

УДК 681.51:519.6

УСТОЙЧИВЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ СМЕШАННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ЗАДАЧАХ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

^{1,2}Воскобойников Ю.Е., ¹Боева В.А.

¹ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет
(Сибстрин)», Новосибирск, e-mail: voscob@mail.ru, v.boyeva@sibstrin.ru;

²ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет»,
Новосибирск, e-mail: voscob@mail.ru

В последние два десятилетия для описания динамики нелинейных систем в терминах «вход-выход» используются так называемые ряды Вольтера. При применении этих рядов математическая модель идентифицируемой системы кроме стандартного одномерного уравнения Вольтера включает интегральные уравнения Вольтера большей размерности (двумерное, трехмерное и т.д.). Для стационарных систем ядра этих уравнений являются разностными, т.е. их значения зависят от разности аргументов. Непараметрическая идентификация моделей, использующих ряды Вольтера, заключается в построении оценок для импульсных переходных функций (ИПФ), зависящих от двух и более аргументов, что, естественно, делает алгоритмы идентификации существенно сложнее по сравнению с одномерным случаем. В работе рассматривается один подход к идентификации двумерной ИПФ, использующий смешанные производные второго порядка от выходного сигнала системы, когда на ее вход подается серия прямоугольных импульсов разной амплитуды в разные моменты времени. Как известно, задача дифференцирования является некорректно поставленной задачей. Поэтому принципиальной проблемой реализации этого подхода является устойчивое вычисление смешанных производных второго порядка по зашумленным данным. Для преодоления этой проблемы в работе предлагается использовать двумерный сглаживающий кубический (бикубический) сплайн (сокращено СБС). Построение СБС для идентификации двумерной ИПФ обуславливает две задачи: задание и реализация разнотипных краевых условий на границе прямоугольной области, в которой определяется СБС; оценивание оптимальных значений двух параметров сглаживания из-за разной «гладкости» ИПФ по разным двум аргументам. В работе предлагается приемлемое решение этих двух задач. Выполненный вычислительный эксперимент показал хорошую точность предлагаемого алгоритма вычисления смешанных производных при искажении исходных данных шумами различного уровня.

Ключевые слова: задача идентификации нелинейных систем, ряды Вольтера, сглаживающие бикубические сплайны, задание краевых условий, выбор двух параметров сглаживания

STABLE ALGORITHM OF MIXED DERIVATIVES CALCULATION FOR NON- PARAMETRIC IDENTIFICATION PROBLEMS IN NONLINEAR SYSTEMS

^{1,2}Voskoboynikov Yu.E., ¹Boeva V.A.

¹Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin),
Novosibirsk, e-mail: voscob@mail.ru, v.boyeva@sibstrin.ru;

²Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, e-mail: voscob@mail.ru

Over the past two decades, the Volterra series are widely used to describe the dynamics of nonlinear systems in input-output terms. When applying these series, a mathematical model of the system identified includes the Volterra integral equations of higher dimension (two-dimensional, three-dimensional, etc.) in addition to the standard one-dimensional Volterra equation. For stationary systems, the kernels of these equations are difference, i.e. their values depend on difference in the arguments. A non-parametric identification of the models represented by the Volterra series consists in estimates construction for impulse transient functions (ITFs) depending on two or more arguments. It naturally makes identification algorithms much more complicated in comparison with the one-dimensional case. The paper considers one approach to the identification of a two-dimensional ITF, using mixed second-order derivatives of an output signal of a system, when a series of different-amplitude rectangular pulses is applied to the input of a system at different times. It is known that differentiation is an ill-posed problem. In this context, a stable calculation of second-order mixed derivatives of noisy data is the fundamental problem when this method is implemented. The solution to this problem is proposed to find by two-dimensional smoothing cubic, or bicubic, splines (abbreviated SBS). The construction of SBS for two-dimensional ITF identification poses two matters: firstly, the matter of different-type boundary conditions definition on the border of rectangular SBS definition domain, and, secondly, the matter of optimal values estimation for two smoothing parameters due to the different ITFs smoothness for different arguments. The paper proposes an acceptable solution to these two matters. The computational experiment performed presents a high accuracy of the algorithm proposed for calculation of mixed derivatives even when initial data are noise-contaminated.

