\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \dot{y} = x + \lambda y - y\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Учитывая специфику нелинейных членов $x\sqrt{x^2 + y^2}$ и $y\sqrt{x^2 + y^2}$, в этой системе целесообразно перейти к полярной системе координат, в которой система примет вид:

$$\mathbb{S}(\lambda): \begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\lambda - \rho), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases}$$

Решениями последней являются функции $\varphi = t, \rho = \rho(t)$. Видно, что при $\lambda < 0$ функция $F(\rho) \equiv \rho(\lambda - \rho) < 0 \, \forall \rho > 0$. Стало быть, $\frac{d\rho}{dt} < 0$ и $\rho(t)$, монотонно убывая, стремится при $t \longrightarrow +\infty$ к единственному состоянию равновесия. При $\lambda = 0$ картина принципиально не изменяется (рекомендуется проинтегрировать соответствующие уравнения и разобраться с тонкостями стремления $\rho(t)$ к нулю). При $\lambda > 0$ в системе возникает еще одно стационарное решение $\rho = \lambda$, которому на плоскости отвечает замкнутая траектория – окружность радиуса $r = \lambda$. При этом другие траектории стремятся к ней, навиваясь снаружи и изнутри (рис. 1). Это следует из анализа знака производной $F'(\lambda)$.

Задача 3 описывает бифуркацию рождения двух циклов – устойчивого и неустойчивого [14] из полуустойчивого $\mathbb{S}(\lambda)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = \rho\left(\lambda^2 - (\rho - a)^2\right), \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = 1. \end{cases} \quad (a - \text{число}).$$

Запишите эту систему в декартовой системе координат. Проверьте, что $x = (a \pm \lambda)\cos t$, $y = (a \pm \lambda)\sin t$ – ее периодические решения, которым отвечают циклы. Проверьте, что при $\lambda < 0$ все траектории при $t \to +\infty$ спиралевидно наматываются на состояние равновесия $\rho = 0$. При $\lambda = 0$ возникает полуустойчивый цикл $\rho = a$: с одной стороны, траектории наматываются на цикл, с другой – сматываются с него (при $t \to +\infty$). При $\lambda > 0$ полуустойчивый цикл расщепляется на два: один устойчивый, т.е. притягивающий к себе траектории, другой (внутренний) – отталкивающий от себя траектории. Решение требуется дополнить фазовыми картинами, прибегнув к численному моделированию системы на ПК [15, 16] (рис. 2).

В задаче 4 требуется установить все бифуркации, среди которых новой является бифуркация рождения цикла из петли сепаратрисы седлового положения равновесия

$$\mathbb{S}(\lambda): \begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2, \\ \dot{y} = x + y + \lambda. \end{cases}$$

Здесь требуется провести подробные аналитические вычисления, установить все бифуркационные значения параметра и провести компьютерные эксперименты для визуализации фазовых картин. Краткий анализ этой модели дан в статье [13].

Замечание. В приведенных выше задачах мы ограничились случаем одного параметра. Если в модели параметров больше, то их исследование существенно усложняется [4].

