УДК 004.94

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ ПРОЦЕССАМИ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Медведев А.В.

ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет», Кемерово, e-mail: alexm_62@mail.ru

Построена оптимизационная линейная динамическая модель управления социально-экономическими системами в форме двухкритериальной многошаговой задачи линейного программирования. Кратко изложена исследовательская концепция, основанная на комбинации кибернетического подхода (использующего модель циркуляции в системе потоков доходов и расходов экономических агентов) и оптимизационного метода, выявляющего инвестиционный и производственный потенциал системы путем построения алгоритмически задаваемой производственной функции и максимизации соответствующей целевой функции. Приведены содержательная постановка и результаты формализации решаемой задачи оптимального управления в виде уравнений движения фазовых переменных, ограничений на фазовые и управляющие переменные, охарактеризован социально-экономический смысл используемых ограничений и целевых критериев. Произведен анализ построенной модели с точки зрения существования решения и используемых методов его получения, а также возможностей разработки автоматизированных программных комплексов, обеспечивающих полный параметрический анализ построенной модели. Подчеркнута возможность сведения двухкритериальной задачи к эквивалентной ей однокритериальной задаче с выпуклой линейной сверткой критериев, что открывает путь решения исходной многокритериальной задачи эффективными численными методами, разработанными для решения задачи линейного программирования. Сделан вывод о возможности разработки, на базе построенной модели и наличия эффективных алгоритмов ее анализа, систем поддержки принятия решений при управлении развитием социально-экономических систем.

Ключевые слова: социально-экономическая система, экономическая динамика, многокритериальная многошаговая задача линейного программирования, автоматизированный программный комплекс, численный анализ, система поддержки принятия решений

DYNAMIC LINEAR OPTIMAL CONTROL MODEL INVESTMENT AND PRODUCTION PROCESSES IN SOCIO-ECONOMIC SYSTEMS

Medvedev A.V.

Kemerovo State University, Kemerovo, e-mail: alexm_62@mail.ru

An optimization linear dynamic model of management of socio-economic systems in the form of a two-criterion multistep linear programming problem has been built. A research concept based on a combination of a cybernetic approach (using a model of circulation in the system of income and expenditure flows of economic agents) and an optimization method that identifies the investment and production potential of the system by constructing an algorithmically specified production function and maximizing the corresponding objective function is briefly outlined. Substantial formulation and results of formalization of the optimal control problem being solved in the form of equations of phase variables motion, restrictions on phase and control variables are given, the socio-economic meaning of the used equations and restrictions and target criteria is characterized. The analysis of the constructed model is carried out from the point of view of the existence of the solution and the methods used to obtain it, as well as the possibilities of developing automated software systems that provide a complete parametric analysis of the constructed model. The possibility of reducing a two-criterion problem to an equivalent one-criterion problem with a convex linear convolution of criteria is emphasized, which opens the way for solving the original multicriteria problem by effective numerical methods developed for solving a linear programming problem. It is concluded that it is possible to develop, on the basis of the constructed model and the availability of effective algorithms for its analysis, decision support systems for managing the development of socio-economic systems.

Keywords: socio-economic system, economic dynamics, multicriteria multistep linear programming problem, automated software package, numerical analysis, decision support system

Изучение социально-экономических систем (СЭС) требует рассмотрения множества сложных процессов в экономике – инвестиционных, производственных, финансовых, управленческих, а также учета интересов различных участников – производителей, потребителей, управленцев, инвесторов, социума и пр., и поэтому весьма затруднительно без разработки математических моделей указанных процессов в целом, а также их участников в частности. Так как функционирование СЭС происходит во времени, то его полноценное описание требует использования динамических моделей [1] или комбинации динамических и статических моделей [2, 3]. В настоящее время сохраняется значительный поток публикаций, описывающих различные методы анализа моделей СЭС [4, 5], особенности функционирования макроэкономических [6] и мезоэкономических [7] систем, содержащих краткие обзоры моделей [8], а также освещающих другие содержательные аспекты развития СЭС. Вместе с тем большинство публикаций касается отдельно либо концептуальных вопросов моделирования, либо построения различных моделей СЭС, либо алгоритмов их численного анализа, и, соответственно, имеется незначительное количество работ системного характера, например [9], в которых рассматривается весь комплекс аналитических инструментов: концепция, математические модели, методы и алгоритмы их анализа, с выходом на разработку систем поддержки принятия решений (СППР). Следует отметить, что математические модели в приведенных выше публикациях имеют ряд особенностей, зачастую затрудняющих разработку соответствующих СППР, ориентированных на оперативную экспертную поддержку оптимальных решений при управлении развитием СЭС или выявление оптимального баланса циркулирующих в них потоков. В частности, в моделях [6, 7] рассматривается динамика экономического процесса в форме системы соотношений Р. Соллоу с заранее заданной возрастающей производственной функцией (преимущественно в виде Кобба – Дугласа), не выявляющей его жизненный цикл. Динамические модели, описанные, например, в [8], не являются оптимизационными, модель [9] является примером нелинейных задач экономической динамики, в которых, вообще говоря, затруднена разработка численных алгоритмов их анализа, устойчиво работающих с ростом размерности задачи, и т.д.

