

УДК 004.942

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ****Кунцев В.Е., Кожевникова П.В., Дорогобед А.Н.***ФГБОУ ВО «Ухтинский государственный технический университет», Ухта,  
e-mail: aira\_dark@list.ru*

В работе описывается реализация математической модели гидродинамической томографии с целью расчета распределения коэффициента пьезопроводности в межскважинном пространстве проницаемого пласта газонефтяного месторождения. В рамках исследования рассмотрены принципы гидродинамической томографии, которая основана на данных гидродинамического прослушивания. Описанный метод гидродинамической томографии позволяет рассчитывать и анализировать интервальные времена наступления отклика реакции в остановленных скважинах при изменении давления в нагнетающих скважинах. В статье приводятся описание последовательности решения прямой задачи нахождения интервальных времен по заданному пространственному распределению фильтрационного сопротивления (коэффициента пьезопроводности) по рассматриваемому пропластку газонефтяного месторождения, а также вычислительная схема гидродинамической томографии решения обратной задачи на основе разработанного алгоритма, содержащего: процесс уточнения значений коэффициента пьезопроводности; подбор обеспечивающего сходимость процесса параметра релаксации; правило остановки итерационного процесса, основанного на результатах расчета расхождения интервальных времен. Работоспособность и производительность математической модели гидродинамической томографии были рассмотрены с помощью применения программной реализации, основанной на разработанном алгоритме, на наборе тестовых данных. В статье приведен результат выполненного эксперимента на тестовых данных месторождения, содержащего пять скважин.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, вычислительная схема, фильтрационное сопротивление, гидродинамика, томография, структура нефтегазового месторождения

**MATHEMATICAL MODEL OF HYDRODYNAMIC TOMOGRAPHY****Kuntsev V.E., Kozhevnikova P.V., Dorogobed A.N.***Ukhta State Technical University, Ukhta, e-mail: aira\_dark@list.ru*

The paper describes the implementation of a mathematical model of hydrodynamic tomography in order to calculate the distribution of the piezoconductivity coefficient in the interwell space of a permeable formation of a gas-oil field. Within the framework of the study, the principles of hydrodynamic tomography, which is based on hydrodynamic listening data, are considered. The described hydrodynamic tomography method makes it possible to calculate and analyze the interval times of the onset of the reaction response in shut-in wells when the pressure in the injection wells changes. The article describes the sequence of solving the direct problem of finding interval times for a given spatial distribution of filtration resistance (piezoconductivity coefficient) over the considered interlayer of a gas-oil field, as well as a computational scheme for hydrodynamic tomography for solving the inverse problem based on the developed algorithm, which contains: the process of clarifying the values of the piezoconductivity coefficient; selection of the relaxation parameter ensuring the convergence of the process; and a rule for stopping the iterative process based on the results of calculating the discrepancy of the interval times. The operability and performance of the mathematical model of hydrodynamic tomography was considered using a software implementation based on the developed algorithm on a set of test data. The article presents the result of an experiment performed on test data from a field containing five wells.

**Keywords:** mathematical modeling, computational scheme, filtration resistance, hydrodynamics, tomography, oil and gas field structure

Гидродинамическое исследование скважин является инструментом для определения фильтрационных характеристик газонефтяных месторождений. Данная информация необходима для корректного планирования работ по эксплуатации месторождения.

Прогноз распределения фильтрационных свойств нефтегазовых месторождений (углеводородов) позволяет получать гидродинамическая томография с основой на данных гидропрослушивания скважин и оценке изменения поведения реперной точки кривой восстановления давления (КВД) [1, 2].

Гидродинамическая томография позволяет получать уточненную информацию о фильтрационном сопротивлении про-

ницаемого пласта в пространстве между скважинами. Метод гидродинамической томографии состоит в расчете интервальных времен наступления отклика в остановленных скважинах на изменение давления в нагнетающих скважинах и их анализе.

Исходные данные для метода гидродинамической томографии могут быть получены с помощью одного из перечисленных способов либо их совместного применения:

1) прямой регистрации интервальных времен наступления отклика реакции в остановленных скважинах на изменение давления в нагнетающих скважинах (при прямой регистрации изменения интервальных времен исходные данные должны быть получены с помощью эксперимента

на месторождении (активная гидродинамическая томография));

2) анализа истории эксплуатации месторождения.

