

УДК 517.9

## ЗАДАЧА ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Полянина А.С.

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский московский государственный строительный университет», Москва, e-mail: A.S.Churzina@mail.ru

Одной из прикладных задач динамики рассматриваемых процессов является формирование предельных циклов заданной геометрии. Типичная классификация колебательных процессов различной природы определяется связанной системой осцилляторов с определенным типом нелинейности. В статье рассматривается задача управления движением системы в кольцевой области. Исследовано качественное поведение колебательных процессов, как в самой области, так и в ее окрестности. Подход к решению задачи основывается на построении управления с обратной связью, за счет чего границы слоя будут инвариантными, в фазовом пространстве системы формируется притягивающий автоколебательный режим. При этом в фазовом пространстве наблюдается локализация движений в ограниченных областях пространства состояний и притяжение движений к границам этого множества. В структуру управления включены нелинейности высокого порядка. Получены выводы об устойчивости колебательных процессов в окрестности границ кольцевой области. Исследован механизм обмена устойчивостью между инвариантными границами, что соответствует переключению автоколебательных режимов и дает возможность регулировать амплитуду установившегося колебательного процесса. Результаты исследований подтверждаются численным моделированием. Проиллюстрирован выход интегральной кривой на режим устойчивых автоколебаний с параметрами внутреннего, внешнего предельного цикла.

**Ключевые слова:** инвариантность, устойчивость, предельный цикл, автоколебания, управление

## PROBLEM OF SELF-OSCILLATING MODES SWITCHING IN NONLINEAR CONTROL SYSTEMS

Polyanina A.S.

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, e-mail: A.S.Churzina@mail.ru

One of the applied problems of the dynamics of processes under consideration is the formation of limit cycles of the given geometry. A typical classification of oscillatory processes of various nature by a connected system of oscillators with a certain type of nonlinearity is determined. The article discusses the problem of controlling the motion of the system in the ring region. Qualitative behavior of oscillatory processes, both in the region itself and in its vicinity, has been investigated. The approach to solving the problem is based on constructing a feedback control, due to which the boundaries of the layer will be invariant, and an attractive self-oscillating mode is formed in the phase space of the system. In this case in phase space localization of motions in limited regions of the state space and attraction of motions to the boundaries of this set are observed. High order nonlinearities are included in the control structure. Conclusions on stability of oscillatory processes in vicinity of ring region boundaries are obtained. The mechanism of stability exchange between invariant boundaries has been investigated, which corresponds to the switching of self-oscillatory modes and makes it possible to regulate the amplitude of the steady-state oscillatory process. The research results are confirmed by numerical modeling. The output of the integral curve to the mode of stable self-oscillations with the parameters of the internal, external limit cycle is illustrated.

**Keywords:** invariance, stability, limit cycle, self-oscillations, control

Исследование колебаний в кольцевых областях является достаточно сложной задачей теории нелинейных колебаний [1]. В статье рассматривается принцип переключения автоколебательных режимов, основанный на синтезе инвариантных многообразий [2]. Инвариантность многообразия означает, что траектории, начинающиеся на этом многообразии, остаются на нем при  $t \rightarrow +\infty$ . Если многообразие гладкой системы – замкнутое и компактное, то траектории системы неограниченно продолжаемы на нем [3]. Из существования и единственности решения задачи Коши следует, что траектории системы, начинающиеся вне инвариантного многообразия, не могут его пересекать при  $t \rightarrow +\infty$ . Следовательно, если многообразие является границей не-

которой области, то траектории системы, начинающиеся внутри этой области, будут оставаться в ней при  $t \in (-\infty, +\infty)$ .

Автоколебания являются следствием собственных внутренних свойств системы. При этом амплитуда и частота колебаний не будут зависеть от начальных условий процесса. Автоколебания возникают только при наличии нелинейности. Возбуждение автоколебательного режима означает формирование устойчивого предельного цикла в пространстве состояний системы.

С изменением некоторых основных параметров нелинейной системы могут происходить бифуркации, вызывающие перестройку фазовых траекторий.