Материалы и методы исследования

Системный подход к изучению развития СЭС, на наш взгляд, является наиболее целесообразным, если имеется содержательно адекватная и достаточно универсальная общая модель СЭС, которая может быть подвергнута сбалансированному по скорости и точности расчетов численному анализу в условиях практически значимых размерностей. Это предполагает, в свою очередь, исследование теоретических вопросов доказательства существования решения задачи и тем самым обоснования возможности и целесообразности разработки СППР. В работе [3] описан комплекс инструментов (подход, модели, алгоритмы и системы поддержки принятия решений по управлению развитием СЭС), учитывающий перечисленные недостатки и явившийся результатом исследований, проводимых в Сибирском государственном университете науки и технологий (г. Красноярск) и Российском экономическом университете (Кемеровский институт) в течение 2005–2021 гг.

Развитие информационных технологий, очевидно, актуализирует разработку СППР в процессе управления сложными СЭС, что, в свою очередь, стимулирует разработку моделей и алгоритмов их численного анализа, сбалансированный комплекс которых может лежать в основе СППР, востребованных конечными пользователями. Ниже рассматриваются сформулированные в рамках концепции работ [2, 3] содержательная постановка задачи и новая математическая модель оптимального управления функционированием СЭС в форме многошаговой задачи линейного программирования (МЗЛП) вида

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) - s(t);\ x(0) = a,$$

$$C(t)x(t) + D(t)u(t) \le h(t);\ u_l(t) \ge 0;$$

$$J_P = \sum_{t=0}^{T^0-1} [(a(t), x(t)) + (b(t), u(t))] +$$

$$+(a(T^0), x(T^0)) \to max,$$

где $u(t) = [u_l(t)]$ и $x(t) = [x_i(t)]$ – управляющий и фазовый векторы соответственно; $A(t) = [a_{ij}(t)]$; $B(t) = [b_{il}(t)]$; $C(t) = [c_{kj}(t)]$; $D(t) = [d_{kl}(t)]$; $a = [a_i]$; $s(t) = [s_i(t)]$; $h(t) = [h_k(t)]$; $a(t) = [a_i(t)]$; $b(t) = [b_l(t)]$; $(i,\ j = 1,...n;\ l = 1,...r_t;\ k = 1,...m_t;\ t = 0,...T^0)$; r_t, m_t и T^0 – размерность вектора $u(t)$, количество ограничений и шагов соответственно; $(\cdot,\cdot)$ – операция скалярного произведения векторов. МЗЛП может решаться с помощью алгоритмов, основанных на оптимизационных принципах Беллмана и Понтрягина, с помощью методов теории дифференциальных игр [4]. Применяя к представленной МЗЛП z-преобразование, ее можно привести к соответствующей задаче линейного программирования (ЗЛП) как на бесконечном [2], так и на конечном [5] горизонтах планирования, причем полученная ЗЛП сохраняет ряд фундаментальных свойств исходной динамической задачи, с одной стороны, а с другой – позволяет разрабатывать эффективные алгоритмы ее теоретического и численного анализа [3]. В работе [10] изложен алгоритм численного решения МЗЛП симплекс-методом путем перехода к эквивалентной ЗЛП большой размерности.