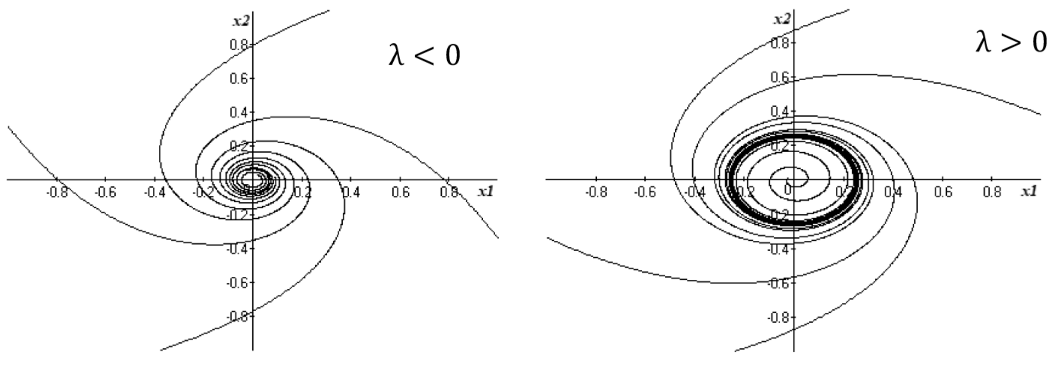

Рис. 1. Бифуркация рождения цикла

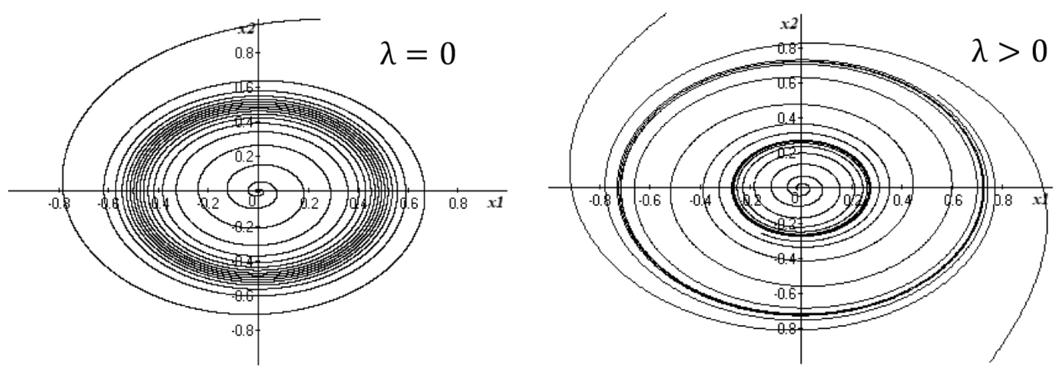

Рис. 2. Из сгущения траекторий (слева) рождаются два цикла (справа)

В курсе информатики к задачам высокого уровня сложности отнесем задачу численного исследования дискретного уравнения [7] $\mathbb{S}(\lambda): x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$. Несмотря на внешнюю простоту, эта математическая модель таит массу интересных эффектов. Феномен этой модели хорошо известен ученым (каскад бифуркаций удвоения периода, переход к хаосу). Однако численный анализ этой модели сегодня вполне посилен современному любознательному студенту. Таких дискретных моделей в современной математике и ее приложениях известно много. С ними можно ознакомиться по книгам [7, 8].

Вскользь коснемся понятия параметра, используемого в теории вероятностей. Хорошо известно, что закон распределения случайной величины ξ (как дискретной, так и непрерывной) задается функцией (распределения), включающей в себя постоянные величины – параметры, которые конкретизируются по ходу решения задачи. Так, например, для случайной величины, *равномерно распределенной* в замкнутом промежутке $[a, b]$, числа a и b – суть параметры распределения; *геометрическое распределение* характеризуется одним числом p – вероятностью успеха в серии одинаковых испытаний $\mathbb{S}(p)$: $p_m = (1-p)^{m-1} p, m = 1,2,3,\ldots$; *биномиальное распределение* характеризуется уже двумя параметрами: числом независимых испытаний n и вероятностью успеха p: $\mathbb{S}(n, p): p_m = C_n^m (1-p)^{n-m} p^m, m = 0,1,\ldots,n$; *закон Пуассона* $\mathbb{S}(a)$ – одним – средним значением $a: p_m = \dfrac{a^m}{m!} e^{-a}, m = 0,1,2,\ldots$; *показательное распределение* – также одним $\mathbb{S}(\lambda): f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\ x > 0$; *нормальный закон* – двумя σ и m – среднеквадратическим отклонением и математическим ожиданием $\mathbb{S}(m, \sigma): f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. Мы считаем, вполне посильной, но сложной задачей доказательство предельной теоремы Пуассона: $C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \to \dfrac{a^m}{m!} e^{-a}$ (где $p \ll 1$, $n \gg 1$, $np = a$). Отметим, что распределение с двумя параметрами переходит в распределение с одним параметром [17].