Keywords: identification problem for nonlinear systems, Volterra series, smoothing bicubic splines, boundary conditions definition, selection of two smoothing parameters

Два последних десятилетия ведутся интенсивные научные исследования методов идентификации нелинейных динамических систем, представленных различ-

ными математическими моделями. Весьма перспективной в этом отношении является интегральная модель «вход-выход», состоящая из нескольких уравнений Вольтера,

ядра которых образованы из соответствующих слагаемых ряда Вольтера [1, 2]. Один из подходов к идентификации квадратичного ядра (двумерной импульсной переходной функции (ИПФ)) [3, 4] требует вычисления смешанной производной второго порядка от двумерного выходного сигнала $f_{\text{кв}}(t, \tau)$ идентифицируемой системы при подаче на ее вход серии прямоугольных импульсов разной амплитуды в разные моменты времени [5]. Следовательно, необходимо по измеренным в дискретные моменты времени (t_i, τ_j) зашумленным значениям $f_{\text{кв}}(t_i, \tau_j)$, $i = 1, \dots, N_t$, $j = 1, \dots, N_\tau$ вычислить смешанную производную $f''_{\text{кв},t,\tau}(t, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} f_{\text{кв}}(t, \tau)$.

Как известно, задача дифференцирования даже функции одной переменной является некорректно поставленной задачей, когда небольшие ошибки измерения значений функции вызывают существенные ошибки в производной. В работах [6, 7] для устойчивого вычисления первой производной использовались одномерные сглаживающие кубические сплайны (СКС). При соответствующем задании краевых условий и выборе параметра сглаживания (из условия минимума СКО сглаживания) удается с приемлемой точностью построить оценку для ИПФ линейной стационарной системы. Для устойчивого вычисления смешанной производной второго порядка $f''_{\text{кв},t,\tau}(t, \tau)$ в данной работе предлагается также использоваться сглаживающий сплайн, но уже бикубический, т.е. являющийся функцией двух переменных, который будем обозначать как СБС (сглаживающий бикубический сплайн). Однако построение такого сплайна существенно сложнее построения одномерного СКС. Во-первых, краевые условия задаются уже не в двух точках, а на четырех прямых, являющихся границами прямоугольной области построения СБС. Во-вторых, из-за разной «гладкости» функции $f_{\text{кв}}(t, \tau)$ по разным переменным t, τ необходимо выбрать уже два параметра сглаживания α_t, α_τ (по каждой переменной сплайна) из условия минимума СКО сглаживания. Эти два момента обусловили две основные задачи, которые решаются в данной работе:

- разработка алгоритма, позволяющего строить сглаживающий бикубический сплайн с большим числом комбинаций краевых условий на разных границах области построения сплайна;
- выбор двух параметров сглаживания (по каждой переменной сплайна) из условия минимума СКО сглаживания

на основе проверки статистических гипотез об оптимальности того или иного параметра сглаживания.

Материалы и методы исследования

Предположим, что регистрируемый в узлах прямоугольной сетки $\{t_i, \tau_j\}$, $i = 1, \dots, N_t$, $j = 1, \dots, N_\tau$, зашумленный сигнал $\tilde{f}_{\text{кв}}(t_i, \tau_j)$ допускает представление:

$$\tilde{f}_{\text{кв}}(t_i, \tau_j) = f_{\text{кв}}(t_i, \tau_j) + \eta_{i,j},$$

