УДК 519.677

# КОМПОЗИЦИЯ МАМДАНИ В МОДЕЛЯХ НЕЧЕТКОГО АНАЛИЗА КАК НЕЧЕТКИЙ АНАЛОГ ПОДСТАНОВОК ЗАВИСИМОСТЕЙ

**Шилова С.В., Бурмистрова О.Н.**

*ФГБОУ ВО «Ухтинский государственный технический университет», Ухта, e-mail: sshilova@bk.ru*

Проблематика при прогнозировании фильтрационно-емкостных параметров, включающих в себя характеристики нефтегазоносности, на сегодняшний день является важной и научно значимой, так как основана на эффективности и достоверности подсчетных параметров углеводородного сырья месторождений на разных стадиях их исследования. Между тем зачастую исследуемые параметры неоднозначно определены в модели среды. Связь фильтрационно-емкостных параметров можно выразить через их нечёткое отношение, оценив их значимость в результате эксперимента. Если задано несколько (например, два) универсумов, или переменных, на которых определены нечеткие величины, то между ними может быть установлена связь, которая определена функцией принадлежности. Вся математическая модель строится на нечёткой свёртке (композиции), где выполняемый процесс математического моделирования сводится к построению правила нечеткого логического вывода Мамдани. Данный подход основан на технологическом приеме нечеткого моделирования, смысловым атрибутом которого являются экспериментальные данные, используемые для обучения, и рассматриваются как отношения нечетких величин с последующим исследованием в качестве прогнозного правила нечеткого логического вывода Мамдани. В статье описан процесс прогнозирования фильтрационно-емкостных параметров по петрофизическим параметрам на основе метода нечеткого логического вывода. Метод, основанный на нечетком моделировании, сохраняет структуру и неопределенность данных. В статье также описан процесс прогнозирования емкостного параметра при заданном распределении двух параметров.

**Ключевые слова: нечеткие отношения, неопределенность данных, математическое моделирование, прогнозирование фильтрационно-емкостных параметров, функция принадлежности**

# MAMDANI'S COMPOSITION IN FUZZY ANALYSIS MODELS AS A FUZZY ANALOGUE OF DEPENDENCE SUBSTANCES

**Shilova S.V., Burmistrova O.N.**

*Ukhta State Technical University, Ukhta, e-mail: sshilova@bk.ru*

Problems in predicting filtration-capacity parameters, including oil and gas characteristics, is currently important and scientifically significant, since it is based on the efficiency and reliability of the calculated parameters of hydrocarbon raw materials from fields at different stages of their study. Meanwhile, the investigated parameters are often ambiguously defined in the model of the environment. The relationship between the filtration-capacitive parameters can be expressed through their fuzzy ratio, evaluating their significance as a result of the experiment. If several (for example, two) universes are given, or variables on which fuzzy quantities are determined, then a connection can be established between them, which is determined by the membership function. The entire mathematical model is built on a fuzzy convolution (composition), where the performed process of mathematical modeling is reduced to building the Mamdani fuzzy inference rule. This approach is based on the technological method of fuzzy modeling. The semantic attribute of which is the experimental data used for training and is considered as a ratio of fuzzy values with subsequent research as a predictive rule of fuzzy inference Mamdani. The article describes the process of forecasting the reservoir parameters by petrophysical parameters based on the method of fuzzy inference. The method based on fuzzy modeling preserves the structure and uncertainty of the data. The article also describes the process of predicting the capacitive parameter for a given distribution of two parameters.

**Keywords: fuzzy relations, data uncertainty, mathematical modeling, forecasting of filtration-capacitive parameters, membership function**

Проблематика при прогнозировании фильтрационно-емкостных параметров, включающих в себя характеристики нефтегазоносности, на сегодняшний день является важной и научно значимой, так как основана на эффективности и достоверности подсчетных параметров углеводородного сырья месторождений на разных стадиях их исследования. Однако зачастую исследуемые параметры неоднозначно определены в модели среды. На практике геолого-геофизические данные представлены нерегулярностью наблюдений исследований, для них характерны негустая сеть, разброс по вертикали и горизонтали, что в свою очередь влияет на уменьшение плотности данных. Принятие для разных интервалов одного правила, например регрессионной модели, приводит к появлению неконтролируемых ошибок. Альтернативным методом моделирования является композиция Мамдани в моделях нечеткого анализа [1].