Заключение

Древнейшая из наук математика за многовековую историю своего существования превратилась поистине в необъятную область человеческого знания, представимую сегодня конгломератом математических наук. Она востребована как никогда ранее, а возникающие прикладные задачи постоянно стимулируют ее развитие. Большие возможности открываются у математики в союзе с компьютерными методами и технологиями. Возросла роль дискретной математики. Вместе с тем преподавание общих курсов математики в технических вузах в сравнении с преподаванием других наук достаточно консервативно. Это объясняется фундаментальностью ее открытий, практической значимостью результатов ее применения и, к сожалению, временными рамками преподавания. Менять содержание и объемы излагаемого материала – дело опасное и ответственное, и это все хорошо понимают. Однако методик изложения математики во втузах существует множество в силу индивидуальных психологических различий и умственных способностей учащихся.

В настоящей статье мы обратились к анализу понятия «параметр», его сущности, предназначению и коснулись некоторых аспектов его применения. Заметим, что уровень профессионализма современного инженера в значительной степени определяется его умением оценивать влияние той или иной величины, присутствующей в математической модели, на ход протекания процесса или явления, т.е. работой с параметром (параметрами). В связи с этим особое положение здесь занимают математические модели, демонстрирующие ветвление (бифуркационные явления). С нашей точки зрения, элементы теории бифуркаций должны быть шире представлены в курсах математики втузов, подкреплены прикладными задачами из механики, физики, химии, экологии, экономики и иных, а понятию «параметр» в целом должно быть уделено большее внимание. Наша педагогическая практика многократно подтверждала, что математическое инженерное образование должно опираться на систему задач, среди которых важнейшее место следует отвести задачам с параметрами. Такие задачи наилучшим образом мотивируют студентов к обучению, формируют в них гибкость и креативность мышления. В силу сказанного мы и решили обратиться к этой теме.

Список литературы

1. Тестов В.А., Перминов Е.А. Роль математики в трансдисциплинарности содержания современного образования // Образование и наука. 2021. Т. 23. № 3. С. 11–34.

2. Кирин Н.А. Развитие интереса к математическим дисциплинам посредством создания проблемной ситуации при рассмотрении вырожденных случаев // Педагогическое образование и наука. 2019. № 2. С. 78–83.

3. Булекбаев Д.А., Морозов А.В. Формирование и развитие навыков вычислительного эксперимента у обучающихся на примере исследования динамической системы //

Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2017. № 659. С. 202–209.

4. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МЦНМО, 2012. 304 с.

5. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. М.: ЛИБРОКОМ, 2012. 312 с.

6. Морозов А.В. Нахождение частных решений солитонного типа дифференциальных уравнений второго порядка. Методика обучения // Современные наукоемкие технологии. 2021. № 2. С. 73–78.

7. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. 238 с.

8. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.

9. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990. 624 с.

10. Треногин В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009. 312 с.

11. Морозов А.В. Качественная теория дифференциальных уравнений – основная составляющая теории динамических систем // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2014. Вып. 642. С. 177–184.

12. Далингер В.А. Математика: задачи с параметрами. В двух частях. Ч. 1. М.: Райт. 2020. 466 с.

13. Морозов А.В. О компьютерном моделировании колебательных систем с одной степенью свободы на фазовой плоскости // Современные наукоемкие технологии. 2019. № 8. С. 147–152.

14. Булекбаев Д.А., Морозов А.В. О предельных циклах в модели автогенератора // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 9. С. 35–40.

15. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения и система Maple. М.: Солон-пресс, 2016. 392 с.

16. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad 15. СПб.: Питер. 2011. 400 с.

17. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Райт, 2021. 479 с.