$$i = 1, \dots, N_t, j = 1, \dots, N_\tau, \quad (1)$$

где $\eta_{i,j}$ – случайный шум измерения с нулевым средним и дисперсией σ_η^2 . Заметим, что узлы как t_i , так и τ_j могут иметь не одинаковый и не равный шаг. Требуется по исходным данным $\{\tilde{f}_{\text{кв}}(t_i, \tau_j)\}$ вычислить смешанные производные сглаживающего сплайна. Простой, но достаточно эффективный алгоритм вычисления частных производных СБС (при заданных параметрах сглаживания α_t, α_τ) можно получить, обобщая методику построения самого СБС работы [7]. Предлагаемый алгоритм вычисления частных производных СБС можно представить следующими шагами.

Шаг 1. Для каждого фиксированного значения аргумента τ_j и заданного параметра сглаживания α_t строится одномерный СКС $S_{\alpha_t}(t, \tau_j)$ по зашумленным значениям $\tilde{f}_{\text{кв}}(t_i, \tau_j)$, $i = 1, \dots, N_t$ (т.е. СКС строится по переменной t). Напомним, что каждый из N_τ построенных СКС на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \dots, N_t - 1$ представляет собой полином третьей степени вида [8, 9]:

$$S_{\alpha_t}(t, \tau_j) = a_{ii} + b_{ii}(t - t_i) + c_{ii}(t - t_i)^2 + d_{ii}(t - t_i)^3 \quad (2)$$

и на всем интервале $[t_1, t_{N_t}]$ имеет вторую непрерывную производную. Так как при построении сплайна находятся коэффициенты сплайна $a_{ii}, b_{ii}, c_{ii}, d_{ii}$, то вычисление частной производной от сплайна $S_{\alpha_t}(t, \tau_j)$ по переменной t можно осуществить по формуле

$$S'_{\alpha_t}(t, \tau_j) = \frac{\partial}{\partial t} S_{\alpha_t}(t, \tau_j) = b_{ii} + 2c_{ii}(t - t_i) + 3d_{ii}(t - t_i)^2. \quad (3)$$

Очевидно, что при $t = t_i$ из формулы (3) получаем

$$S'_{\alpha_t}(t_i, \tau_j) = \frac{\partial}{\partial t} S_{\alpha_t}(t, \tau_j) \Big|_{t=t_i} = b_{ii}.$$

Шаг 2. Для каждого фиксированного значения аргумента t_i при заданном параметре сглаживания α_τ строится одномерный СКС $S'_{\alpha_i, \alpha_\tau}(t_i, \tau)$ по значениям частной производной $S'_{\alpha_i}(t_i, \tau_j)$, $j=1, \dots, N_\tau$ (т.е. СКС строится по переменной τ). Каждый из N_i построенных СКС на отрезке $[\tau_j, \tau_{j+1})$, $i=1, \dots, N_\tau - 1$ представляет собой полином третьей степени вида

$$S'_{\alpha_i, \alpha_\tau}(t_i, \tau) = a_{\tau_j} + b_{\tau_j}(\tau - \tau_j) + c_{\tau_j}(\tau - \tau_j)^2 + d_{\tau_j}(\tau - \tau_j)^3 \quad (4)$$

и на всем интервале $[\tau_1, \tau_{N_\tau}]$ имеет вторую непрерывную производную. Для вычисления смешанной производной второго порядка выполним дифференцирование (4) по переменной τ . Получаем

$$S''_{\alpha_i, \alpha_\tau}(t_i, \tau_j) = \left. \frac{\partial S'_{\alpha_i, \alpha_\tau}(t_i, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=\tau_j} = b_{\tau_j}. \quad (5)$$

Таким образом, построен алгоритм вычисления смешанной производной с высокой вычислительной эффективностью – число вычислительных операций можно выразить формулой: $C \cdot N_i \cdot N_\tau$, где C – константа, не зависящая от N_i, N_τ (для одномерного СКС значение C не превышает 60 [8]).