Если задано несколько (например, два) универсумов, или переменных $\left\{X^1, X^2, ...X^N\right\}$, на которых определены нечеткие величины $\mu_{X^i}(x^i)$, то между ними может быть установлена связь, которая определена новой функцией принадлежности, содержащей все либо часть нечетких переменных $x^i : \mu_{\{X^1, X^2, ... X^N\}}(x^i, i = 1 \div N)$. Эта функция принадлежности определяет отношение между нечеткими величинами $\{X^1, X^2, ... X^N\}$. В качестве примера такого нечёткого отношения может служить отношение, устанавливаемое результатами наблюдений [2], например, между параметрами пористости и проницаемости горных пород в пределах однородно слагающих пластов-коллекторов. Методом построения нечетких отношений могут служить введенные выше операции объединения, пересечения, дополнения нечетких множеств, выраженные через функции принадлежности:

$$\mu_{\Re}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_{\Re}(x)\} = \\ = \mu_A(x) \vee \mu_{\Re}(x),$$

$$\mu_{\Re}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_{\Re}(x)\} = \\ = \mu_A(x) \wedge \mu_{\Re}(x). \quad (1)$$

Введенные алгебраические операции также служат примером отношений между двумя нечеткими величинами (бинарные отношения). Это нечеткие отношения между двумя нечеткими величинами, формирующими третью нечеткую величину. Понятие отношения между нечеткими величинами реализует понятие связи между переменными на нечеткий случай.

*Нечеткие отношения* между нечеткими величинами, определенными функциями принадлежности $m_A(x^i)$ и $m_M(x^j)$, определяют нечеткую величину $\Re = A * M$, образованную переменными $z = \{x^i, x^j\}$ с функцией принадлежности $\mu_{\Re}(x^i, x^j)$. При нечетком моделировании допустимы введенные выше операции:

пересечения:

$$m_B(x^i, x^j) = \min\{m_A(x^i); m_M(x^j)\}, \quad (2)$$

объединения:

$$m_B(x^i, x^j) = \max\{m_A(x^i); m_M(x^j)\}, \quad (3)$$

разности:

$$m_B(x^i, x^j) = \max\{m_A(x^i) - m_M(x^j)\}. \quad (4)$$

Помимо логических операций, над отношениями, определенными на одном и том же универсуме, могут быть введены операции композиции между двумя бинарными (содержащими два параметра) отношениями $\mu_A(x, y)$ и $\mu_M(y, z)$, а также операция между бинарным отношением $\mu_A(x, y)$ и функцией принадлежности нечеткой величины $\mu_M(x)$. Эти композиции играют особо значимую роль в последующих построениях.

**Материалы и методы исследования**

Важной задачей в развиваемых далее методах прогноза фильтрационно-емкостных параметров, основанных на нечеткой математике, является расчёт функции принадлежности для нечётких отношений. Иными словами, по известному и доверительному отношению двух нечетких величин с использованием функции принадлежности выполняется анализ достоверности, позволяющий в дальнейшем построить дефазификацию имеющейся связи и поискового параметра. Рассмотрим математическую модель со следующими переменными: имеются нечёткие отношения $\mu_A(x, y)$ для переменных $(x, y)$ и определена функция принадлежности $\mu_M(x)$. Следует дать оценку для функции принадлежности $\mu_{A*M}(y)$. Здесь, символом A обозначена нечеткая переменных двух аргументов – (x, y), образующих нечеткое отношение $\mu_A(x, y)$; символом M – нечеткая переменная **x**; A*M – символ композиции нечетких переменных A и M, определяющий независимую переменную **y**, полученный по итогам расчета. Процедура такого вычисления $\mu_{A*M}(y)$ называется композицией нечеткого отношения и нечеткой величины. В литературе подобный подход встречается под термином «правило нечеткого логического вывода». В практике данный подход рассматривается как расчет значений переменной **y**, по известной связи между **x** и **y**, и заданной нечеткой переменной **x**.

