УДК 372.8:51

СЛОЖНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРОСТОЙ СИСТЕМЫ: ОТОБРАЖЕНИЕ «СДВИГ БЕРНУЛЛИ»

Морозов А.В.

ФГБОУ ВПО «Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского», Санкт-Петербург, e-mail: vka@mil.ru

Известно, что задача о приближенном решении алгебраических и трансцендентных уравнений $f(x) = 0$ приводит к построению итерационных процедур. Одним из методов решения задачи является метод итераций, применяемый к эквивалентному уравнению $x = \varphi(x)$. Он основывается на теореме: 1) пусть функция $\varphi(x)$ – непрерывно дифференцируема в интервале локализации корня (a, b); 2) $|\varphi'(x)| < 1 \forall x \in (a,b)$. Тогда для любого $x_0 \in (a,b)$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, где $x_n = \varphi(x_{n-1}), n = 1,2,\ldots$ Причем $\xi = \varphi(\xi)$, т.е. указанная числовая последовательность сходится к корню уравнения. Из условий теоремы, в частности, вытекает, что $\varphi(x):[a,b] \to [a,b]$. Оказывается, что если отказаться от условий 1) или 2), оставив условие $\varphi(x):[a,b] \to [a,b]$, то можно наблюдать много интересных эффектов в поведении последовательности x_n. Одна из задач сравнительно новой науки, нелинейной динамики, и посвящена изучению свойств последовательностей x_n в зависимости от свойств функции $\varphi(x)$. В настоящей статье рассматривается ставший уже классическим пример такой системы, где функция $\varphi(x)$ – разрывная. По мнению автора статьи, включение в учебную программу изучение такой системы в теме вычислительной математики технического вуза целесообразно и уместно по следующим причинам: 1) неизмеримо возросла роль дискретных моделей в науке; 2) итерационные методы лежат в основе большого класса вычислительных задач; 3) открытия и значимые для теории и практики научные результаты в области фундаментальных наук, к каковым относится, например, открытие детерминированного хаоса, должны находить отражение в учебных курсах не только специальных дисциплин, но и базовых, к каковым относятся математика, физика, информатика и т.д.

Ключевые слова: отображение Бернулли, методика преподавания

COMPLEX BEHAVIOR OF A SIMPLE SYSTEM: DISPLAY «THE BERNOULLI SHIFT»

Morozov A.V.

Military Space Academy named after A.F. Mozhaiskiy, Saint Petersburg, e-mail: vka@mil.ru

It is known that the problem of approximate solution of algebraic and transcendental equations $f(x) = 0$ leads to the construction of iterative processes. One of the methods for solving the problem is the iteration method applied to the equivalent equation $x = \varphi(x)$. It is based on the theorem: 1) let the function $\varphi(x)$ be continuously differentiable in the localization interval of the root (a, b); 2) $|\varphi'(x)| < 1 \forall x \in (a,b)$. Then, for any $x_0 \in (a,b)$ exists $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, where $x_n = \varphi(x_{n-1}), n = 1,2,\ldots$. And $\xi = \varphi(\xi)$, i.e., the specified numeric sequence converges to the root of the equation. From the conditions of the theorem, in particular, it follows that $\varphi(x):[a,b] \to [a,b]$. It turns out that if we abandon the conditions 1) or 2) of the theorem, leaving only the condition $\varphi(x):[a,b] \to [a,b]$, then many interesting effects can be observed in the behavior of the sequence x_n. One of the tasks of a relatively new science is nonlinear dynamics and is devoted to the study of the properties of sequences x_n depending on the properties of the function $\varphi(x)$. In this article, we consider an example of such a system, which has already become classical, where the function $\varphi(x)$ is discontinuous. According to the author of the article, the inclusion in the curriculum of the study of such a system in the topic of computational mathematics of a technical university is appropriate for the following reasons: 1. The role of discrete models in science has increased immeasurably; 2. Iterative methods underlie a large class of computational problems; 3. Discoveries and significant scientific results for theory and practice in the field of fundamental sciences, which include, for example, the discovery of deterministic chaos should be reflected in training courses not only of special disciplines, but also basic ones, which include mathematics, physics, computer science, etc.

