

УДК 51-74:656.11

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЭВАКУАЦИИ ПЛОТНОГО ПЕШЕХОДНОГО ПОТОКА

Наумова Н.А., Карачанская Т.А.

*ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», Краснодар,
e-mail: Nataly_Naumova@mail.ru*

Моделирование и планирование территорий, зданий и сооружений с учетом пешеходных потоков стало очень значимым в последнее время. При проектировании зданий аэропортов, торговых центров, спортивных и концертных площадок должна учитываться также возможность максимально безопасной эвакуации в случае чрезвычайных происшествий. Актуальной задачей является разработка математической модели, позволяющей определять параметры плотных пешеходных потоков для управления ими в режиме реального времени. В работе пешеходный поток рассматривается как случайный поток событий. Интервал между событиями – это время между двумя последовательными прибытиями пешеходов к линии с данной фиксированной координатой. Распределение интервалов принято подчиненным закону Эрланга шестого порядка. Для получения параметров эффективности эвакуации пешеходных потоков применялись методы теории массового обслуживания и теории случайных процессов. Разработан аналитический аппарат для определения среднего количества пешеходов в очереди перед эвакуационными выходами и характеристики ее длины. Рассмотрен также случай слияния нескольких потоков в один. Выведены вероятностные функции, характеризующие суммарный пешеходный поток. Представленная модель пешеходного потока позволяет в режиме реального времени по минимальному количеству исходных данных определять отдельные параметры эффективности организации эвакуационного процесса.

Ключевые слова: пешеходный поток, математическая модель, случайный процесс, эвакуационный сценарий, организация движения

DEFINITION OF INDICATORS OF EFFICIENCY OF DENSE PEDESTRIAN EVACUATION

Naumova N.A., Karachanskaya T.A.

Kuban State Technological University, Krasnodar, e-mail: Nataly_Naumova@mail.ru

Modeling and planning of territories, buildings and structures, taking into account pedestrian flows, has become very important in recent years. When designing buildings for airports, shopping centers, sports and concert venues, the possibility of the safest evacuation in case of emergencies should also be taken into account. An urgent task is the development of a mathematical model that allows to determine the parameters of dense pedestrian flows for their control in real time. In the work, pedestrian flow is considered as a stochastic flow of events. The interval between events is the time between two successive arrivals of pedestrians to a line with a given fixed coordinate. The distribution of intervals is assumed to be subject to the sixth order Erlang law. The methods of queuing theory and the theory of stochastic processes were used to obtain the parameters of the efficiency of evacuation of pedestrian flows. An analytical apparatus has been developed to determine the average number of pedestrians in the queue in front of emergency exits and the characteristics of its length. The case of merging several streams into one is also considered. Probability functions are derived that characterize the total pedestrian flow. The presented model of pedestrian flow allows in real time, based on the minimum amount of initial data, to determine individual parameters of the effectiveness of the organization and evacuation process.

Keywords: pedestrian flow, mathematical model, stochastic process, evacuation scenario, traffic organization

Моделирование и планирование территорий, зданий и сооружений с учетом пешеходных потоков стало очень значимым в последнее время. В качестве примера можно привести здания аэропортов, торговых центров, ночных клубов, спортивных и концертных площадок. При их проектировании должна учитываться также возможность максимально безопасной эвакуации в случае чрезвычайных происшествий.

С этой целью разрабатываются модели пешеходных потоков, изучается и моделируется поведение людей в стандартных ситуациях и в случае паники. В течение последних сорока лет разработана масса моделей различной степени детализации, для различных областей применения.

Микроскопические модели определяют позицию и поведение отдельных пешеходов. Среди них следует отметить модель социальных сил и модель клеточных автоматов [1; 2] как наиболее популярные. Мезоскопические модели решают проблемы определения вероятности возникновения и величины очередей, скорости отдельных пешеходов, дистанции между ними. К ним относят, например, модель Больцмана. Макроскопические модели определяют глобальные параметры потока, такие как скорость и плотность [3; 4].

Несмотря на то что пешеходный поток гораздо менее организован, чем транспортный, существует феномен самоорганизации пешеходного потока [2; 5]. То есть без уча-

ствия внешнего воздействия по прошествии некоторого времени поток пешеходов, движущихся в данном направлении, приобретает достаточно устойчивые параметры.

Актуальной задачей является разработка математической модели, позволяющей определять параметры плотных пешеходных потоков для управления ими в режиме реального времени.

Целью данной работы является разработка аналитического аппарата, позволяющего на мезоскопическом уровне определять параметры плотного пешеходного потока в случае эвакуационных сценариев.