Напомним, что для однозначного вычисления коэффициентов одномерного СКС $S_{\alpha_i}(t)$ необходимо задать так называемые краевые условия на левой и правой границе отрезка (для определенности обозначим эти границы как t_1 и t_N), на котором строится СКС [8, 9]. Так как многие алгоритмы непараметрической идентификации используют значения производных от построенных сплайнов, то целесообразно в качестве краевых условий принимать значения первых производных, т.е. условия

$$S'_{\alpha_i}(t_1) = s'_1; S'_{\alpha_i}(t_N) = s'_N. \quad (6)$$

Алгоритм построения СКС с такими условиями был изложен в работе [7]. К сожалению, в ряде случаев информация о точных значениях s'_1, s'_N первой производной отсутствует, и в этом случае обращаются к естественным краевым условиям вида [6]:

$$S''_{\alpha_i}(t_1) = 0; S''_{\alpha_i}(t_N) = 0, \quad (7)$$

которые могут значительно увеличить ошибку идентификации по сравнению с условиями (6) [7]. Задание краевых условий при построении двумерного сплайна существенно усложняется из-за необходимости задавать сочетания разных типов краевых условий не в двух точках, а на четырех прямых, являющихся границами прямоугольной области, в которой строится СБС. Поэтому в разработанном пакете прикладных программ

(используемого при решении практических задач идентификации) предусмотрена возможность задавать любые комбинации из краевых условий (6), (7) на этих четырех границах. Пример такого задания будет приведен ниже в описании выполненного вычислительного эксперимента.

Ранее при изложении алгоритма вычисления смешанной производной предполагалось, что параметры сглаживания α_i, α_τ определены. Необходимость введения двух параметров сглаживания была обусловлена разной степенью «гладкости» дифференцируемой функции по переменным t, τ , и эта разница может быть весьма значительной. Как же определить приемлемые значения (исходя из минимума ошибки дифференцирования) этих параметров? Очевидно, что нахождение значений этих параметров является более сложной задачей, чем выбор параметра сглаживания в одномерном СКС, где находится только один параметр. Для выбора двух параметров α_i, α_τ предлагается следующий подход, основанный на проверке статистических гипотез об оптимальности параметра сглаживания [10], который использовался в работах [6, 7] для выбора одного параметра сглаживания.

Первоначально рассмотрим выбор параметра α_i . Введём статистику

$$\rho_i(\alpha_i) = \frac{1}{\sigma_{\eta}^2} \sum_{j=1}^{N_\tau} \sum_{i=1}^{N_i} e_{\alpha_i}(t_i, \tau_j) \cdot \tilde{f}_{\text{кв}}(t_i, \tau_j), \quad (8)$$

где $e_{\alpha_i}(t_i, \tau_j) = \tilde{f}_{\text{кв}}(t_i, \tau_j) - S_{\alpha_i}(t_i, \tau_j)$ – невязка i, j -ого измерения, $S_{\alpha_i}(t_i, \tau_j)$ – СКС с параметром сглаживания α_i , построенный по переменной t при фиксированном значении $\tau_j, j=1, \dots, N_\tau$. В качестве параметра сглаживания α_i принимается значение α_{i^*} , для которого выполняется неравенство

$$v_{\frac{\beta}{2}, N} \leq \rho_i(\alpha_i) \leq v_{1-\frac{\beta}{2}, N}, \quad (9)$$

где величины $v_{\frac{\beta}{2}, N}, v_{1-\frac{\beta}{2}, N}$ – квантили χ^2 -распределения с $N = N_i \cdot N_\tau$ степенями свободы уровней $\frac{\beta}{2}, 1 - \frac{\beta}{2}$ соответственно. Величина β определяет вероятность ошибки первого рода при проверке гипотезы об оптимальности (величина среднеквадратической ошибки сглаживания) оценки α_{i^*} и, как правило, $\beta = 0.05$. Если $N > 30$, то для вычисления квантилей χ^2 -распределения при $\beta = 0.05$ можно использовать простые формулы

$$v_{0.025, N} = N - 1.96 \cdot \sqrt{2N}, \\ v_{0.975, N} = N + 1.96 \cdot \sqrt{2N}. \quad (10)$$

Вычисление α_{t_w} сводится к решению нелинейного уравнения

$$\rho_t(\alpha_t) = N \quad (11)$$

итерационными алгоритмами. В качестве α_{t_w} принимается очередное приближённое решение $\alpha_t^{(n)}$ уравнения (11), которое удовлетворяет неравенству (9).