Для реализации метода нечеткого логического вывода используются следующие операции:

Правило нечеткого логического вывода Мамдани [3]:

$$\mu_{A*M}(y) = \max\{\min[\mu_M(x), \mu_A(x, y)]\},$$

или

$$: \mu_{A*M}(y) = \bigcup_x (\mu_M(x) \cap \mu_A(x, y)). \quad (5)$$

Операция Max-prod композиция:

$$\mu_{A*M}(y) = \max_x [\mu_M(x) \times \mu_A(x, y)].$$

Операция Min-max композиция:

$$\mu_{A*M}(y) = \min_x \{\max[\mu_M(x) \times \mu_A(x, y)]\}.$$

Операция Max-max композиция:

$$\mu_{A*M}(y) = \max_x \{\max[\mu_M(x), \mu_A(x, y)]\}.$$

Операция Min-min композиция:

$$\mu_{A*M}(y) = \min_x \{\min[\mu_M(x), \mu_A(x, y)]\}.$$

Операция Min-average композиция:

$$\mu_{A*M}(y) = 0.5\left\{\max\left[\mu_M(x) + \mu_A(x,y)\right]\ \right\}.$$

Полезной является следующая аналогия.

Если $\mu_A(x, y)$ рассматривать как матрицу $A$, со значениями $a_{ij} = m_A(x_i, y_j)$, где $(x_i, y_j)$ – значения переменных в узлах $M_i N$ сетки, а вектор $b = \{b_i\}, b_i = m_M(x_i)$, то соотношением A**b** определен вектор $c = \left\{c_j\right\}$. По правилам линейной алгебры: $c = Ab = e_i a_{ij} b_i = c_j$ будет в точности определять $\mu_{A*M}(y_j)$, если операцию умножения воспринимать как логическое умножение: $a_{ijb_i} = \min(a_{ij}, b_i)$, а сложение – как логическое объединение: $e_j c_j = \max c_j$.

Таким образом, операция (5) соответствует обычным алгебраическим правилам умножения матрицы на вектор, с заменой алгебраических операций на их логические аналоги.

При моделировании особое внимание уделяется построенной композиции между двумя нечеткими отношениями $\mu_A(x, y)$ и $\mu_M(x, y)$. Процедура вычисления выполняется подстановкой в четкое уравнение переменных (**x**,**y**) и уравнения между другой парой переменных (**y**,**z**). Целевой задачей является исключение из результата переменной **y** и получение уравнения связи между (**x**, **z**) [4]. Выполнение данной выполняется с помощью *формулы Мамдани*:

$$\mu_{A*\mathfrak{R}}(x,z) = \max_y\left\{\min\left[\mu_A(x,y), \mu_{\mathfrak{R}}(y,z),\right]\right\}. \quad (6)$$

По приведенной выше аналогии с матрицами расчет по формуле (6) в точности соответствует умножению матриц $A = \left\{a_{ij} = m_A(x_i, y_j)\right\}$; $G = \left\{g_{jk} = m_B(y_j, z_k)\right\}$ с заменой алгебраических операций умножения и сложения на логические – пересечения и объединения, тождественные вычислению минимума и максимума.

Предположим, что следует установить отношение между переменными (**x**, **z**) по известному отношению $\mu_A(x, y)$ и $\mu_{\mathfrak{R}}(y,z)$. Определим переменные: **x** – коэффициент пористости, выполненный по данным ГИС; **z** – коэффициент проницаемости. Кроме этого, определена связь $\mu_A(x, y)$ между **x** и промежуточным параметром **y** и $\mu_{\mathfrak{R}}(y,z)$, характеризующая отношение между **y** и **z**.

Определим следующий алгоритм расчета функции принадлежности для отношений: по исходной функции принадлежности $\mu_M(x)$ и $\mu_A(x, y)$ рассчитаем

$$\mu_{A*M}(y) = \max_x\left\{\min\left[\mu_M(x), \mu_A(x,y)\right]\right\} = \bigcup_x(\mu_M(x) \cap \mu_A(x,y)). \quad (7)$$

По вычисленной $\mu_{A*M}(y)$ и заданному отношению $\mu_{\mathfrak{R}}(y,z)$ получаем

$$\mu_{A*M*\mathfrak{R}}(z) = \max_y\left\{\min\left[\mu_{A*M}(y), \mu_{\mathfrak{R}}(y,z)\right]\right\} = \bigcup_y(\mu_{A*M}(y) \cap \mu_{\mathfrak{R}}(y,z)). \quad (8)$$