Охарактеризуем социально-экономическое содержание решаемой задачи. Пусть в территориально-производственной системе рассматривается инвестиционно-производственный проект (ИПП), в котором предполагается производство продукции (товаров и/или услуг) n видов с заданными рыночными ценами ее единицы и стоимостными оценками спроса, причем каждый вид продукции, в соответствии с принципом чистых отраслей, производится с использованием

n комплектов основных производственных фондов (КОПФ) заданной стоимости, сроков полезного использования и производительности. Проект реализуется в несколько этапов: начальный, инвестиционный, инвестиционно-производственный и производственный (постинвестиционный). Указанная система функционирует в условиях, связанных с ограниченностью используемых ресурсов инвестиционного, производственного, финансового, социального характера. Необходимо определить (как в целом, так и по отдельным видам продукции) оптимальные суммы инвестиций, объемы производимой продукции каждого вида, а также режимы финансирования процессов в СЭС, при которых максимизируется дисконтированная добавленная стоимость рассматриваемого проекта на заданном горизонте планирования. В качестве экономических агентов СЭС, как правило, выступают разнообразные производственные и территориально-производственные структуры (предприятия, территории, их объединения в форме корпораций, холдингов, отраслей, кластеров и пр.), а также социум и региональный управляющий (налоговый) центр. При взаимодействии указанных экономических агентов возникает конфликт интересов, обусловленный тем, что в рыночной экономике целью производственных структур является максимизация прибыли или другого показателя качества экономической деятельности, тогда как основная экономическая цель управляющего центра – максимизация налоговых поступлений в бюджет от деятельности производителя, а социума – увеличение своего благосостояния, экономической основой которого является оплата его труда, которые, в свою очередь, снижают прибыль производителя. Иначе говоря, так как доходы одних агентов являются расходами других, многокритериальное принятие управленческих решений является необходимым даже в относительно простом случае двух или трех участников соответствующего процесса. Помимо этого, в социально-экономических процессах существенными, определяющими направление их развития, становятся такие факторы, как необходимость достаточной для обеспечения комфортной жизни социума сохранности окружающей природной среды и планеты в целом. Сложность рассматриваемой глобальной задачи и заставляет исследователей разрабатывать математические модели, эффективные алгоритмы их анализа и программно-аналитические комплексы поддержки принятия инвестиционных, производственных и финансовых решений при управлении СЭС [3, 11].

Результаты исследования и их обсуждение

Приведем результаты формализации описанной выше задачи оптимального управления СЭС, состоящей из производственно-территориальной системы и налогового центра (НЦ). Здесь и далее (если не указано особо) счетчик k пробегает значения от 1 до n или, иначе, $k = 1,\dots,n$. Пусть $u_k(t)$ $(t = T^2,\dots,T\text{-}1)$, $u_{n+k}(t)$ $(t = T^2,\dots,T\text{-}1)$, $u_{2n+1}(t)$ $(t = 0,\dots,T\text{-}1)$, $u_{2n+2}(t)$ $(t = 0)$ – соответственно стоимость приобретаемых КОПФ и выручка от продажи продукции k-го вида, кредиты и дотации на обеспечение проекта функционирования СЭС; $x_k(t)$, $x_{n+1}(t)$ $x_{n+2}(t)$ $x_{n+3}(t)$ $(t = 0,\dots,T)$ – соответственно накопленная стоимость КОПФ k-го вида, остаточная стоимость всех КОПФ, текущие денежные средства предприятия и накопленные суммы кредитов в момент t; $P_k(t)$, $V_k(t)$, $T_k(t)$, $c_k(t)$, $\delta_k(t) = P_k(t)V_k(t)/c_k(t)$ $(t = 1,\dots,T)$ – соответственно рыночная цена единицы продукции, производительность, срок полезного использования, стоимость, фондоотдача КОПФ k-го вида в моменты t; $q_k(t + 1)$ $(t = T^2,\dots,T\text{-}1)$ – прогнозный спрос на продукцию k-го вида в стоимостном выражении для момента t+1; I_0, K_0, D_0 – соответственно максимальные суммы инвестиций, кредитов и дотаций, выделяемых на весь срок действия ИПП; α_i $(I = 1,\dots,5)$ – соответственно ставки налогов на добавленную стоимость (НДС), на имущество (НИ), на прибыль (НП), взноса в страховые социальные фонды, а также определяемая спецификой проекта совокупная ставка других налоговых и неналоговых затрат; $\beta_k(t)$ – доля общепроизводственных затрат, выделяемая на фонд оплаты труда (ФОТ) при производстве продукции k-го вида в момент t; $p_k(t)$ – доля общепроизводственных затрат, относимая на оборотные затраты при производстве продукции k-го вида в момент t; T^1, T^2, T $(1 \le T^2 \le T^1 \le T)$ – соответственно моменты завершения инвестиций, начала производства и срок действия ИПП; r_1, r_2, $r_{ср}$, r_0 – годовые ставки дисконтирования потоков ИПП в периоды установки оборудования (строительства), производства и кредита соответственно; δ $(0 \le \delta \le 1)$ – экспертно определяемая доля остаточной стоимости всех КОПФ от ее балансовой стоимости на момент $t = T$. Математическая модель сформулированной задачи описывается следующей системой соотношений:

$$x_k(t+1) = x_k(t) + u_k(t) \ \ (k = 1,\dots,n; t = 0,\dots,T-1), \quad (1)$$

$$x_{n+1}(t+1) = x_{n+1}(t) + \sum_{k=1}^{n} u_k(t) \ \ (t = 0,...,T^2 - 1), \tag{2}$$

$$x_{n+1}(t+1) = -\sum_{k=1}^{n} x_k(t) / T_k + x_{n+1}(t) + \sum_{k=1}^{n} u_k(t) \ (t = T^2,...,T-1), \tag{3}$$

$$x_{n+2}(t+1) = x_{n+2}(t) - \sum_{k=1}^{n} u_k(t) + u_{2n+1}(t) + u_{2n+2}(t) + I_0 \ (t = 0), \tag{4}$$

$$x_{n+2}(t+1) = x_{n+2}(t) - \sum_{k=1}^{n} u_k(t) + u_{2n+1}(t) \ (t = 1,...,T^2 - 1), \tag{5}$$

$$x_{n+2}(t+1) = -\sum_{k=1}^{n} \theta_{1k}(t) x_k(t) / T_k + x_{n+2}(t) - \sum_{k=1}^{n} u_k(t) + \sum_{k=1}^{n} \theta_{2k}(t) u_{n+k}(t) + u_{2n+1}(t) \ (t = T^2,...,T^1 - 1), \tag{6}$$

$$x_{n+2}(t+1) = -\sum_{k=1}^{n} \theta_{1k}(t) x_k(t) / T_k + x_{n+2}(t) + \sum_{k=1}^{n} \theta_{2k}(t) u_{n+k}(t) + u_{2n+1}(t) \ (t = T^1,...,T-1), \tag{7}$$

$$x_{n+3}(t+1) = x_{n+3}(t) + u_{2n+1}(t) \ (t = 0,...,T^1 - 1), \tag{8}$$

$$x_{n+3}(t+1) = x_{n+3}(t) \ (t = T^1,...,T-1), \tag{9}$$

$$x_k(0) = 0 \ (k = 1,...,n+3), \tag{10}$$

$$x_{n+2}(t) \ge 0 \ (t = 1,...,T), \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(T^1) \le I_0, \tag{12}$$

$$x_{n+3}(T-1) \le K_0, \tag{13}$$

$$u_{n+k}(t) \le q_k(t+1) \ \ (k = 1,...,n; t = T^2,...,T-1), \tag{14}$$

$$u_{n+k}(t) \le \delta_k x_k(t) \ \ (k = 1,...,n; t = T^2,...,T-1), \tag{15}$$

$$u_{2n+2}(0) \le D_0, \tag{16}$$

$$u_k(t) \ge 0 \ (k = 1,...,n; t = 0,...,T-1), \ u_{n+k}(t) \ge 0 \ \ (k = 1,...,n; \ t = T^2,...,T-1), \tag{17}$$

$$u_{2n+1}(t) \ge 0 \ (t = 0,...,T-1), \ u_{2n+2}(t) \ge 0 \ (t = 0), \tag{18}$$

$$J_1 = \sum_{t=T^2}^{T-1} \frac{-\sum_{k=1}^{n} \theta_{1k}(t) x_k(t) / T_k + \sum_{k=1}^{n} \theta_{2k}(t) u_{n+k}(t) / T_k}{(1+r_2)^t} + \frac{\delta x_{n+1}(T)}{(1+r_2)^t} -$$

$$+ \sum_{t=0}^{T^1-1} \frac{u_k(t)}{(1+r_1)^t} - r_0 \frac{12T+1}{24} x_{n+3}(T) - u_{2n+2}(0) \to max, \tag{19}$$

$$J_2 = \sum_{t=1}^{T-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\varepsilon_{1k}(t)x_k(t)+\eta_{1k}(t)u_{n+k}(t)\right)+\sum_{t=T^2}^{T-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\varepsilon_{2k}(t)x_k(t)+\eta_{2k}(t)u_{n+k}(t)\right)\to max, \quad (20)$$