При использовании метода гидродинамической томографии, основанного на анализе истории эксплуатации месторождения, исходные данные синтезируются в форме изменения по всем скважинам в пределах выбранного временного интервала: объема добываемой жидкости и нагнетания жидкости в скважину (пассивная гидродинамическая томография) [3, 4].

Активная гидродинамическая томография затратна и трудоемка. Для пассивной гидродинамической томографии требуется синтезирование данных, выполняемое на базе вычислительного эксперимента, в рамках которого используется построенная математическая модель месторождения. Таким образом, целесообразно применение пассивной гидродинамической томографии как с экономической точки зрения, так и с точки зрения трудозатрат.

### Материалы и методы исследования

Задача расчета пространственного распределения фильтрационного сопротивления пласта решается с помощью вычисления последовательных приближений значений коэффициента пьезопроводности. Вычисление последовательных приближений включает решение интегрального уравнения методом итераций, описывающего динамику интервальных времен перемещения реперной точки между скважинами. Сначала задается сетка пропластка месторождения с нулевым приближением среды (распределением значения коэффициента пьезопроводности), и по заданному приближению среды рассчитываются траектории движения сигнала (реперных точек) и интервальные времена. Затем вычисляется невязка интервальных времен, полученных в процессе моделирования, и наблюдаемых интервальных времен, и рассчитывается новое пространственное распределение значений коэффициента пьезопроводности, обеспечивающее наименьшую невязку. Далее по полученному распределению значений коэффициента пьезопроводности рассчитываются новые траектории движения сигнала и интервальные времена. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока невязка интервальных времен, полученных

в процессе моделирования движения сигнала, и наблюдаемых интервальных времен изменения давления превышает заданное допустимое значение.

Ниже представлена вычислительная схема гидродинамической томографии. Рассматриваемый пропласток месторождения  $S$  покрывается сеткой размерами  $X \times Y$  с целью дискретизации процесса. Каждая ячейка сетки характеризуется парой индексов  $s(i, j)$ , где  $i = 1 \div X$ ,  $j = 1 \div Y$ . По всему пропластку задается нулевое приближение среды  $\chi(s)$ . Через пропласток месторождения проходят скважины, образующие между собой  $K$  пар – произведение количества нагнетающих скважин ( $M$ ) и количества остановленных скважин, в которых ведется прием сигнала ( $N$ ). Движение сигнала между скважинами осуществляется по траектории  $L_k = L(s_{km}, s_{kn})$ , где  $k = 1 \div K$  – номер пары скважин. Каждая траектория имеет начало в точке нагнетающей скважины  $s_{km}$  и окончание в точке скважины-приемника  $s_{kn}$ . Время движения сигнала по траектории  $L_k$  обозначается  $t_k$ . Координата сетки вдоль траектории  $L_k$  обозначается  $s_k$ . Расстояние, пройденное сигналом от координаты  $s_{km}$  до координаты  $s_k$  по траектории  $L_k$ , обозначается  $l(s)$ . Время движения сигнала  $t_k$  рассчитывается по формуле:

$$A[\chi(s)] = \int_{L_k} \frac{l(s) ds}{3\chi(s)} = t_k,$$

которая в дискретном представлении принимает вид:

$$\bar{A}[\chi(s)] = \sum_{(i,j)_{kn}}^{(i,j)_{km}} \frac{l(i,j)}{3\chi(i,j)} = t_k. \quad (1)$$

Соотношение (1) позволяет рассчитать согласно принципу Беллмана кратчайшие траектории движения сигнала реперных точек с условием минимизации интервальных времен  $t_k$ . В дальнейших расчетах используются рассчитанные кратчайшие траектории.

Обозначим через  $\bar{t} = \{\bar{t}_k\}$  наблюдаемое время движения сигнала, полученное в рамках истории эксплуатации месторождения. Наблюдаемое время соответствует распределению значения коэффициента пьезопроводности  $\chi(s) + \Delta\chi(s)$ . Отсюда следует задача: рассчитать  $\Delta\chi(s)$  такое, чтобы полученное  $t_k$  минимально расходилось с  $\bar{t}_k$ . В таком случае невязка интервальных времен  $\Delta t_k$  рассчитывается в виде выражения:

$$\bar{t}_k - t_k = \int_{L_k} \frac{l(s)}{3[\chi(s) + \Delta\chi(s)]} ds - \int_{L_k} \frac{l(s)}{3\chi(s)} ds \approx \int_{L_k} \left[ \frac{l(s)}{3[\chi(s) + \Delta\chi(s)]} - \frac{l(s)}{3\chi(s)} \right] ds. \quad (2)$$

