

УДК 510.644:550.8.05

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Мотрюк Е.Н., Шилова С.В.

*ФГБОУ ВО «Ухтинский государственный технический университет»,
Ухта, e-mail: kmotryuk@yandex.ru*

Тектонические движения, образование и развитие складчатых и разрывных структур, зон трещиноватости, зон подготовки землетрясений, формирование ряда месторождений в значительной степени обусловлены напряженно-деформированным состоянием коры. Сейчас, когда сокращается фонд перспективных положительных структур в традиционных нефтегазодобывающих районах, возникает интерес к неантиклинальным ловушкам, с которыми могут быть связаны средние и малые месторождения нефти и газа. В связи с этим использование математического моделирования напряженно-деформированного состояния пород в массиве позволяет выявить динамические ловушки, зоны растяжения, в которых при благоприятных условиях может произойти образование залежи углеводородов. Одним из применяемых в этом случае методов является метод конечных элементов. В работе представлен алгоритм, позволяющий моделировать напряженно-деформированное состояние массива горных пород с помощью метода конечных элементов. Описано решение упруго-пластической задачи для двумерного случая. Применен метод к задачам поиска месторождений нефти и газа для определения напряженно-деформированного состояния изучаемого массива в целях дальнейшего прогнозирования зон растяжения и сжатия. Таким образом, при хорошей геофизической изученности, при существующих признаках неотектонических движений исследуемого района возможно моделирование механизмов, сопровождающих процессы растяжения с разрывными нарушениями коры и литосферы.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, метод конечных элементов, напряжение, перемещение, деформация

MODELING THE STRESS-DEFORMED STATE OF ROCK MASS WITH THE USE OF THE FINITE ELEMENT METHOD

Motryuk E.N., Shilova S.V.

*Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Ukhta State Technical University»,
Ukhta, e-mail: kmotryuk@yandex.ru*

Tectonic movements, the formation and development of folded and fractured structures, fracture zones, earthquake preparation zones, the formation of a number of deposits are largely due to the stress-strain state of the crust. Now, when the pool of promising positive structures in traditional oil and gas producing regions is shrinking, there is an interest in non-anticlinal traps, which may be associated with medium and small oil and gas fields. In this regard, the use of mathematical modeling of the stress-strain state of rocks in the massif makes it possible to identify dynamic traps, tension zones, under favorable conditions, in which the formation of hydrocarbon deposits can occur. One of the methods used in this case is the finite element method. The paper presents an algorithm that allows modeling the stress-strain state of a rock mass using the finite element method. The solution of the elastic-plastic problem for the two-dimensional case is described. Application of the method to the problems of searching for oil and gas fields to determine the stress-strain state of the studied massif for further forecasting of zones of tension and compression. Thus, with good geophysical knowledge, with the existing signs of neotectonic movements in the study area, it is possible to model the mechanisms accompanying the extension processes with rupture of the crust and lithosphere.

Keywords: Stress-strain state, finite element method, stress, displacement, deformation

Тектонические движения, образование и развитие складчатых и разрывных структур, зон трещиноватости, зон подготовки землетрясений, формирование ряда месторождений в значительной степени обусловлены напряженно-деформированным состоянием коры. Способствующие этому процессы сжатия, растяжения земной поверхности в настоящее время активно изучаются в области решения краевых задач упругости, вязко-упругости, упруго-пластичности для выяснения динамических условий формирования месторождений полезных ископаемых. Сейчас, когда сокращается фонд

перспективных положительных структур в традиционных нефтегазодобывающих районах, возникает интерес к неантиклинальным ловушкам, с которыми могут быть связаны средние и малые месторождения нефти и газа. В связи с этим использование математического моделирования напряженно-деформированного состояния пород в массиве позволяет выявить динамические ловушки, зоны растяжения, в которых при благоприятных условиях может произойти образование залежи углеводородов. Одним из применяемых в этом случае методов является метод конечных элементов.

Цель исследования – разработка алгоритма моделирования напряженно-деформированного состояния массива горных пород с помощью метода конечных элементов [1, 2] для последующего прогнозирования зон растяжения и сжатия.

Материалы и методы исследования

Метод конечных элементов в настоящее время активно используется для решения различных инженерных задач, таких как: строительство, гидро- и аэродинамика, горное дело и новейшая техника и т.д.