В статье [4] исследован механизм бифуркации на примере ритмов Ламэ. Одной

из прикладных задач динамики биологических ритмов является управление геометрией профиля ритма, что, в частности, связано с управлением амплитудами процессов Ламэ [2]. Типовая классификация ритмов определяется связной системой осцилляторов с определенным типом доминирующей нелинейности. Рассматривается задача построения многосвязной системы, передача управляемых сигналов в которой осуществляется по  $2n$ -каналам. Решение задачи приводит к определению слоев, ограниченных замкнутыми инвариантными многообразиями.

В результате бифуркации ритм Ламэ переключается с одного автоколебательного режима на другой. Это соответствует изменению свойства устойчивости предельных циклов.

В работе [5] получена зависимость между отношением площадей областей, ограниченных предельными циклами соответствующих подсистем, и амплитудами управляемой системы.

В данной работе в структуру управляющих функций вводятся нелинейности более высокого порядка. Это позволяет существенно увеличить гибкость управления

с целью изменения размеров области, ограниченной устойчивым предельным циклом, в отношении регулирования характеристик установившегося колебательного процесса.

#### Постановка задачи

Рассмотрим вложенные в  $R^{2n}$  гладкие многообразия:  $D_j^{2n} \subset R^{2n}$ , взаимное расположение которых в пространстве определим как

$$D_j^{2n} \subset D_{j+1}^{2n}, \quad (1)$$

где  $j = \overline{1, k-1}$ . Границы областей  $\partial D_j^{2n}$  зададим уравнениями

$$\partial D_j^{2n} = \left\{ X \in R^{2n} \left| c_j - \sum_{i=1}^{2n} \frac{x_i^{2m}}{a_i^{2m}} = 0 \right. \right\}, \quad j = \overline{1, k}.$$

Для выполнения условия (1) достаточно, чтобы  $0 < c_j < c_{j+1}$ ,  $j = \overline{1, k-1}$ . Нижняя и верхняя границы каждой кольцевой области являются нечетно-мерными многообразиями, гомеоморфными сферам.

Рассмотрим задачу синтеза автоколебаний на слое  $D_{j+1}^{2n} \setminus D_j^{2n}$ ,  $j = \overline{1, k-1}$ , при  $k = 4$ ,  $n = 2$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_{2i-1} = \theta_{2i} x_{2i}^{2m-1}, \\ \dot{x}_{2i} = -\theta_{2i-1} x_{2i-1}^{2m-1} + U_{1,2}(x_1, x_2) x_{2i} + U_{3,4}(x_3, x_4) x_{2i} + U_{2i-1,2i}(x_{2i-1}, x_{2i}) + V_{2i-1,2i}(X), \end{cases}$$

где  $X \in R^{2n}$  – вектор состояния пространства системы управления;  $U_{1,2}$ ,  $U_{3,4}$ ,  $U_{2i-1,2i}$  – внутренние функции управления;  $V_{2i-1,2i}(X)$  – обменные функции управления,  $i = \overline{1, 2, \dots, n}$ .

Решение задачи стабилизации колебаний на слое сводится к получению условий инвариантности, асимптотической устойчивости верхней или нижней границы кольцевой области в фазовом пространстве системы [6]. При  $m = 1$  управлять размерами областей можно с помощью регулирования соответствующих амплитуд колебательных подсистем. При  $m > 1$  в качестве управляющих параметров во многих задачах следует рассматривать соотношения площадей внутренних областей, ограниченных инвариантными кривыми.