Keywords: Bernoulli mapping, teaching methods

В математике уже давно известны объекты (системы), обладающие, с одной стороны, простой структурой, с другой – демонстрирующие сложное поведение. Причем ощутить сложность в таких системах достаточно просто. Для первого знакомства вполне достаточно знаний школьной программы по математике и навыков проведения элементарных вычислений на компьютере. Весь спектр поведения в таких системах демонстрируется за три, четыре часа учебных занятий. Особенно важным здесь оказывается то, что в современной науке к подобным системам приковано большое внимание. Речь здесь в первую очередь идет об некоторых объектах, которые имеют вид рекуррентных формул

$$x_{k+1} = \varphi(x_k). \qquad (1)$$

При этом φ называют отображением и говорят, что (1) определяет *дискретную динамическую систему* [1–3]. В общем случае φ может быть непрерывной, разрывной, монотонно_возрастающей или убывающей, иметь точку максимума. Ясно, что если задать начальную точку x_0, то, используя формулу (1), можно построить последовательность

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots \qquad (2)$$

Числовая последовательность, построенная по такому принципу, называется итерационной. При этом (2) называют также *решением*, а соответствующее множество точек на оси $0x$ –*траекторией* динамической системы (1), выпущенной из точки x_0. Может так случиться, что последовательность (2), индуцируемая некоторой функцией φ, будет иметь вид $x_0, x_0, x_0, \ldots, x_0, \ldots$ В этом случае говорят о точке покоя системы (1) и о решении $x = x_0$ уравнения $x = \varphi(x)$. Если числа в последовательности (2) начинают периодически повторяться, например $x_1 = x^1, x_2 = x^2, \ldots, x_m = x^m, x_{m+1} = x^1$, то говорят о периодическом решении (или траектории). При этом число m называют периодом решения (соответственно траектории). Обратим внимание, что простейшие примеры рекуррентных формул вида (1) изучаются ещё в средней школе. Это хорошо знакомая из курса математики арифметическая прогрессия, задаваемая формулой $\varphi(x_k) = x_k + d$, здесь d – заданное число, называемое разностью, и геометрическая прогрессия, определяемая формулой $\varphi(x_k) = x_k \cdot q$, здесь q – число, называемое знаменателем. Конечно, простота поведения последовательностей, отвечающих этим математическим моделям, обусловлена простотой функций φ, а именно их линейностью. Более содержательный пример приводится в стандартном курсе высшей математики и связан с алгоритмом вычисления квадратного корня из числа a: пусть $\varphi(x_k) = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right)(a > 0)$. Тогда соответствующая этому отображению последовательность (2) при $k \to \infty$ будет иметь предел. Доказывается, что этим пределом будет число $\sqrt{a}$, причем этот корень можно вычислить с любой степенью точности.

Заметим, что исторически дискретные модели в математике, по всей видимости, начали появляться ещё в XIII в. Это, в частности, знаменитая последовательность Фибоначчи [4]. Существенно позднее такие объекты изучались в связи с численным решением алгебраических и трансцендентных уравнений вида $f(x) = 0$ [5, 6]. Здесь речь идет о методе касательных (Ньютона), для которого при определенных условиях на функцию f рекуррентная формула $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, где $\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, позволяла найти корень уравнения $f(x) = 0$ с любой степенью точности; методе хорд $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, где $\varphi(x_k) = x_k - \frac{(b - x_k) f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}$; простых итераций $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, где $\varphi(x_k) = x_k - \lambda f(x_k)$ и др. Некоторые из этих методов сегодня излагаются во втузах, в связи с численным решением уравнения $f(x) = 0$. Позднее обнаружилось, что численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений, например, по методу Эйлера, также сводится к вычислениям по подобным формулам [6, 7]. Кроме того, одним из эффективных современных инструментов численного исследования многомерных динамических систем является итерационный метод точечных отображений, восходящий к А. Пуанкаре [8].

Во второй половине XX в. в центр внимания ученых попали математические модели, также имеющие простую структуру вида (1), которые для некоторых φ демонстрировали весьма сложное поведение траекторий, названное впоследствии детерминированным хаосом.