Поменяв местами  $\bar{t}_k$  и  $t_k$ :

$$A'[\chi(s)]\Delta\chi(s) = t_k - \bar{t}_k = \int_{L_k} \frac{l(s)\Delta\chi(s)}{3\chi^2(s)} ds = \Delta t_k. \quad (3)$$

Линейный оператор  $A'[\chi(s)]$ , действующий на вектор  $\Delta\chi(s)$ , также является производной Фреше [5] в «точке»  $\chi(s)$  к оператору  $A[\chi(s)]$ . Формулы (2) и (3) основаны на допущении, что значение  $\Delta\chi(s)$  незначительно, поэтому траектории  $L_k = L(s_{kn}, s_{km})$  и произведение  $(\chi(s) + \Delta\chi(s)) \times \chi(s) \approx \chi(s)^2$  для пьезопроводности  $\chi(s) + \Delta\chi(s)$  и  $\chi(s)$  практически совпадают.

В дискретном представлении выражение (3) принимает вид:

$$\bar{A}'[\chi(s)]\Delta\chi(s) = \sum_{(i,j)_{km}}^{(i,j)_{kn}} \frac{l(i,j)\Delta\chi(i,j)}{3\chi^2(i,j)} = \Delta t_k. \quad (4)$$

Размерность вектора  $\Delta\chi(i,j)$  определяется в зависимости от количества ячеек в траектории:  $D = \sum_{k=1}^K N_k$ , где  $N_k$  – количество ячеек в траектории  $k$ . Вектор  $\Delta t = \{\Delta t_k\}$ , имеющий размерность  $K$ , является областью значения выражения (4). После расчета вектора  $\Delta\chi(i,j)$  выполняется вычисление приближения коэффициента пьезопроводности:

$$\chi^2(s) = \chi(s) + \Delta\chi(s). \quad (5)$$

Вычисление выражения (4) относительно вектора  $\Delta\chi(i,j)$  в точках пропластка траекторий  $L_k = L(s_{kn}, s_{km})$  выполняется на основе итерационного метода, который на итерации  $z + 1$  вычисляется по формуле:

$$\begin{cases} \Delta\chi^{z+1}(i,j) = \Delta\chi^z(i,j) + \alpha^z A'^*[\chi(s)]\varepsilon^z \\ \|\Delta\chi^{z+1} - \Delta\chi^z\| \leq \varepsilon \end{cases}, \quad (6)$$

$$\varepsilon^z = A[\chi(s) + \Delta\chi^z(i,j)] - \bar{t} = \left\{ \int_{L_k} \frac{l(s)}{3[\chi(s) + \Delta\chi^z(i,j)]} ds - \bar{t}_k, k = 1 \div K \right\},$$

где  $\varepsilon^z$  – невязка интервальных времен, полученных в процессе моделирования на итерации  $z$ , и наблюдаемых интервальных времен.

В качестве нулевого приближения было принято значение  $\Delta\chi^0(i,j) = 0$ .

$\alpha^z$  – параметр релаксации, который подбирается на каждой итерации для обеспечения сходимости метода итераций (6) [6]:

$$\alpha^z = \frac{A'^*[\chi(s)]\varepsilon^{z2}}{A'[\chi(s)]A'^*[\chi(s)]\varepsilon^{z2}},$$

где  $A'^*[\chi(s)]$  – оператор, сопряженный к оператору  $A'[\chi(s)]$ , который вычисляется на основе условия для вектора  $y = \{y_k, k = 1 \div K\}$ :

$$\langle y | A'[\chi(s)]\Delta\chi(s) \rangle_{R^K} = \langle A'^*[\chi(s)]y | \Delta\chi(s) \rangle_X. \quad (7)$$

В данном случае  $X$  представляет собой функциональное пространство для вычисления приращения к  $\Delta\chi(s)$ . Данное функциональное пространство в дискретном представлении принимает вид:  $R^D$  (где  $D$  – размерность вектора  $\Delta\chi(i,j)$ , а  $K$  – размерность вектора  $y$ ); тогда выражение (7):

$$\langle y | \bar{A}'[\chi(s)]\Delta\chi(s) \rangle_{R^K} = \langle \bar{A}'^*[\chi(s)]y | \Delta\chi(s) \rangle_{R^D}. \quad (8)$$

Если подставить формулу действующего на вектор  $\Delta\chi(s)$  линейного оператора  $A'[\chi(s)]$  в выражение (8), то:

$$\sum_{k=1}^K \left[ y_k \sum_{(i,j)_{km}}^{(i,j)_{kn}} \frac{l(i,j)\Delta\chi(i,j)}{3\chi^2(i,j)} \right] = \sum_{(i,j)_{km}}^{(i,j)_{kn}} \sum_{k=1}^K \left[ y_k \frac{l(i,j)\Delta\chi(i,j)}{3\chi^2(i,j)} \right].$$

Реализация в правой части выражения суммирования привносит смысл уравнению и устанавливает вид оператора  $\bar{A}^*[\chi(s)]$ .