Для выбора параметра α_t введём статистику

$$\rho_t(\alpha_t) = \frac{1}{\sigma_{\eta}^2} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_{\tau}} e_{\alpha_t}(t_i, \tau_j) \cdot \tilde{f}_{KB}(t_i, \tau_j), \quad (12)$$

где $e_{\alpha_t}(t_i, \tau_j) = \tilde{f}_{KB}(t_i, \tau_j) - S_{\alpha_t}(t_i, \tau_j)$ – невязка i, j -ого измерения, $S_{\alpha_t}(t_i, \tau)$ – СКС с параметром сглаживания α_t , построенный по переменной τ при фиксированном значении $t_i, j = 1, \dots, N_{\tau}$. В качестве параметра сглаживания α_t принимается значение α_{t_w} , для которого выполняется неравенство

$$\nu_{\frac{\beta}{2}, N} \leq \rho_t(\alpha_t) \leq \nu_{1-\frac{\beta}{2}, N}. \quad (13)$$

Эффективность предложенного подхода к выбору двух параметров сглаживания СБС будет показана ниже на результатах выполненного вычислительного эксперимента.

Результаты исследования и их обсуждение

В качестве «точной» смешанной производной $f''_{KB,t,\tau}(t, \tau)$ была принята функция двух аргументов, показанная на рис. 1, а. Проинтегрировав $f''_{KB,t,\tau}(t, \tau)$ по переменным t, τ , получаем «точную» функцию $f_{KB}(t, \tau)$, показанную на рис. 1, б. Для перехода к вре-

менным осям оцифровку осей τ_1, t нужно умножить на шаг по времени 0,04, а оцифровку осей τ_2, τ – на шаг 0,15 с.

Зашумленные значения $\tilde{f}_{KB}(t_i, \tau_j)$ генерировались в соответствии с (1) и искажались нормально распределённым шумом с относительным уровнем 0,04, при этом $N_t = 40, N_{\tau} = 20$. При построении СБС в точках $\{t_i, \tau_j\}, j = 1, \dots, N_{\tau}$ задавались краевые условия $S'_{\alpha_t}(t_1, \tau_j) = 0$, на остальных трех границах области построения сплайна $\{t_{N_t}, \tau_j\}, j = 1, \dots, N_{\tau}, \{t_i, \tau_1\}, i = 1, \dots, N_t, \{t_i, \tau_{N_{\tau}}\}, i = 1, \dots, N_t$ задавались вторые нулевые производные (из-за предполагаемого отсутствия априорной информации о значениях первой производной).

На рис. 2, а, приведены зависимости от параметра сглаживания α_t : относительной ошибки сглаживания (сплошная кривая)

$$\delta_t(\alpha_t) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N_{\tau}} \sum_{i=1}^{N_t} (S_{\alpha_t}(t_i, \tau_j) - f_{KB}(t_i, \tau_j))^2}{\sum_{j=1}^{N_{\tau}} \sum_{i=1}^{N_t} (f_{KB}(t_i, \tau_j))^2}}; \quad (14)$$

статистика $\rho_t(\alpha_t)$ на рисунке показана точечной кривой; штрихами нанесены квантили $\nu_{0.025, N}, \nu_{0.975, N}$. Последние три величины для приемлемого масштаба отображения на рисунке поделены на величину $N = N_t \cdot N_{\tau} = 800$. На рис. 2, б, нанесены аналогичные характеристики $\delta_{\tau}(\alpha_{\tau}), \rho_{\tau}(\alpha_{\tau})$ параметра сглаживания α_{τ} сплайна $S_{\alpha_{\tau}}(t, \tau)$, который строится по переменной τ при фиксированных значениях t_i .