Целью настоящей статьи является краткое адаптированное для студентов первого курса втуза (с небольшим количеством учебных часов) изложение одной динамической системы, именуемой в литературе сдвигом Бернулли. Предлагается этим материалом завершить тему «Численное решение конечных уравнений» курса математического анализа. Ранее подобная связка этих учебных вопросов не предлагалась. На наш взгляд, такая последовательность изложения возможна и целесообразна, так как отвечает на вопрос студенческой аудитории: «А что будет, если $\forall\varphi(x_k) \in [a, b]$, а числовая последовательность итераций (2) предела не имеет?» Ответ же на этот вопрос, как оказалось, нетривиален и послужил началом новой бурно развивающейся сегодня науки – нелинейной динамики, изучающей *нелинейные модели*, *бифуркации*, *детерминированный хаос*, *фракталы* [9, 10]. О проблемах модернизации курса математики в последнее время много говорится на конференциях, а также на страницах журнальной и монографической литературы (например, [11–13]). На наш взгляд, включение предлагаемого материала в учебную программу позволит частично заполнить существующую брешь между устоявшимся классическим втузовским курсом математики и новым научным направлением – детерминированным хаосом.

Отображение сдвиг Бернулли

Конкретизируем теперь систему

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0,1,2,\ldots$$

полагая, что φ имеет вид $\varphi(x) = \begin{cases} 2x, 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 2x-1, \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$. График φ в этом случае будет разрывным и представлен на рис. 1 [3, 9].

Здесь, как нетрудно видеть, условие $\varphi:[0,1] \to [0,1]$ выполнено и траектория, выпущенная из произвольной начальной точки $x_0 \in (0,1)$, целиком находится в интервале (0,1). При этом положений равновесия в интервале (0,1) у системы нет. Заметим, что модель можно задать кратко $x_{n+1} = 2x_n \,(mod 1), n = 0,1,2,\ldots$.

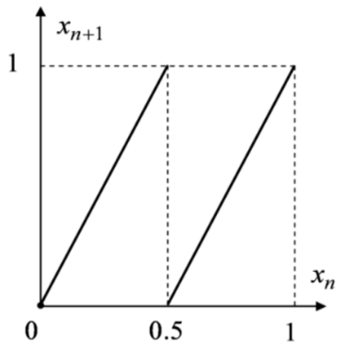

Рис. 1. График отображения φ(x)

Далее для того, чтобы выявить особенности в поведении траекторий такой системы, будем записывать ее члены не в десятичном, а в двоичном виде. На наш взгляд, переход к двоичной системе полезен и актуален в связи с цифровизацией многих технических дисциплин.

Пусть $x_0 = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_2}{2^3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2^n} + \ldots -$ начальная точка. Здесь числа a_i принимают лишь два значения: 0 или 1. Число x_0 будем при этом записывать, как обычно, в виде $x_0 = 0, a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \ldots$. Попутно заметим, что если все числа $a_i = 0$, то $x_0 = 0$; если все $a_i = 1$, то $x_0 = 1$. Если число $a_0 = 1$, то $x_0 \ge \frac{1}{2}$, если $a_0 = 0$, то $x_0 \le \frac{1}{2}$.

Вычислим последовательно $x_1 = 2x_0 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \ldots;$

$$x_2 = 2x_1 = \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \ldots + \frac{a_n}{2^{n-1}} + \ldots;\; x_3 = 2x_2 = \frac{a_3}{2} + \frac{a_4}{2^2} + \frac{a_5}{2^3} + \ldots + \frac{a_{n+1}}{2^{n-1}} + \ldots.$$

Легко видеть, что на *n*-м шаге будем иметь $x_n = \varphi^n(x_0) = 0, a_n a_{n+1} a_{n+2} \ldots$. Это свойство и оправдывает термин «сдвиг». Число x_{n+1} получается из x_n путем сдвига двоичного набора цифр числа x_n влево, при этом *цифра первого* его двоичного разряда (0 или 1) исчезает.

Рассмотрим теперь две близкие начальные точки:

$$x_0' = 0, a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n' \ldots \text{ и } x_0'' = 0, a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n'' \ldots (a_n' \ne a_n'')$$

и соответствующие траектории $\{x_n'\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{x_n''\}_{n=0}^{\infty}$. Очевидно, что разность $|x_n' - x_n''| (n = 0,1,2,\ldots) -$ представляет собой монотонно возрастающую числовую последовательность, при этом $|a_n' - a_n''| = 1$. Таким образом, если два начальных числа x_0' и x_0''

отличаются в $n + 1$ знаке после двоичной запятой, то числа $\varphi^n(x_0')$ и $\varphi^n(x_0'')$ отличаются уже в первом знаке. При этом точки $\varphi^n(x_0')$ и $\varphi^n(x_0'')$ оказываются в разных промежутках $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2},1\right)$. Это свойство траекторий называется чувствительной зависимостью от начальных данных и присуще всем динамическим системам с хаотическим поведением.