Подставляя (7) для $\mu_{A*M}(y)$ в (8), получаем

$$\begin{aligned}\mu_{A*M*\mathfrak{R}}(z) &= \bigcup_y(\bigcup_x(\mu_M(x) \cap \mu_A(x,y)) \cap \mu_{\mathfrak{R}}(y,z)) = \\ &= \bigcup_x(\bigcup_y(\mu_M(x) \cap \mu_A(x,y)) \cap \mu_{\mathfrak{R}}(y,z)) = \\ &= \bigcup_x\{[(\bigcup_y(\mu_M(x,y) \cap \mu_{\mathfrak{R}}(y,z))] \cap \mu_M(x)\}.\end{aligned} \quad (9)$$

Определив

$$\mu_{A*\mathfrak{R}}(x,y) = \left[\bigcup_y(\mu_A(x,y) \cap \mu_{\mathfrak{R}}(y,z))\right], \quad (10)$$

получаем для $\mu_{A*M*\mathfrak{R}}(z)$:

$$\mu_{A*M*\mathfrak{R}}(z) = \max_z\left\{\min\left[\mu_{A*\mathfrak{R}}(x,z), \mu_{\mathfrak{R}}(y,z), \mu_{\mathfrak{R}}(y,z)\right]\right\}. \quad (11)$$

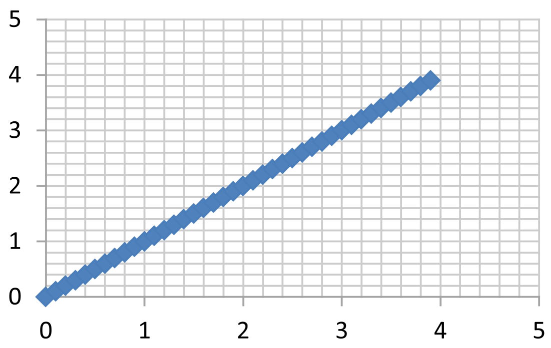
Проведенные исследования тождественно отображают (5), в результате чего можно сделать вывод, что композиция Мамдани (10) отношений $\mu_A(x, y)$ и $\mu_{\mathfrak{R}}(y,z)$ имеет смысл аналогичный подстановке уравнений для исключения общих повторяющихся переменных.

## Результаты исследования и их обсуждение

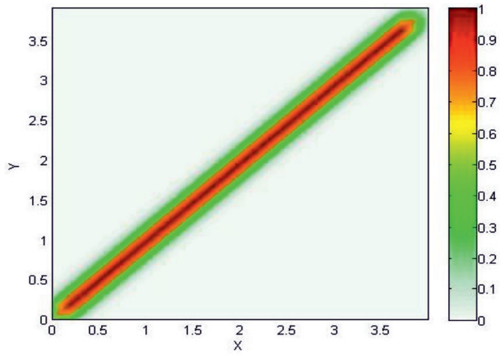
Представленные математические аспекты использования правил нечеткой математики для нечеткого моделирования в нефтегазовой геологии и анализа неопределенных нечетких данных результатов экспериментов играют значимую роль при обработке и интерпретации сложнопостроенных сред, с целью оценки достоверности построения прогнозных задач. Приведем типичные примеры работы операции композиции Мамдани.

На рис. 1 и 2 приведены исходные данные и их нечеткие модели для отношений $\mu_A(x, y)$ и $\mu_{\Re}(y, z)$.