#### Параметры управления и стабилизация колебаний в кольце

Структуру управлений определим следующим образом:

1) внутрисистемное управление первой подсистемы

$$U_{1,2} = \beta_{4m,12} x_1^{2m} x_2^{2m} + \sum_{i=1}^2 \beta_i x_i^{6m} + \beta_{6m,12} x_1^{2m} x_2^{4m} + \beta_{6m,21} x_1^{4m} x_2^{2m} + \beta_{4m,21} x_1^{4m} x_2^{4m} + \beta_{8m,12} x_1^{6m} x_2^{2m} + \beta_{8m,21} x_1^{2m} x_2^{6m}$$

2) внутрисистемное управление второй подсистемы

$$U_{3,4} = \beta_{4m,34} x_3^{2m} x_4^{2m} + \sum_{j=3}^4 \beta_j x_j^{6m} + \beta_{6m,34} x_3^{2m} x_4^{4m} + \beta_{6m,43} x_3^{4m} x_4^{2m} + \beta_{4m,34} x_3^{4m} x_4^{4m} + \beta_{8m,34} x_3^{6m} x_4^{2m} + \beta_{8m,43} x_3^{2m} x_4^{6m}$$

3) внутрисистемное управление  $i$ -той подсистемы,  $i = 1, 2$

$$U_{2i-1,2i} = \beta_0 x_{2i} + \beta_{2i-1} x_{2i-1}^{2m} x_{2i} + \beta_{2i} x_{2i}^{2m+1} + \beta_{4m,2i-1} x_{2i-1}^{4m} x_{2i} + \beta_{4m,2i} x_{2i}^{4m+1} + \beta_{2m+1,2i} x_{2i-1}^{2m} x_{2i}^{2m+1} + \beta_{8m,2i-1} x_{2i-1}^{8m} + \beta_{8m,2i} x_{2i}^{8m+1}$$

4) межсистемное управление

$$\begin{aligned}
 V_{2i-1,2i} = & x_{2i} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq 2i-1, 2i}}^4 (\beta_j^{2m} + \beta_j^{4m} x_j^{2m} + \beta_{j,1}^{2m} x_1^{2m} + \beta_j^{8m} x_j^{6m}) x_j^{2m} + x_{2i} \sum_{i=3}^4 (\beta_{i,2}^{2m} x_i^{2m} x_2^{2m} + \beta_{i,1}^{4m} x_i^{4m} x_1^{4m} + x_i^{4m} x_2^{4m} \beta_{i,2}^{4m} + \\
 & \beta_{i,12}^{2m} x_i^{2m} x_1^{2m} x_2^{2m} + x_i^{2m} x_1^{6m} \beta_{i,1}^{6m} + x_i^{2m} x_2^{6m} \beta_{i,2}^{6m} + \beta_{i,21}^{4m} x_i^{2m} x_2^{2m} x_1^{4m} + \beta_{i,23}^{2m} x_i^{2m} x_3^{4m} x_2^{2m} + \beta_{i,24}^{2m} x_i^{2m} x_4^{4m} x_2^{2m} + \\
 & \beta_{i,1}^{2m} x_i^{2m} x_1^{4m} + \beta_{i,12}^{4m} x_i^{2m} x_1^{2m} x_2^{4m} + \beta_{i,123}^{2m} x_i^{2m} x_1^{2m} x_2^{2m} x_3^{2m} + \beta_{i,124}^{2m} x_i^{2m} x_1^{2m} x_2^{2m} x_4^{2m} + \beta_i^{4m} x_i^{4m} \sum_{k=1}^2 \beta_k^{2m} x_k^{2m} + \\
 & \beta_i^{2m} x_i^{2m} \sum_{k=1}^2 \beta_k^{4m} x_k^{4m} - \frac{2\xi_1 \eta_1}{\xi_1 + \eta_1} \beta_i^{2m} x_i^{2m} \sum_{k=1}^2 \beta_k^{2m} x_k^{2m}) + \sum_{k=1}^2 \beta_{k,34}^{4m} x_k^{4m} x_3^{2m} x_4^{2m} x_{2i} + \frac{1}{2} x_{2i} \sum_{i=1}^3 \beta_{i,12}^{2m} x_i^{2m} x_2^{4m} x_1^{2m} + \\
 & x_{2i} \sum_{i=2}^4 (\beta_{i,13}^{2m} x_i^{2m} x_3^{4m} + \beta_{i,14}^{2m} x_i^{2m} x_4^{4m} + 2\beta_{i,1}^{4m} x_i^{2m} x_1^{2m}) x_i^{2m} x_1^{2m} + \beta_{3,124}^{2m} x_1^{2m} x_2^{2m} x_3^{2m} x_4^{2m} x_{2i} + \beta_{234}^{2m} x_2^{2m} x_3^{2m} x_4^{2m} x_{2i} + \\
 & \beta_{134}^{4m} x_1^{4m} x_3^{2m} x_4^{2m} x_{2i} + 2\beta_{i,13}^{2m} x_i^{2m} x_3^{4m} x_4^{2m} x_{2i} + 2\beta_{3,14}^{2m} x_1^{2m} x_4^{4m} x_3^{2m} x_{2i} + 2\beta_{2,34}^{4m} x_4^{2m} x_2^{4m} x_3^{2m} x_{2i} + \beta_{234}^{4m} x_2^{2m} x_3^{4m} x_4^{2m} x_{2i} + \\
 & \beta_{243}^{4m} x_2^{2m} x_3^{4m} x_4^{2m} x_{2i} + \beta_{134}^{2m} x_1^{2m} x_3^{2m} x_4^{2m} x_{2i}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию  $F(X) = \sum_{i=1}^4 \frac{x_i^{2m}}{a_i^{2m}}$ . Данная функция знакопостоянна, как на множе-