где J_1, J_2 – соответственно дисконтированные суммы собственных средств производителя и НЦ,

$$\varepsilon_{1k}(t)=\frac{\alpha_2-\alpha_4\beta_k(t)\theta_{1k}(t)}{T_k\left(1+r_{cp}\right)^t},\quad \varepsilon_{2k}(t)=\frac{\alpha_2-\alpha_4\beta_k(t)\theta_{1k}(t)}{T_k\left(1+r_{cp}\right)^t}-\frac{\alpha_3\theta_{1k}(t)}{T_k\left(1+r_2\right)^t};$$

$$\eta_{1k}(t)=\frac{\alpha_4\beta_k(t)\left(\theta_{2k}(t)-1\right)}{T_k\left(1+r_{cp}\right)^t},\quad \eta_{2k}(t)=\frac{\alpha_4\beta_k(t)\left(\theta_{2k}(t)-1\right)}{T_k\left(1+r_{cp}\right)^t}+\frac{\alpha_1+\alpha_3\theta_{1k}(t)+\alpha_5}{T_k\left(1+r_2\right)^t};$$

$$\theta_{1k}(t)=\frac{1+\alpha_2}{1-\beta_k(t)\left(1+\alpha_4\right)-p_k(t)},\quad \theta_{2k}(t)=1-\frac{\alpha_1+\alpha_5}{1-\beta_k(t)\left(1+\alpha_4\right)-p_k(t)}.$$

Рассмотрим содержательный смысл соотношений в модели (1)–(20). Уравнения (1) описывают динамику накопленной стоимости КОПФ каждого из n видов, (2), (3) – динамику суммарной остаточной стоимости всех КОПФ соответственно на допроизводственной и производственной стадиях ИПП, (4)–(7) – уравнения движения текущих денежных средств производителя в момент $t = 0$, на допроизводственной стадии, на стадии производства с доинвестированием (реинвестированием) и на постинвестиционной стадии ИПП соответственно; (8), (9) – накопленные суммы кредитов на допроизводственной и производственной стадиях; (10) – начальные условия на фазовые переменные. Неравенства (11) отражают требования неотрицательности финансовых средств ИПП на всем горизонте планирования, (12) – ограничения на сумму инвестиций в производство всех видов продукции в момент $t = T^1$, (13) – ограничение суммы кредитов на финансирование текущего производства на момент окончания ИПП, (14) – требования непревышения выручки от продажи продукции k-го вида верхней оценкой стоимостного спроса на нее в период производства, (15) – условия непревышения выручки от продажи продукции k-го вида производственных мощностей в период производства, (16) – ограниченность объема осуществленных дотаций в начальный момент реализации ИПП; (17)–(18) – суть содержательно естественные условия неотрицательности управляющих переменных. Условие (19) – критерий J_1 производителя в СЭС отражает сальдо суммы дисконтированных потоков прибыли плюс остаточная стоимость КОПФ в последний момент реализации ИПП (по ставке r_2) и, соответственно, вложенных инвестиций (по ставке r_1) с учетом осуществленных в начальный момент дотаций и платы за кредитный ресурс на всем горизонте планирования. Условие (20) – критерий J_2 управляющего налогового центра в СЭС представляет собой дисконтированные суммы налоговых и неналоговых сборов в допроизводственный период (по ставке $r_{ср} = (r_1 + r_2)/2$) и в производственный период до окончания проекта (по ставкам r_2 и $r_{ср}$). Отметим, что, в отличие от ранее опубликованных динамических моделей СЭС [2, 3], в представленной модели источники финансирования ИПП разделены на две части – стратегическую (инвестиции) и тактическую (кредитование текущей производственной деятельности). Это предопределило некоторую смену трактовки как управляющих, так и фазовых переменных задачи, по сравнению с указанными моделями. В частности, управляющая переменная $u_{2n+1}(t)$ содержит информацию об оптимальных размерах кредитов в момент t реализации ИПП, а переменная $x_{n+3}(t)$ – о накопленных в течение горизонта планирования T суммах кредитных средств. В модели (1)–(20) содержательно рассматривается динамика основных циркулирующих в СЭС экономических потоков – инвестиционного, производственного и финансового, которые формируются по правилам бухгалтерского учета через основные характеристики производимой продукции, производственных и финансовых активов. Модель (1)–(20) учитывает закон убывающей во времени стоимости финансового ресурса, в ней рассматриваются различные способы финансирования проектов (собственный и заемный капитал, кредитование, дотирование и пр.). Производственная функция является алгоритмически вычисляемой и способна отражать жизненный цикл развития СЭС. Нетрудно проверить факт, что нулевой управляющий вектор $O_{(2n+2)\times 1}$ является частным решением задачи, описываемой соотношениями и условиями (1)–(20), а множество ее допустимых решений является компактом, что гарантирует существование решения указанной задачи для всех допустимых значений входящих в нее параметров. Согласно [12, 13], двухкритериальная МЗЛП (1)–(20) может быть сведена к эквивалентной однокритериальной линейной задаче с теми же ограничениями и максимизацией выпуклой линейной комбинации критериев $J(\mu) = \mu_1 J_1 + \mu_2 J_2$, где $\mu = \{(\mu_1;\mu_2) : \mu_i > 0\ (i = 1,2); \mu_1 + \mu_2 = 1\} \in E^2$, E^2 – двумерное евклидово пространство. Учитывая, что система (1) является математическим аналогом предложенных в работах [2, 3] динамических моделей СЭС, с вышеуказанными отличиями в содержательном смысле управляющих и фазовых переменных, наличие ее нетривиальных решений может быть проверено с использованием подробно описанного в [3] программного комплекса «Линейная динамика», позволяющего проводить полный параметрический анализ МЗЛП.