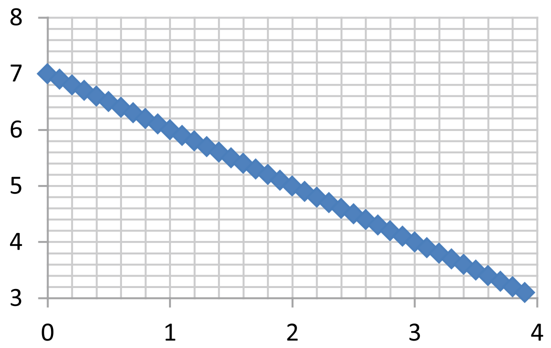
*а) Исходные данные*



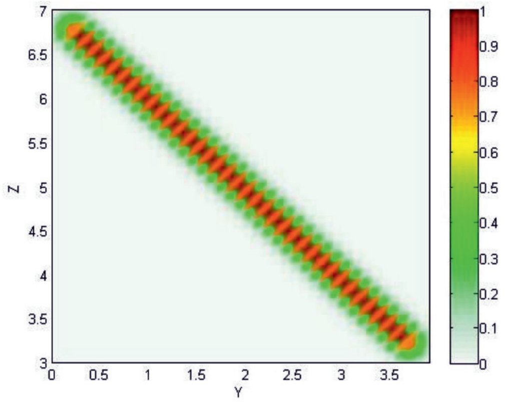
*Нечеткая модель*




*б) Исходные данные*



*Нечеткая модель*




*в)*

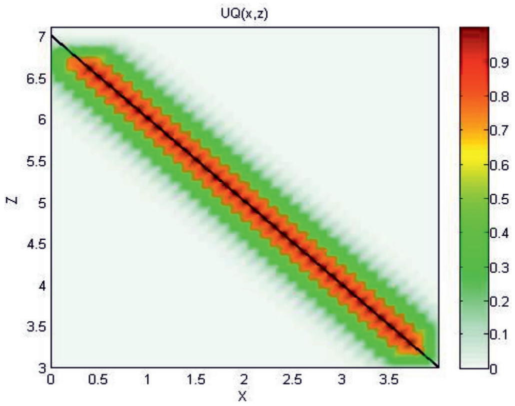
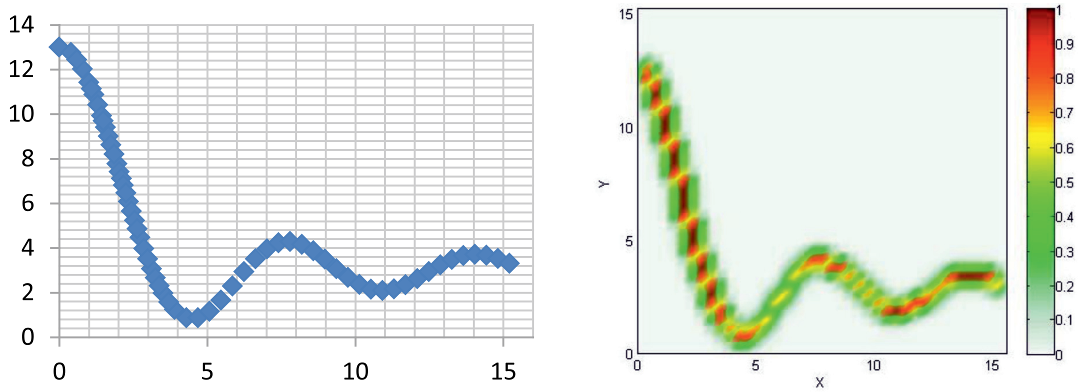



*Рис. 1. Демонстрация нечеткого моделирования для линейных зависимостей: а) модель для отношения $\mu_A(x, y)$; б) модель для отношения $\mu_{\Re}(y, z)$; в) композиция Мамдани $\mu_{A*M*\Re}(z)$ этих отношений*

Для нелинейных зависимостей:

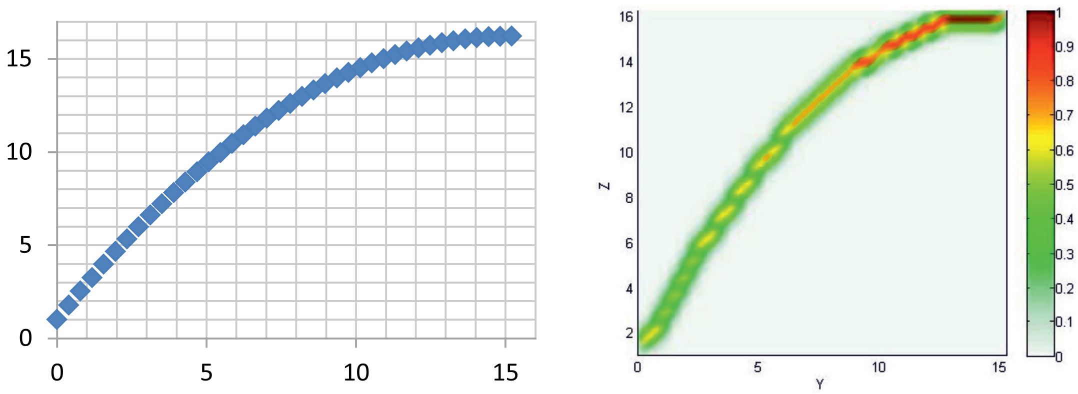
*а) Исходные данные* *Нечеткая модель*

(модель) $y = 3 + \dfrac{10 * \sin(x)}{x}$




*б) Исходные данные* *Нечеткая модель*

(модель $z = 16 - \dfrac{(y-15)^2}{15}$ )