Оператор  $\bar{A}^*[\chi(s)]$  на векторе  $y$  принимает значения вектора  $g(i, j)$  с индексами  $\{(i, j)_{km} \div (i, j)_{kn}, k = 1 \div K\}$ . Траектории  $L_k$ , в интервалы которых попадают индексы  $(i, j)$ , определяются значениями  $k(i, j)$ . Таким образом, формула для расчета сопряженного оператора на векторе  $y$ :

$$g(i, j) = \bar{A}^*[\chi(s)]y = \sum_{k(i, j)}^K \left[ y_{k(i, j)} \frac{l_{k(i, j)}(i, j)}{3\chi^2(i, j)} \right], \quad (9)$$

где  $l_{k(i, j)}(i, j)$  – часть траектории  $L_k$  от начальной координаты до координаты, в которой рассчитывается вектор  $g(i, j)$ . При  $y = \varepsilon^z$  уравнение (9) принимает вид:

$$A^*[\chi(s)]\varepsilon^z = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{k_1}[\chi(s)]}{\partial \Delta \chi_1^z(i, j)} & \dots & \frac{\partial A_K[\chi(s)]}{\partial \Delta \chi_1^z(i, j)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A_{k_1}[\chi(s)]}{\partial \Delta \chi_c^z(i, j)} & \dots & \frac{\partial A_K[\chi(s)]}{\partial \Delta \chi_c^z(i, j)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varepsilon_{k_1}^z \\ \vdots \\ \varepsilon_K^z \end{pmatrix}.$$

Завершением метода итераций являются выполнение условия (6) и вычисление приближения распределения значений коэффициента пьезопроводности в ячейках сетки. После завершения описанного итерационного процесса по пропластку месторождения  $S$  вычисляются новые траектории, и метод итераций повторяется.

Рассмотрим результат применения метода гидродинамической томографии для расчета коэффициента пьезопроводности по данным тестового месторождения. Исходными данными был выбран пропласток месторождения, через который проходят шесть скважин. В качестве исходных данных были заданы:

- однородная среда (рис. 1) для нулевого приближения распределения значения коэффициента пьезопроводности;
- наблюдаемые интервальные времена  $\bar{t}$  между всеми парами скважин ( $K = 20$ ).

Согласно рассмотренному методу на первом шаге вычисляются траектории, по которым осуществляется движение сигнала между скважинами,  $L_k$ , а также интервальные времена  $t_k$ .