стве, примыкающем к ее поверхности уровня изнутри, так и в некотором  $\delta$ -слое, прилегающем к границе извне. Запишем условия инвариантности для границ слоя:

$$\frac{dF(X)}{dt} = \sum_{i=1}^4 \left( \dot{x}_{2i-1} \frac{\partial F(X)}{\partial x_{2i-1}} + \dot{x}_{2i} \frac{\partial F(X)}{\partial x_{2i}} \right) = \pm 2m \prod_{j=1}^4 \left( c_j - \sum_{i=1}^4 \frac{x_i^{2m}}{a_i^{2m}} \right) \sum_{i=1}^2 \frac{x_{2i}^{2m}}{a_{2i}^{2m}}.$$

Равенство выполняется тогда и только тогда, когда вектор  $X$  принадлежит поверхности  $\prod_{j=1}^4 \left( c_j - \sum_{i=1}^4 \frac{x_i^{2m}}{a_i^{2m}} \right) = 0$ . Условие инвариантности будет выполняться только для одной из поверхностей уровня функции  $F(X)$ . Выполним подстановку и необходимые преобразования. Условия на параметры управлений примут вид:

– для внутрисистемного управления первой подсистемы

$$\beta_{4m,12} = \frac{2\xi_1 \eta_1}{a_1^{2m} a_2^{2m}}, \beta_i = -\frac{\xi_1 + \eta_1}{a_i^{6m}}, \frac{\beta_{6m,12}}{\beta_{6m,21}} = \frac{a_1^{2m}}{2a_2^{2m}}, \beta_{4m,21} = \frac{2}{a_1^{4m} a_2^{4m}}, \frac{\beta_{8m,12}}{\beta_{8m,21}} = \frac{a_2^{4m}}{a_1^{4m}}, i = 1, 2.$$

– для внутрисистемного управления второй подсистемы

$$\beta_{4m,34} = \frac{2\xi_1 \eta_1}{a_3^{2m} a_4^{2m}}, \beta_j = -\frac{\xi_1 + \eta_1}{a_j^{6m}}, \frac{\beta_{6m,34}}{\beta_{6m,43}} = \frac{a_3^{2m}}{2a_4^{2m}}, \beta_{4m,34} = \frac{2}{a_3^{4m} a_4^{4m}}, \frac{\beta_{8m,34}}{\beta_{8m,43}} = \frac{a_4^{4m}}{a_3^{4m}}, j = 3, 4.$$