*в)*

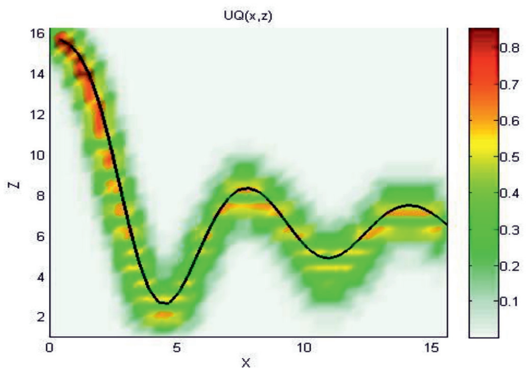



*Рис. 2. Демонстрация нечеткого моделирования для нелинейных зависимостей: а) модель для отношения $\mu_A(x, y)$; б) модель для отношения $\mu_{\Re}(y,z)$; в) композиция Мамдани $\mu_{A*M*\Re}(z)$ этих отношений*

## Заключение

Проведенные исследования полностью нашли свое подтверждение в справедливости использования при нечетком моделировании композиции Мамдани. Предлагаемая технология играет важную роль для установления отношений между величинами, характеризующими петрофизические и геофизические свойства горных пород в моделях нечеткого анализа. Однако при такой постановке может быть введена и альтернативная операция композиции max*:

$$\mu_{A*M}(x,z)=\max_{y}\left\{\left[\mu_{A}(x,y)*\mu_{M}(y,z)\right]\right\}. \quad (12)$$

Роль символа «*» играет некоторая операция, например умножение.

В источнике [4] подробно продемонстрировано явное преимущество композиции Мамдани в сравнении с альтернативными способами.

Анализируя приведенные алгебраические вычисления, обозначив композицию между двумя бинарными отношениями, можно сделать вывод, что она ассоциативна, дистрибутивна относительно нечеткого объединения. При вычислении функции от каждой из переменных, входящих в нечеткое отношение, порядок композиции не имеет значения, т.е. отношение является инвариантом, что особо важно при формировании графов прогноза параметров.

Полученные композиции Мамдани применительны и к другим геофизическим параметрам, как, например, сейсмические атрибуты и петрофизические характеристики геологической среды. В результате выполнения прогноза они имеют оценку, ранжированную по достоверности, что позволит более точно решать такие задачи, как подсчет запасов углеводородов, изучение и исследование процесса вытеснения углеводородов в коллекторах, определение и контроль перемещения водонефтяного и газожидкостного контакта в пласте, а также оценки перспектив нефтегазоносности [5].

## Список литературы

1. Кобрунов А.И., Дорогобед А.Н., Кожевникова П.В. Метод нечеткого логического вывода и информационная обеспеченность результатов моделирования в нефтегазовой геологии // Геоинформатика. 2016. № 2. С. 35–40.

2. Кобрунов А.И., Кожевникова П.В. Теоретические основы при прогнозировании параметров геологических сред в условиях неопределенности // Фундаментальные исследования. 2015. № 5–3. С. 506–510.

3. Mamdani E.H. Twenty years of fuzzy control: experiences gained and lessons learned, IEEE Internal. Conf on Fuzzy Systems, 1993. P. 339–344.

4. Кобрунов А.И. Математические методы моделирования в прикладной геофизике (избранные главы). В 2 ч. Ч. 1. Функционально-аналитические основы (учебное пособие). Ухта: УГТУ, 2014. 224 с.

5. Шилова С.В., Ломинский Д.О. Математическое моделирование при прогнозировании фильтрационно-емкостных свойств нефтегазовых коллекторов // ИТ АРКТИКА (ИТ архитектура, коммуникации, технологии, информация, комплексная автоматизация). 2019. № 4. С. 62–75.