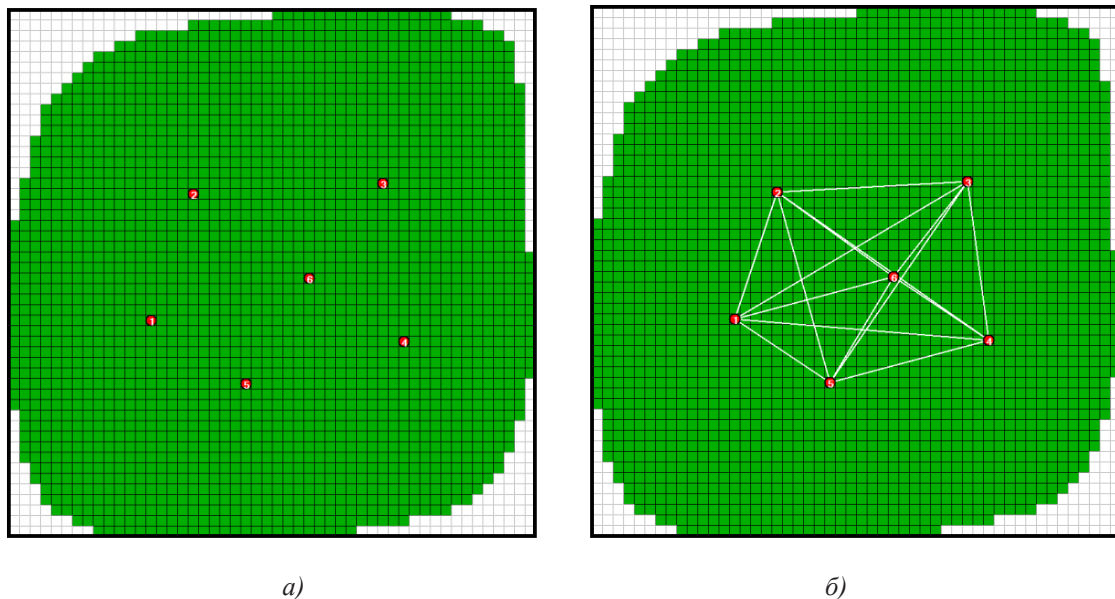


Рис. 1. Пропласток месторождения с пятью скважинами и нулевым приближением среды (а); траектории движения сигнала между скважинами на первой итерации (б)



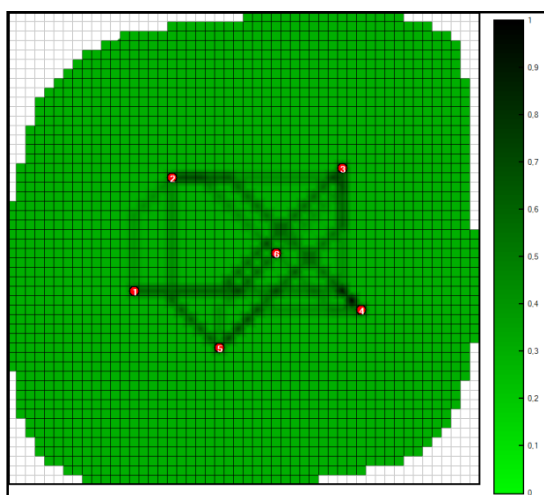
Здесь и далее красными кругами отображаются координаты скважины, проходящие через пропласток, белой линией – траектории движения сигнала, цвет ячеек отображает значение коэффициента пьезопроводности (чем темнее, тем больше коэффициент пьезопроводности).

Первая итерация заканчивается расчетом  $\Delta\chi(i, j)$ , после чего вычисляются новые значения коэффициента пьезопроводности по формуле (5) (рис. 2а). Рис. 2б отображает

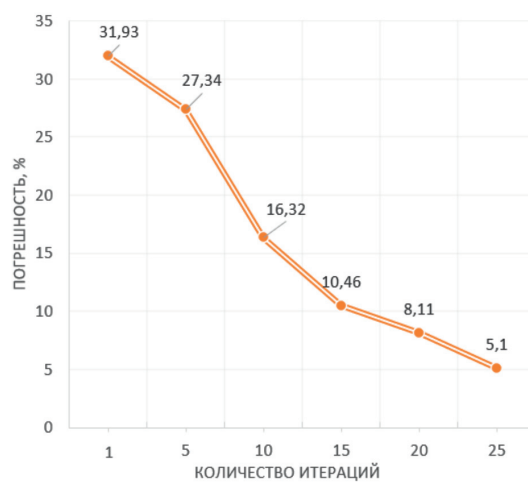
график изменения относительной погрешности  $\epsilon$  наблюдаемых интервальных времен и рассчитанных на первом шаге итерационного метода (6).

### Результаты исследования и их обсуждение

Результаты оптимизации значений коэффициента пьезопроводности на второй и десятой итерации представлены на рис. 3а и 3б соответственно.

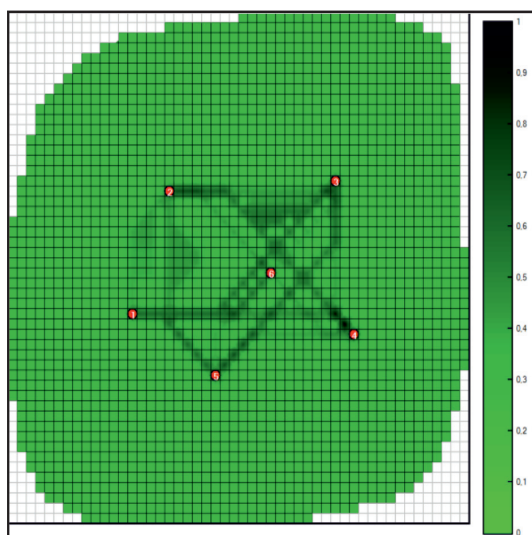


а)