– для внутрисистемного управления  $i$ -той подсистемы,  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
 \beta_0 = \xi_2 \eta_2, \beta_{2i-1} = -\frac{\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1}{a_{2i-1}^{2m}}, \beta_{2i} = -\frac{\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1}{a_{2i}^{2m}}, \frac{\beta_{2m,2i-1}}{\beta_{2m,2i}} = \frac{a_{2i}^{2m}}{a_{2i-1}^{2m}}, \frac{\beta_{4m,2i-1}}{\beta_{4m,2i}} = \frac{a_{2i}^{4m}}{a_{2i-1}^{4m}}, \\
 \beta_{2m+1,2i} = \frac{2(\xi_2 + \eta_2)}{a_{2i-1}^{2m} a_{2i}^{2m}}, \frac{\beta_{8m,2i-1}}{\beta_{8m,2i}} = \frac{a_{2i}^{8m}}{a_{2i-1}^{8m}}.
 \end{aligned}$$

– для межсистемного управления

$$\beta_j^{2m} = -\frac{\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1}{a_j^{2m}}, \beta_j^{4m} = \frac{\xi_2 + \eta_2 + \xi_1 \eta_1}{a_j^{4m}}, \beta_{j,1}^{2m} = \frac{2(\xi_2 + \eta_2)}{a_j^{2m} a_1^{2m}}, \beta_j^{8m} = \frac{1}{a_j^{8m}}, j = \overline{1, 4}, j \neq 2i-1, 2i,$$

$$\begin{aligned}\beta_{i,2}^{2m} &= \frac{2(\xi_2 + \eta_2)}{a_i^{2m} a_2^{2m}}, \beta_i^{4m} = \frac{1}{a_i^{4m}}, \beta_i^{2m} = \frac{1}{a_i^{2m}}, \beta_{i,1}^{4m} = \frac{2}{a_i^{4m} a_1^{4m}}, \beta_{i,2}^{4m} = \frac{2}{a_i^{4m} a_2^{4m}}, \beta_{i,1}^{6m} = \frac{4}{a_i^{2m} a_1^{6m}}, \\ \beta_{i,2}^{6m} &= \frac{4}{a_i^{2m} a_2^{6m}}, \beta_{i,21}^{4m} = \frac{4}{a_2^{2m} a_1^{4m} a_i^{2m}}, \beta_{i,23}^{2m} = \frac{4}{a_3^{4m} a_2^{2m} a_i^{2m}}, \beta_{i,24}^{2m} = \frac{4}{a_4^{4m} a_2^{2m} a_i^{2m}}, \beta_{i,1}^{2m} = \frac{8}{a_1^{4m} a_i^{2m}}, \\ \beta_{i,12}^{4m} &= \frac{8}{a_1^{2m} a_2^{4m} a_i^{2m}}, \beta_{i,123}^{2m} = \frac{8}{a_1^{2m} a_2^{2m} a_3^{2m} a_i^{2m}}, \beta_{i,124}^{2m} = \frac{8}{a_1^{2m} a_2^{2m} a_4^{2m} a_i^{2m}}, \beta_{i,13}^{2m} = \frac{4}{a_1^{2m} a_3^{4m} a_i^{2m}}, \\ \beta_{i,14}^{2m} &= \frac{4}{a_1^{2m} a_4^{4m} a_i^{2m}}, \beta_{234}^{2m} = -\frac{2(\xi_1 + \eta_1)}{a_2^{2m} a_3^{2m} a_4^{2m}}, \beta_{134}^{4m} = \frac{8}{a_1^{4m} a_3^{2m} a_4^{2m}}, \beta_{234}^{4m} = \frac{8}{a_2^{2m} a_3^{4m} a_4^{2m}}, \beta_{243}^{4m} = \frac{8}{a_2^{2m} a_4^{4m} a_3^{2m}}, \\ \beta_{134}^{2m} &= -\frac{2(\xi_1 + \eta_1)}{a_1^{2m} a_3^{2m} a_4^{2m}}, \beta_{i,12}^{2m} = -\frac{2(\xi_1 + \eta_1)}{a_1^{2m} a_2^{2m} a_i^{2m}}, \beta_k^{2m} = -\frac{\xi_1 + \eta_1}{a_k^{2m}}, \beta_k^{4m} = -\frac{2(\xi_1 + \eta_1)}{a_k^{4m}}, \\ \beta_{k,34}^{4m} &= \frac{4}{a_3^{2m} a_4^{4m} a_k^{4m}} \text{ при условии, что } \frac{\theta_{2i}}{\theta_{2i-1}} = \frac{a_{2i-1}^{2m}}{a_{2i}^{2m}},\end{aligned}$$