Рассмотрим теперь случай, когда x_0 – рациональное число. Здесь есть две возможности: либо число x_0 представляется конечной двоичной дробью, либо – двоичной периодической.

В случае конечной дроби $x_0 = 0,a_0a_1a_2\ldots a_{n-1}$ ясно, что $\varphi^n(x_0) = 0$ и траектория, заканчивает эволюцию в положении равновесия $x = 0$. В случае периодической дроби $x_0 = 0,(a_0a_1a_2\ldots a_{n-1})$, будем иметь $\varphi^n(x_0) = x_0$. Последнее означает, что x_0 является элементом цикла (периодической точкой траектории), при этом n – период цикла. Из проведенных рассуждений следует, что множество периодических траекторий в нашей системе бесконечно, но счетно. Это следует из того, что множество рациональных числе отрезка [0,1] счетно. Однако все периодические траектории неустойчивы, в силу чувствительной зависимости от начальных данных.

Пример 1. Цикл $X_2 = \{x^1, x^2\}$ периода 2 единственный: $x^1 = 0,(01)$, $x^2 = 0,(10)$. В десятичной форме записи числа x^1 и x^2 запишутся так

$$x^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3},\ x^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

На рис. 2 изображены графики функции $x_{n+2} = \varphi^2(x_n)$ и биссектрисы $x_{n+2} = x_n$. Абсциссы точек пересечения x^1 и x^2 этих графиков как раз и образуют цикл $X_2 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.

Заметим, что в школе и вузовском курсе математики задаче построения графиков функций $y = \varphi(\varphi(x))$, $y = \varphi(\varphi(\varphi(x))), \ldots,$ $y = \varphi(\varphi(\ldots\varphi(x)))$ внимания уделяется мало. Желательно на практике восполнить этот пробел, ибо эта задача в настоящее время является актуальной.

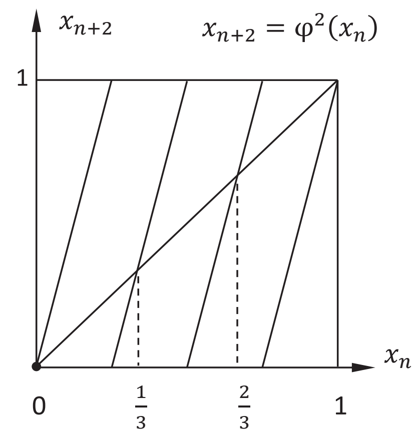

Рис. 2. График второй итерации

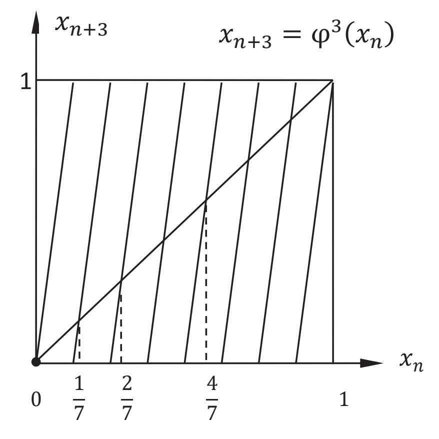

Рис. 3. График третьей итерации

Рассмотрим теперь цикл периода n: $X_n = \{x^1, x^2, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots x^n\}$.

Здесь $x^1 = 0,(a_1a_2\ldots a_n)$, $x^2 = 0,(a_2a_3\ldots a_na_1)$,…, т.е. цифры числа x^{k+1} представляют собой круговую перестановку цифр числа x^k: $x^{k+1} = 0,(a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_n\ldots a_k)$.