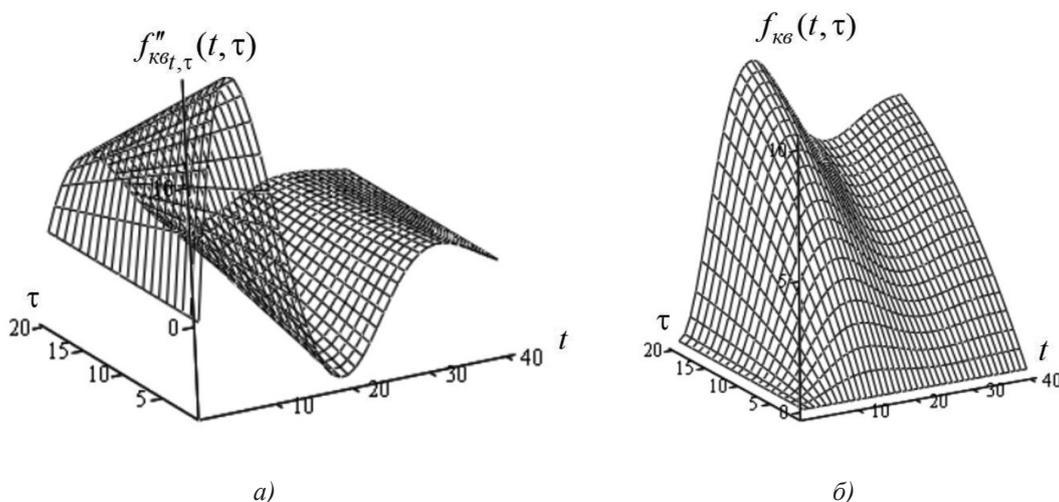


Рис. 1. Точные функции $f''_{KB,t,\tau}(t, \tau)$ и $f_{KB}(t, \tau)$

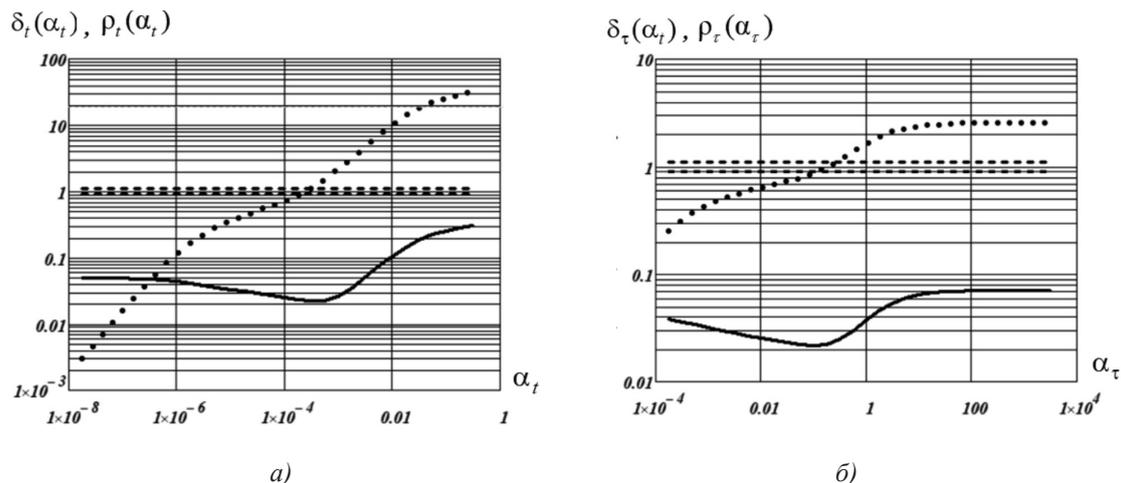


Рис. 2. Выбор параметров сглаживания α_{t_w} , α_{τ_w}

Как следует из (9), (13), в качестве параметров α_{t_w} , α_{τ_w} принимаются значения, для которых значения статистик $\rho_t(\alpha_t)$, $\rho_\tau(\alpha_\tau)$ находятся между штриховыми прямыми (квантили (10)). Анализ этих графиков позволяет сделать вывод, что предложенный подход к выбору двух параметров сглаживания позволяет: а) вычислить значения α_{t_w} , α_{τ_w} из области минимума соответствующих относительных ошибок сглаживания (рис. 2); б) определить разные α_{t_w} , α_{τ_w} в зависимости от «гладкости» функции $f_{\text{кв}}(t, \tau)$ по переменным t, τ . Принятая в эксперименте функция $f_{\text{кв}}(t, \tau)$ по переменной τ более гладкая, и поэтому значение α_{τ_w} примерно на два порядка больше α_{t_w} и это уменьшает ошибку дифференцирования по этой переменной. Относительная ошибка вычисленной $\hat{f}_{\text{кв},t,\tau}''(t_i, \tau_j) = S''_{\alpha_t, \alpha_\tau}(t_i, \tau_j)$ составила 0,127. Для сравнения была определена наименьшая относительная ошибка вычисления смешанной производной равная 0,109 (в вычислительном эксперименте это можно осуществить), что позволяет сделать вывод о приемлемой для практики точности вычисления смешанной производной второго порядка по зашумленным данным. Для относительного уровня шума 0,10 эти ошибки составили 0,205 и 0,188 соответственно. Это позволяет делать вывод о хорошей устойчивости алгоритма к шумам измерения исходных данных.

Заключение

Предложенный подход позволяет с приемлемой точностью вычислить смешанную производную второго порядка, дает возможность задавать разные типы краевых условий (исходя из имеющейся априорной информации), а также учитывать (за счет