$$\xi_1 = c_1 + c_2, \eta_1 = c_3 + c_4, \xi_2 = c_1 c_2, \eta_2 = c_3 c_4.$$

При этих параметрах управляющих функций границы  $\partial D_j^{2n}, j = 4$ , кольцевой области инвариантны для траекторий, с начальными условиями, определенными на множествах

$$(D_1^{2n} \setminus \{0\}) \cup (D_2^{2n} \setminus D_1^{2n}), (D_2^{2n} \setminus D_1^{2n}) \cup (D_3^{2n} \setminus D_2^{2n}), (D_3^{2n} \setminus D_2^{2n}) \cup (D_4^{2n} \setminus D_3^{2n})$$

и  $(D_4^{2n} \setminus D_3^{2n}) \cup (R^{2n} \setminus D_4^{2n})$ , соответственно.

Стабилизирующие управления с требуемыми свойствами могут быть реализованы в нескольких случаях, связанных между собой переключением автоколебательных режимов с помощью смены знака перед параметрами управления [4].

Исследуем поведение системы (2) на следующих областях:

$$D_1^{2n} \setminus \{0\} = \left\{ X \in R^{2n} \left| 0 < \sum_{i=1}^{2n} \frac{x_i^{2m}}{a_i^{2m}} < c_1 \right. \right\}, D_{j+1}^{2n} \setminus D_j^{2n} = \left\{ X \in R^{2n} \left| c_j < \sum_{i=1}^{2n} \frac{x_i^{2m}}{a_i^{2m}} < c_{j+1} \right. \right\},$$

где  $j = 1, 2, 3$ ,

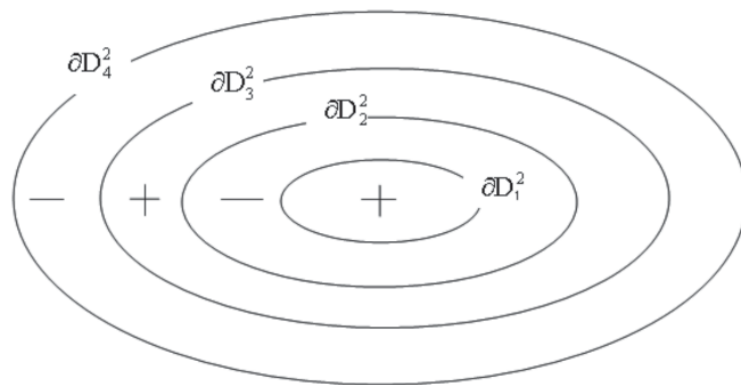


Рис. 1. Знакоопределенность полной производной функции  $F(X)$

$$R^{2n} \setminus D_4^{2n} = \left\{ X \in R^{2n} \left| \sum_{i=1}^{2n} \frac{x_i^{2m}}{a_i^{2m}} > c_4 \right. \right\}.$$

1. Для траекторий системы, начинающихся внутри области  $D_1^{2n} \setminus \{0\}$ , полная производная будет определено положительной в области  $(D_1^{2n} \setminus \{0\}) \cup (D_3^{2n} \setminus D_2^{2n}) \cup (R^{2n} \setminus D_4^{2n})$  и определено отрицательной на множестве  $(D_2^{2n} \setminus D_1^{2n}) \cup (D_4^{2n} \setminus D_3^{2n})$  (рис. 1). Следовательно, траектории системы, начинающиеся внутри множества  $D_1^{2n} \setminus \{0\}$ , притягиваются к границе  $\partial D_1^{2n}$ . В силу инвариантности поверхности  $\partial D_1^{2n}$  далее траектории ее не пересекают, оставаясь внутри области, ограниченной  $\partial D_1^{2n}$ . Траектории скручиваются от границы  $\partial D_2^{2n}$  к  $\partial D_3^{2n}$  и вовнутрь слоя с притяжением к границе  $\partial D_1^{2n}$ .