Выведем полезную формулу перехода от двоичной записи числа $x = 0,(a_1 a_2 \dots a_n)$ к десятичной. Для этого представим x в виде

$$x = a_1 \frac{1}{2} + a_2 \frac{1}{4} + \dots + a_n \frac{1}{2^n} + a_1 \frac{1}{2^{n+1}} + a_2 \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + a_n \frac{1}{2^{2n}} +$$

$$+ a_1 \frac{1}{2^{2n+1}} + a_2 \frac{1}{2^{2n+2}} + \dots + a_n \frac{1}{2^{3n}} + \dots =$$

$$= a_1 \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} + \dots\right) + a_2 \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} + \dots\right) + \dots +$$

$$+ a_n \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} + \dots\right) = \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} + \dots\right)\left(a_1 \frac{1}{2} + a_2 \frac{1}{4} + \dots + a_n \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}\left(a_1 \frac{1}{2} + a_2 \frac{1}{4} + \dots + a_n \frac{1}{2^n}\right).$$

Откуда вытекает формула $0,(a_1 a_2 \dots a_n) = \dfrac{2^n}{2^n - 1}\left(a_1 \dfrac{1}{2} + a_2 \dfrac{1}{4} + \dots + a_n \dfrac{1}{2^n}\right).$

Пример 2. Существует два цикла X_3' и X_3'' периода 3 (рис. 3):

1. $X_3' = \{x^1, x^2, x^3\}$, здесь $x^1 = 0,(001)$, $x^2 = 0,(010)$, $x^3 = 0,(100)$.

Или в десятичной записи: $x^1 = \dfrac{1}{7}$, $x^2 = \dfrac{2}{7}$, $x^3 = \dfrac{4}{7}$.

2. $X_3'' = \{x^1, x^2, x^3\}$, здесь $x^1 = 0,(011)$, $x^2 = 0,(110)$, $x^3 = 0,(101)$.

Или $x^1 = \dfrac{8}{7}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{3}{7}$, $x^2 = \dfrac{8}{7}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{6}{7}$, $x^3 = \dfrac{8}{7}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{5}{7}$.

Пример 3. Существуют три цикла X_4', X_4'' и X_4''' с периодом 4

1. $X_4' = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$,

где $x^1 = 0,(0100)$, $x^2 = 0,(1000)$, $x^3 = 0,(0001)$, $x^4 = 0,(0010)$.

Или в десятичной записи $x^1 = \dfrac{4}{15}$, $x^2 = \dfrac{8}{15}$, $x^1 = \dfrac{1}{15}$, $x^4 = \dfrac{2}{15}$.

2. $X_4'' = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$,

где $x^1 = 0,(1001)$, $x^2 = 0,(0011)$, $x^3 = 0,(0110)$, $x^4 = 0,(1100)$.

Или в десятичной записи $x^1 = \dfrac{9}{15}$, $x^2 = \dfrac{3}{15}$, $x^1 = \dfrac{6}{15}$, $x^4 = \dfrac{12}{15}$.

3. $X_4^{'}'' = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$,

где $x^1 = 0,(1011)$, $x^2 = 0,(0111)$, $x^3 = 0,(1110)$, $x^4 = 0,(1101)$.

Или в десятичной записи $x^1 = \dfrac{11}{15}$, $x^2 = \dfrac{7}{15}$, $x^1 = \dfrac{14}{15}$, $x^4 = \dfrac{13}{15}$.

Справедливо следующее простое утверждение.

Теорема 1. Если $n > 1$ простое число, то число циклов периода n будет равно $\mu_n = \dfrac{2^n - 2}{n}$. Речь идет о циклах с наименьшим периодом.

Если же число n – не простое, то вопрос о количестве циклов является нетривиальным.

Пусть X – множество корней уравнения $\varphi^n(x) = x$. Обозначим $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ – делители числа n ($n_1 = 1$, n_m – максимальный делитель), X^n – множество периодических точек периода n $\left(X^n \subset X\right)$, X^{n_i} – множество периодических точек периода $n_i (i = 2, 3, \ldots, m)$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для числа периодических точек X^n и количества циклов μ_n периода n справедливы формулы: $X^n = X \setminus \bigcup_{i=1}^{m} X^{n_i}$, $\mu_n = \dfrac{\left|X^n\right|}{n}$.

Результаты подсчета количества циклов периода n приведены в таблице.