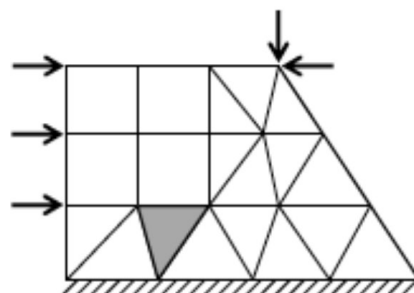
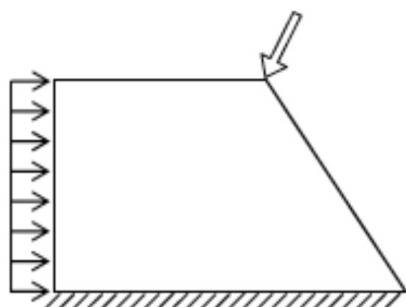
В данном методе реальная континуальная среда заменяется ее дискретной моделью, при этом применяются вариационные принципы, а дифференциальные уравнения представляются системой алгебраических уравнений, которая решается любым из известных численных методов.

Конечные подобласти, на которые разбивается рассматриваемая область (одно-, двух- или трехмерная), называются конечными элементами [3] (рис. 1а, 1б).

Наибольшее распространение получил метод конечных элементов в перемеще-

ниях узловых точек дискретной схемы, напряжения уходят на второй план.

Приведем упрощенный вариант *упруго-пластической задачи для двумерного случая*. Деформация – это изменение или формы, или размеров, или объема тела. При *упругих деформациях* после действия на тело внешних сил изменение полностью исчезает, при *пластических деформациях* они сохраняются и после того, как внешние силы перестали действовать [4]. Рассмотрим часть тела, определенную двумерной областью D . S^σ – граница области, где приложены силы, S_u – граница, где тело зафиксировано в пространстве, γ – вектор, направленный по нормали к границе наружу, X, Y – объемные силы, действующие на тело (рис. 2). При исследовании механизма деформирования блока или процесса образования разрыва при характерных размерах порядка 10^2 км целесообразно использовать *модель пластины*. Необходимо определить значения относительных деформаций ϵ_x, ϵ_y и двух нормальных и касательного напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ вдоль соответствующих осей. Пусть вектор $\{f\} = [u, v]^T$ – вектор перемещений рассматриваемой точки области D .



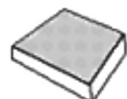
а)

Физическое
тело

Конечно-
элементная
идеализация



пластины



Физическое
тело

Конечно-
элементная
идеализация



твердые
тела



б)

Рис. 1. Разбиение области на конечные элементы

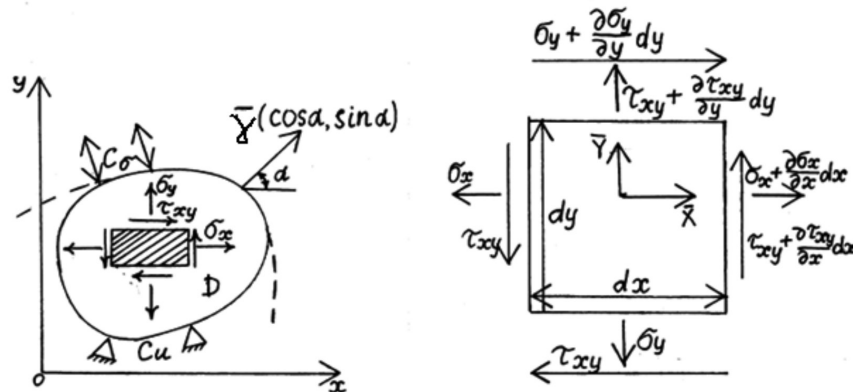


Рис. 2. Упруго-пластическая задача

При изучении кратковременных процессов в ряде случаев естественно учитывать упругие, а при изучении длительных процессов – временные, реологические свойства вещества. Рассмотрим состояние тела при произвольной нагрузке. Выпишем необходимые дифференциальные уравнения, выражающие состояния объекта, происходящие в области малых деформаций.

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \bar{Y} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где силы обусловлены, например, градиентом температуры, гравитацией и т.п.

Зависимости между деформациями и перемещениями

Условия совместности деформаций и перемещений называются соотношениями Коши:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2)$$

γ_{xy} – деформация сдвига.

Уравнение состояния для упругих компонент – обобщенный закон Гука

Наращивание деформаций в твердых телах прямо пропорционально наращиванию напряжения:

$$\epsilon_x^{el} = \frac{1}{E'} (\sigma_x - \nu' \sigma_y),$$

$$\epsilon_y^{el} = \frac{1}{E'} (\sigma_y - \nu' \sigma_x), \quad (3)$$

$$\gamma_{xy}^{el} = \frac{\tau_{xy}}{G},$$

где ϵ_x^{el} , ϵ_y^{el} – относительные деформации вдоль соответствующих осей;

γ_{xy}^{el} – угловое перемещение;

$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$ – модуль Юнга;

ν – коэффициент Пуассона;

$\nu' = \frac{\nu}{1 - \nu}$ – абсолютная величина отношения поперечной и продольной относительной деформации образца материала. Данный коэффициент несет информацию о природе материала, из которого изготовлен образец;

$G = \frac{E'}{2(1 + \nu')}$ – модуль сдвига.