Траектории системы, начинающиеся внутри множества  $D_4^{2n} \setminus D_3^{2n}$ , притягиваются к границе  $\partial D_4^{2n}$  и скручиваются от границы  $\partial D_4^{2n}$  в  $R^{2n} \setminus D_4^{2n}$ .

2. Определим поведение полной производной функции на движения системы (2) после изменения знака перед коэффициентами функций управления. В этом случае полная производная будет отрицательной на множестве  $(D_1^{2n} \setminus \{0\}) \cup (D_3^{2n} \setminus D_2^{2n}) \cup (R^{2n} \setminus D_4^{2n})$  и положительной в области  $(D_2^{2n} \setminus D_1^{2n}) \cup (D_4^{2n} \setminus D_3^{2n})$ . Таким образом, траектории системы, начинающиеся внутри множества  $D_1^{2n} \setminus \{0\}$ , стягиваются в начало координат. Траектории системы, начинающиеся внутри множества  $D_2^{2n} \setminus D_1^{2n}$ , притягиваются к границе  $\partial D_2^{2n}$  и скручиваются от границы  $\partial D_3^{2n}$  в  $D_3^{2n} \setminus D_2^{2n}$ .

Траектории системы, начинающиеся внутри множества  $D_4^{2n} \setminus D_3^{2n}$ , скручиваются

от границы  $\partial D_3^{2n}$  и притягиваются к границе  $\partial D_4^{2n}$  в  $R^{2n} \setminus D_4^{2n}$ .

Во внутренней и внешней  $\delta$  – окрестности  $U_\delta^-(\partial D_i^{2n}) \cup U_\delta^+(\partial D_i^{2n})$  поверхности  $\partial D_i^{2n}$ ,  $i = 1, 4$ , нет  $\omega$  и  $\alpha$  – предельных точек, как и на самой поверхности, нет  $\alpha$  – предельных точек. Согласно теореме В.И. Зубова об асимптотической устойчивости инвариантных множеств с учетом описанного поведения траекторий можно сделать вывод, что множество  $U_\delta^-(\partial D_i^{2n}) \cup U_\delta^+(\partial D_i^{2n})$  является областью притяжения для  $\partial D_i^{2n}$ .

#### Численное моделирование.

##### Переключение режимов автоколебаний

Геометрически в  $R^2$  слой определяют концентрически расположенные предельные циклы. Внутренним предельным циклом является граница  $\partial D_1^{2n}$ , внешним –  $\partial D_{i+1}^{2n}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . В одном случае интегральные трубки описывают выход на режим устойчивых автоколебаний с параметрами предельных циклов  $\partial D_1^{2n}$ ,  $\partial D_3^{2n}$ , в другом случае – с параметрами циклов  $\partial D_2^{2n}$ ,  $\partial D_4^{2n}$ . На рис. 2 интегральная кривая скручивается с трубки внешнего предельного цикла  $\partial D_2^{2n}$  к трубке внутреннего предельного цикла  $\partial D_1^{2n}$ . На рис. 3 наблюдается переключение режимов автоколебаний, в результате которого внутренний предельный цикл  $\partial D_1^{2n}$  становится неустойчивым. Интегральная кривая скручивается от границы  $\partial D_1^{2n}$  и притягивается к поверхности  $\partial D_2^{2n}$ . Внешний предельный цикл  $\partial D_2^{2n}$  приобретает устойчивость (рис. 4).