Заключение

Динамическая модель (1)–(20) отражает стратегические интересы и оптимальные инвестиционные, производственные и финансовые потоки основных участников проектов развития СЭС и, вместе с эффективными алгоритмами ее анализа, может явиться теоретически и численно сбалансированным инструментарием разработки автоматизированных систем поддержки принятия решений (в том числе оперативных) при управлении сложными социально-экономическими объектами.

Список литературы

1. Форрестер Дж. Мировая динамика. СПб.: ООО «Изд-во АСТ», 2003. 384 с.

2. Медведев А.В. Применение Z-преобразования к исследованию многокритериальных линейных моделей регионального экономического развития: монография. Красноярск: Сибирский государственный аэрокосмический университет им. акад. М.Ф. Решетнева, 2008. 228 с.

3. Медведев А.В. Автоматизированная поддержка принятия оптимальных решений в инвестиционно-производственных проектах развития социально-экономических систем. М.: Издательский Дом «Академия Естествознания», 2020. 200 с. DOI: 10.17513/np.421.

4. Угольницкий Г.А. Методология и прикладные задачи управления устойчивым развитием активных систем // Проблемы управления. 2019. № 2. С. 19–29.

5. Победаш П.Н., Семенкин Е.С. Модели оптимального управления и операционного исчисления для многокритериального анализа экономических систем: монография. Красноярск: СФУ, 2012. 258 с.

6. Акаев А.А., Садовничий В.А. К вопросу о выборе математических моделей для описания динамики цифровой экономики // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 743–752. DOI: 10.1134/S0374064119050145.

7. Кутышкин А.В. Моделирование динамики валового регионального продукта // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2021. Т. 21. № 2. С. 104–113.

8. Звягин Л.С. Математические модели активного управления социально-экономическими системами // Мягкие измерения и вычисления. 2020. Т. 34. № 9. С. 5–20.

9. Гурман В.И., Матвеев Г.А., Трушкова Е.А. Социо-эколого-экономическая модель региона в параллельных вычислениях // Управление большими системами: сборник трудов. 2011. № 32. С. 109–130.

10. Медведев А.В., Победаш П.Н., Рапп Е.Ю., Краmаренко В.А. Автоматизированная система поддержки принятия решений на основе оптимизационных линейных моделей экономической динамики // Современные наукоемкие технологии. 2019. № 10–2. С. 280–284.

11. Медведев А.В., Победаш П.Н. Оптимизационный подход к изучению систем экономической динамики / В кн. Императивы бизнеса. Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, Кемеровский институт (филиал). Кемерово, 2017. С.195–216.

12. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. 2-е изд., испр. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 256 с.

13. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация: теория, вычисления, приложения. М.: Наука, 1982. 600 с.