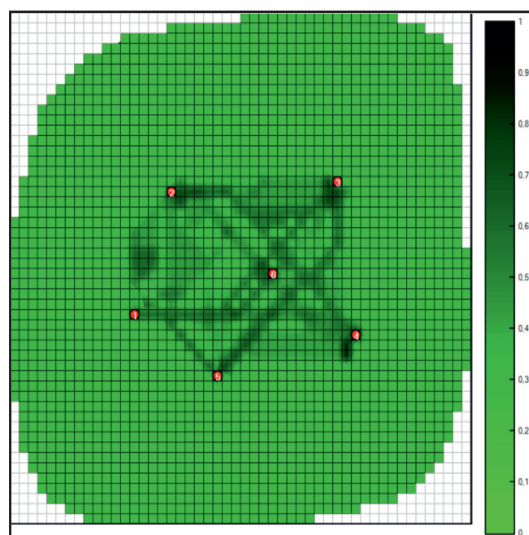


б)

Рис. 2. Результат фильтрационного сопротивления, рассчитанный на первой итерации (а), и изменение средней относительной погрешности на первой итерации (б)



а)



б)

Рис. 3. Результаты фильтрационного сопротивления, рассчитанные: на второй итерации (а), на десятой итерации (б)

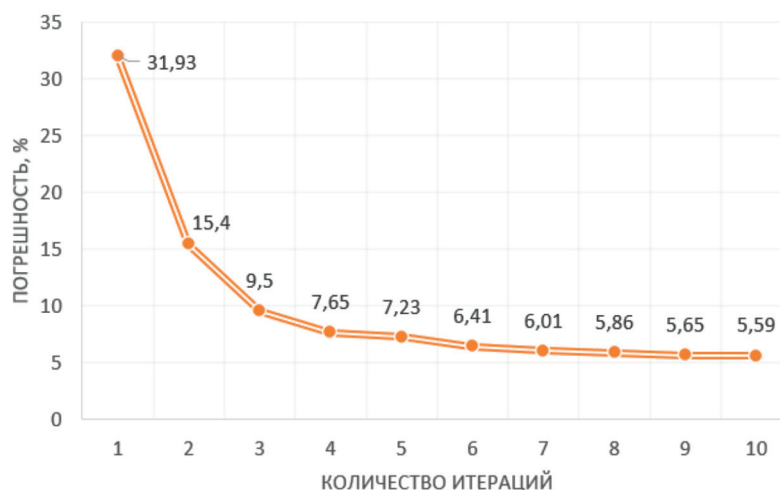


Рис. 4. Изменение относительной погрешности по  $\Delta t$

Изменение средней относительной погрешности по  $\Delta t$  после расчета траекторий движения сигнала между скважинами по пропластку (2) представлено на рис. 4. Затем вычисляется оценка полученной величины и принимается решение о продолжении или прекращении процесса вычислений (6).

### Заключение

Результат проведенного эксперимента по данным одного пропластка тестового месторождения, содержащего пять скважин, с целью проверки применимости метода гидродинамической томографии для расчета коэффициента пьезопроводности по интервальным временам наступления отклика реакции в остановленных скважинах при изменении давления в нагнетающих скважинах продемонстрировал, что описанный метод может быть использован для вычисления фильтрационного со-

противления на основе выбранного начального приближения.

### Список литературы

1. Кобрунов А.И. Теоретические основы гидродинамической томографии // Геофизический журнал. 2015. Выпуск 2. С. 27–34.
2. Кобрунов А.И. Математическая модель томографии на давлениях при контроле за разработкой нефтяных месторождений // Известия Коми научного центра Уро РАН. 2012. Выпуск 4-12. С. 82–86.
3. Кобрунов А.И., Кунцев В.Е., Мотрюк Е.Н. Технология оценки связности скважин на основе модели эксплуатации месторождения // Фундаментальные исследования. 2015. № 6–3. С. 452–456.
4. Краснов В.А., Иванов В.А., Хасанов М.М. Помехоустойчивый метод оценки связности пласта по данным эксплуатации месторождений // Российская техническая нефтегазовая конференция и выставка SPE по разведке и добыче (Москва, 16–18 октября 2012 года). SPE. 162053. Москва, 2012.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.
6. Кобрунов А.И., Кунцев В.Е., Мотрюк Е.Н. Вычислительная схема гидродинамической томографии // Фундаментальные исследования. 2016. № 7–2. С. 230–235.