выбора двух параметров сглаживания) разную гладкость дифференцируемой функции по отдельным переменным. Алгоритм дифференцирования на основе сглаживающего бикубического сплайна может работать с различными шагами дискретизации, как по каждой переменной, так и с разным шагом дискретизации «внутри» каждой переменной, что особенно ценно при обработке реальных экспериментальных данных.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-38-90041.

Список литературы

1. Сидоров Д.Н. Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. 293 с.
2. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтера I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999. 193 с.
3. Солoduша С.В. Численное моделирование динамики теплообмена модифицированным квадратичным полиномом Вольтерры // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18. № 2. С. 84–94.
4. Солoduша С.В. К численному решению одного класса систем полиномиальных уравнений Вольтера I рода // Сибирский журнал вычислительной математики. 2018. № 1. С. 117–126.
5. Солoduша С.В. Амплитуды тестовых сигналов для построения интегральных моделей динамики объектов тепло- и электроэнергетики // Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапом жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM-2017): материалы XVII-й Междунар. научно-практической конференции. М.: ООО «Аналитик», 2017. С. 322–326.
6. Воскобойников Ю.Е., Боева В.А. Новый устойчивый алгоритм непараметрической идентификации технических систем // Современные наукоемкие технологии. 2019. № 5. С. 25–29.
7. Воскобойников Ю.Е., Боева В.А. Дескриптивное сглаживание сигнала в одном алгоритме непараметрической идентификации технических систем // Современные наукоемкие технологии. 2020. № 7. С. 24–28.
8. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 345 с.
9. Wang Y. Smoothing Splines Methods and Applications. Ser. Monographs on Statistics and Applied Probability v. 121. A Chapman & Hall book. 2011. 347 p.
10. Воскобойников Ю.Е., Преображенский Н.Г., Седельников А.И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984. 238 с.