Уравнения состояния для пластических компонент

Согласно деформационной теории пластичности:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_x^{pl}}{\sigma'_x} = \frac{\epsilon_y^{pl}}{\sigma'_y} = \frac{\gamma_{xy}^{pl}}{\tau'_{xy}} &= \varphi, \\ \varphi &= \frac{3}{2} \frac{\bar{\epsilon}^{pl}}{\bar{\sigma}}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sigma'_x = \sigma_x - p;$$

$$\sigma'_y = \sigma_y - p;$$

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} - p;$$

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \text{ – гидростатическое давление;}$$

$\bar{\sigma}$ – эквивалентное напряжение, $\bar{\sigma} = \sqrt{3} \sigma_T$;
 σ_T – предел текучести при сдвиге.

Условия текучести Мизеса

Предельные значения проявления пластических свойств будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{3}\bar{\sigma}^2 = \sigma_T^2 = \frac{1}{2}(\sigma'_X{}^2 + \sigma'_Y{}^2 + 2\tau'_{XY}{}^2) = \frac{1}{4}(\sigma_X - \sigma_Y)^2 + \tau_{XY}^2, \quad (5)$$

$$\frac{3}{2}(\bar{\epsilon}^{pl})^2 = (\epsilon_X^{pl})^2 + (\epsilon_Y^{pl})^2 + (\gamma_{XY}^{pl})^2. \quad (5')$$

Общая деформация

Сложение компонент пластической и упругой деформации:

$$\begin{aligned} \epsilon_X &= \epsilon_X^{pl} + \epsilon_X^{el}, \\ \epsilon_Y &= \epsilon_Y^{pl} + \epsilon_Y^{el}, \\ \gamma_{XY} &= \gamma_{XY}^{pl} + \gamma_{XY}^{el}. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия:

А) геометрические, на C_u :

$$u = \bar{u}, v = \bar{v}; \quad (7)$$

В) силовые, на C_σ :

$$\begin{aligned} X_v &= \bar{X}_v, \\ Y_v &= \bar{Y}_v, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} X_v &= \sigma_X \cos \alpha + \tau_{XY} \sin \alpha, \\ Y_v &= \sigma_Y \sin \alpha + \tau_{XY} \cos \alpha. \end{aligned}$$

**Результаты исследования
и их обсуждение**

В двумерной области D с границей C уравнения равновесия (1) и механические граничные условия (8), (7) можно преобразовать при помощи вспомогательных условий совместности (2), (4), (5). Используем условие минимума полной потенциальной энергии системы (принцип Лагранжа). Тогда принцип виртуальной работы в приращениях будет иметь вид [5]:

$$\begin{aligned} \delta W - \delta \Pi - \delta A_T &= \iint_D (dX \delta d\epsilon_X + d\bar{Y} \delta d\epsilon_Y + d\tau_{XY} \delta d\gamma_{XY}) t dx dy - \\ &- \iint_D (d\bar{X} \delta du + d\bar{Y} \delta dv) t dx dy - \int_{C_\sigma} (d\bar{X}_v \delta du + d\bar{Y}_v \delta dv) t ds = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где t – толщина рассматриваемой пластины;

δW – элементарная энергия деформации;

$\delta \Pi$ – элементарная потенциальная энергия;

δA_T – элементарная работа приложенных сил;

ds – элемент длины на границе области;

$\delta du, \delta dv$ – виртуальные перемещения, удовлетворяющие (2) и нулевые на C_u .

Применим дискретизацию пространства, т.е. рассматриваемую область D разобьем на ограниченное число треугольных элементов (рис. 3) и введем допущения о распределении перемещений внутри каждого элемента.