Циклы периода n

Период цикла n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Количество циклов μ_n	1	2	3	6	9	18	30	56	99	186	335

Дальнейшие вычисления величин $\mu_n (n > 12)$ приводят к приближенной формуле:

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \approx 2,$$

точность, которой с ростом n возрастает. Грубо говоря, количество циклов μ_n с периодом n при больших значениях n растет геометрически.

Пусть теперь $x_0 \in (0,1)$ произвольное иррациональное число. Напомним, что в иррациональном числе любая последовательность из k цифр повторяется бесконечное число раз.

Для определенности представим x_0 в виде $x_0 = 0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots a_1 a_2 \ldots a_k \ldots$ Тогда для заданного сколь угодно малого произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число $m = m(\varepsilon)$, такое, что $\left|x_0 - \varphi^m(x_0)\right| < \varepsilon$, т.е. траектория, выпущенная из начальной точки x_0, через некоторое время (через некоторое количество итерационных шагов) возвращается в ε – окрестность $S_\varepsilon(x_0)$ точки x_0. Это свойство траекторий называется *эргодичностью* [9].

Замечание

Рассмотренный в настоящей статье пример допускает обобщение. Подобным образом можно было бы рассмотреть системы $x_{n+1} = 3x_n \left(mod\, 1\right)$, $x_{n+1} = 10x_n \left(mod\, 1\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ или $x_{n+1} = mx_n \left(mod\, 1\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (m – целое). Другие примеры систем со сложным поведением траекторий можно найти, например, в работах [3, 9, 14]).

Заключение

Известно, что рабочие программы курсов математического анализа технических вузов включают изучение методов (способов) приближенного решения алгебраических и трансцендентных уравнений вид $f(x) = 0$. Здесь имеются в виду методы Ньютона, хорд, простых итераций и др. Суть всех сводится к построению некоторых итерационных процедур, позволяющих приближенно находить корень уравнения $f(x) = 0$ с любой наперед заданной степенью точности. При этом корень изначально локализован в некотором интервале (a, b). Основаны эти способы на построении в окрестности (a, b) некоторой вспомогательной функции φ, итерации которой сходят к корню. Однако, как оказалось, итерационные процессы, построенные по рекуррентной формуле $x_{n+1} = \varphi\left(x_n\right)$, $\forall \varphi\left(x_n\right) \in [a, b]$, интересны сами по себе, вне связи с задачей о решении уравнения $f(x) = 0$. Причем в настоящее время известен весьма широкий класс функций φ, для которых индуцируемая итерациями последовательность x_n ведет себя очень сложно. В этом случае говорят, что φ порождает хаотическую динамику или детерминированный хаос. Этот класс систем хорошо изучен, описан в научной литературе и уже построена достаточно полная теория. В настоящей статье мы выбрали простейший из таких примеров и считаем, что в курсе математического анализа знакомство студентов с таким сложным поведением итераций в таких системах должно найти отражение. К тому же это не займет много учебного времени, познавательный эффект будет очевидным, а сложность материала вполне по силам студенту-первокурснику.

Список литературы

1. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Лекции по нелинейной динамике. М. – Ижевск: Изд-во РХД, 2011. 516 с.

2. Аносов Д.В. Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем. М.: МЦНМО, 2010. 200 с.

3. Булекбаев Д.А., Морозов А.В. Знакомство с качественной теорией динамических систем: элементарное введение // Научное обозрение. Педагогические науки. 2021. № 5. С. 10–23.

4. Воробьёв Н.Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука. 1978. 145 с.

5. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. СПб.: Лань, 2011. 611 с.

6. Гулин А.В., Мажорова О.С., Морозова В.А. Введение в численные методы в задачах и упражнениях. М.: АРГАМАК-МЕДИА: ИНФРА-М, 2014. 368 с.

7. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ Лаборатория знаний, 2011. 352 с.

8. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: URSS, 2016. 430 с.

9. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988. 240 с.

10. Чернова Е.В. Хаос и порядок: фрактальный мир // Природа. 2015. № 5. (1197). С. 34–44.

11. Тестов В.А. Интеграция дискретности и непрерывности при формировании математической картины мира обучающихся // Интеграция образования. 2018. Т. 22. № 3. С. 480–492.

12. Далингер В.А. Фрактальная геометрия в школе // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2014. № 1–2. С. 236–237.

13. Мельников О.И. Обучение дискретной математики. М.: Издательство ЛКИ, 2019. 222 с.

14. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.