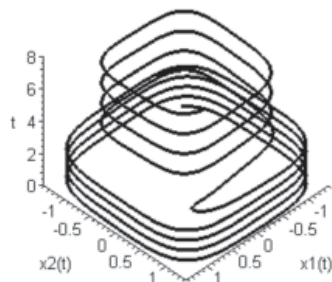


Рис. 2. Устойчивая внутренняя граница слоя

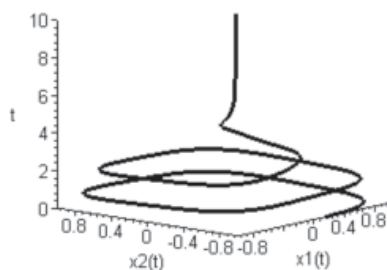
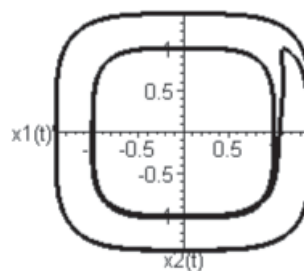
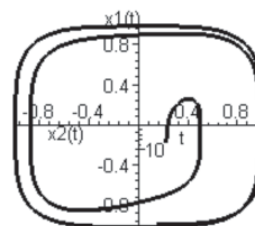


Рис. 3. Потеря устойчивости внутренней границей слоя



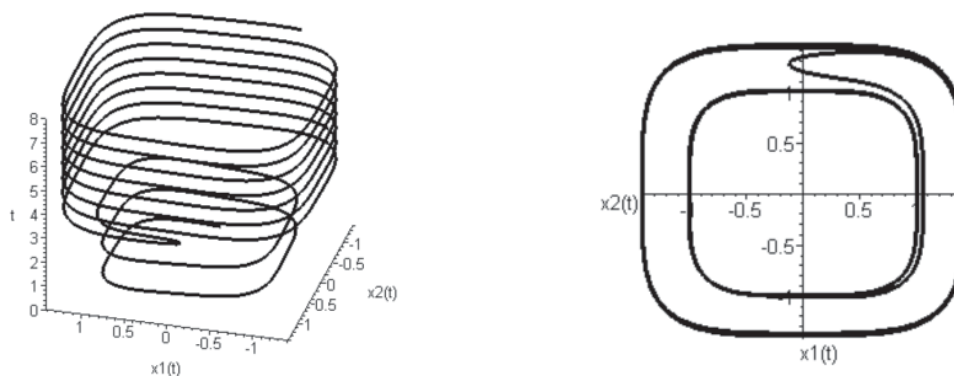


Рис. 4. Устойчивая внешняя граница слоя

### Заключение

Полученные в работе системы управления со стабилизацией на слое могут быть использованы в задачах биомедицинских технологий, при решении задач управляемого движения шагающих машин. Принцип переключения между устойчивыми режимами позволит варьировать размеры области стабилизации, определять характеристики колебаний.

### Список литературы

1. Gorobtsov A. The Control System Structure for the Stable Biped Robot Motion / Gorobtsov A., Ryzhov E., Polyanina A. Proc. Int. Conf. of Creativity in Intelligent Technologies and Data Science. Vol. 754. Ser. Communications in Computer and Information Science (Germany: Springer International Publishing AG), 2017. P. 231–241.

2. Горобцов А.С., Рыжов Е.Н., Чурзина А.С. Синтез интегральных поверхностей Ламе и стабилизация колебаний в их окрестностях // Динамика сложных систем. 2009. Т. 3. № 1. С. 59–62.

3. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Изд-во Едиториал УРСС, 2004. 552 с.

4. Горобцов А.С., Рыжов Е.Н., Чурзина А.С. Один из механизмов бифуркации ритмов Ламе // Биомедицинская радиоэлектроника. 2010. № 6. С. 4–7.

5. Polyanina A. Control parameters for processes of amplitude stabilization in the vicinity of orbital-stable limit cycles. 2017 Int. Conf. on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM), St. Petersburg, 2017. P. 1–4.

6. Gorobtsov A., Ryzhov E., Churzina A. Qualitative Researches of Processes of Lamé in the Ring. Rare Attractors and Rare Phenomena in Nonlinear Dynamics: proc. of the 2nd Int. Symposium RA' 11, held in Riga-Jurmala, Latvia, 16–20 May, 2011 / Institute of Mechanics, Riga Technical University. Riga, 2011. P. 97–99.