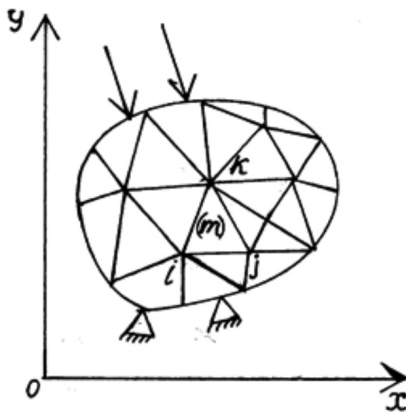


Рис. 3. Аппроксимация области конечными элементами

Имеем:

$\{d\delta\}_{(m)} = N \cdot \{d\delta\}_{(m)}$ – приращение перемещения в одном конечном элементе (m);
 N – матрица дифференцирования функций перемещений,

$$\{d\delta\}_{(m)}^T = [du_i, dv_i, du_j, dv_j, du_k, dv_k],$$

$$\{d\epsilon\} = B \cdot \{d\delta\}_{(m)} = [d\epsilon_x, d\epsilon_y, d\gamma_{xy}], \quad (10)$$

$$\{d\sigma\} = D \cdot (\{d\epsilon\} - \{d\epsilon_0\}),$$

B – матрица функций перемещений;

$\{d\delta\}_{(m)}^T$ – вектор узловых перемещений элемента (m);

$\{d\epsilon_0\}$ – начальная деформация;

D – матрица связи напряжений и деформаций.

Тогда принцип виртуальной работы можно выразить уравнением:

$$\begin{aligned} \{dF\}_{(m)} &= K_{(m)} \cdot \{d\delta\}_{(m)} + \\ &+ \{dF_{\epsilon_0}\}_{(m)} + \{dF_{pl}\}_{(m)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $K_{(m)} = \iint B^T \cdot D \cdot B \cdot t dx dy$ – матрица жесткости, связывающая приращения нагрузки dF с приращениями узловых перемещений:

$$\{dF_{\epsilon_0}\}_{(m)} = - \iint B^T \cdot D \cdot \{d\epsilon_0\} t dx dy,$$

$$\{dF_{pl}\}_{(m)} = - \iint N^T \cdot [d\bar{X}, d\bar{Y}]^T t dx dy.$$

Определяя зависимости (11) по всем элементам и используя условие непрерывности напряжения в узлах и условия равновесия сил, составим систему уравнений для всей конструкции. Определим

решения в узлах путем решения системы линейных уравнений для заданных граничных условий, а перемещения, деформации и напряжения внутри элементов вычислим по (10) [6].

Опишем кратко алгоритм решения задачи.

1. В начале i -го шага вычисляем матрицу жесткости, входящую в (11), для упругих элементов.

2. Далее, чтобы в элементе (m) возникла текучесть, необходимо, чтобы приращение нагрузки было $r_m \{dF\}$, где r_m – коэффициент относительной нагрузки, при котором эквивалентное напряжение становится равным пределу текучести (выражение в правой части (5)). Этот коэффициент находится для всех упругих элементов.

3. Упругий элемент с минимальным значением r_m становится элементом, текучесть которого наступает на i -м шаге.

4. Напряжения и деформации после этого шага определяются в виде:

$$F_i = F_{i-1} + dF, \sigma_i = \sigma_{i-1} + d\sigma,$$

$$\delta_i = \delta_{i-1} + d\delta, \epsilon_i = \epsilon_{i-1} + d\epsilon,$$

где индекс соответствует шагу приращения нагрузки.

5. Решение задачи получается путем итераций, пока не будет достигнута заданная нагрузка.

Для реализации алгоритма необходимо применять системы автоматизированного проектирования, которые используют численные методы расчета полевых и сложных инженерных задач, сводящиеся к приближенному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Наибольшее применение получили программные продукты, использующие метод конечных элементов: Maxwell EM, ANSYS, EMS, FLUX 2D и FLUX 3D, MagNet, Magneto, FEA, ELCUT и др.

Выводы

Разработан алгоритм, позволяющий моделировать напряженно-деформированное состояние массива горных пород с помощью метода конечных элементов для двумерного случая. При этом, имея достаточный уровень геофизической изученности, при существующих признаках неотектонических движений исследуемого района возможно моделировать механизмы, сопровождающие процессы растяжения с разрывными нарушениями коры и литосферы, что позволит выявить динамические ловушки, зоны растяжения, в которых при благоприятных условиях может произойти образование залежи углеводородов.

Список литературы

1. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
2. Жилин П.А. Рациональная механика сплошных сред: учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 584 с.
3. Малакичев А.О. Использование метода конечных элементов для изучения свойств плоских структур / Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. 2014. Т. 2. № 12–2. С. 67–73.
4. Аплеснин С.С., Чернышова Л.И., Машков П.П. Прикладная физика. Теория, задачи и тесты: учебное пособие. СПб.: Лань, 2021. 464 с.
5. Шевко Н.А. Численное моделирование залежей с высокопроводящими разломами // Нефтяное хозяйство. 2020. С. 76–87.
6. Цыцорин И.А. Методы оценки напряженно-деформированного состояния массива горных пород // Малышевыские чтения: материалы IV Всероссийской научно-практической конференции. 2019. С. 82–87.