Материалы и методы исследования

Многие модели пешеходных потоков на макроскопическом и мезоскопическом уровне построены по аналогии с потоками транспортных средств. С учетом эффекта самоорганизации потока пешеходов можем рассматривать его как случайный поток событий. Под событием будем понимать достижение пешеходом точки пространства с фиксированной координатой по направлению движения потока. Интервал между событиями – это время между двумя последовательными прибытиями пешеходов к линии с данной фиксированной координатой. По данным многочисленных исследований, плотный поток пешеходов согласуется с нормальным распределением. Для получения возможности применять методы теории массового обслуживания будем считать поток пешеходов подчиненным закону Эрланга, который при значении параметра $k \geq 5$ близок к нормальному закону распределения. Аналогичная гипотеза была принята и подтверждена экспериментально автором данной статьи в модели транспортных потоков TIMeR_Mod [6].

Результаты исследования и их обсуждение

Как мы уже отметили, закон Эрланга при значениях параметра $k \geq 5$ близок к нормальному и соответствует плотным потокам

событий. Поэтому при эвакуации из мест массового скопления людей по узким коридорам поток пешеходов будем аппроксимировать законом Эрланга (как и транспортный). Для получения параметров эффективности эвакуации пешеходных потоков будем применять методы теории массового обслуживания и теории случайных процессов [7; 8].

1. Моделирование пешеходного потока как системы массового обслуживания

Пусть время обслуживания распределено по показательному закону с параметром μ . Поток заявок распределен по обобщенному закону Эрланга с параметрами $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ порядка $(k + 1)$. Обслуживаться могут не более n требований одновременно. Как известно, поток Эрланга порядка $(k + 1)$ получается из простейшего, если оставить каждое $(k + 1)$ -е событие, а промежуточные k отбросить. Поэтому для нахождения вероятности того, что обслуживается m ($n > m$) требований, применим метод псевдосостояний (рисунок).

В работе автора [9] при рассмотрении транспортных потоков уже были выведены формулы для выражения вероятности пребывания системы в данном псевдосостоянии. Поэтому сейчас воспользуемся готовым результатом.

Введем следующие обозначения:

$p_n(t), p_{n+1}(t), \dots, p_{n+i}(t), \dots$ пребывания системы в состояниях $s_0, s_1, \dots, s_i, \dots$ соответственно;

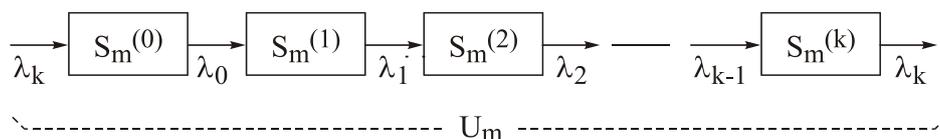
U_{n+i} – состояние системы, при котором все n каналов обслуживания заняты, в очереди i требований;

$p_{n+i}^{(j)}(t)$ – вероятность пребывания системы в транзитивном состоянии $s_{n+i}^{(j)}(t)$ ($j = 1, 2, 3, \dots, k$);

$p_{n+i}(t)$ – вероятность нахождения в очереди i требований в момент t .

Дифференциальные уравнения для определения вероятностей нахождения системы в транзитивных состояниях U_{n+i} имеют вид:

$$\left(p_{n+i}^{(j)}(t) \right)' = -\lambda_j p_{n+i}^{(j)}(t) + \lambda_{j-1} p_{n+i}^{(j-1)}(t) \quad (j = 1, 2, 3, \dots, k). \quad (1)$$



Псевдосостояния распределения Эрланга порядка $k + 1$

Система дифференциальных уравнений для нахождения вероятностей наличия i требований в очереди:

$$p'_{n+i}(t) = -p_{n+i}(t) \cdot (\lambda_0 + n\mu) + p_{n+i-1}^k(t) \cdot \lambda_k + n\mu p_{n+i+1} \quad (i=1; 2; 3; \dots). \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение для момента, когда нет очереди и заняты m ($m \leq n$) каналов обслуживания (состояние U_m):

$$(p_m(t))'_t = -(\lambda_0 + m\mu) p_m(t) + (m+1)\mu \cdot p_{m+1} + \lambda_k p_{m-1}^{(k)}(t) \quad (m=1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Для момента, когда система полностью свободна, дифференциальное уравнение имеет вид:

$$(p_0(t))'_t = -\lambda_0 p_0(t) + \mu p_1(t). \quad (4)$$

Обозначим $r_m(t) = P(U_m)$, то есть $r_m(t)$ – вероятность пребывания системы в состоянии U_m . Согласно законам теории вероятностей:

$$r_m(t) = p_m(t) + \sum_{j=1}^k p_m^{(j)}(t). \quad (5)$$

Тогда средняя ожидаемая длина очереди в момент времени t :

$$M(l(t)) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot r_{n+i}(t). \quad (6)$$

Решение данной системы дифференциальных уравнений для стационарного процесса приведено в работе автора [9], поэтому приведем готовый результат:

$$p_0 = \frac{1}{b \left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\alpha/n}{1 - \alpha/n} \right)}, \quad (7)$$

$$p_m = \frac{\alpha^m}{m! \cdot b \left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\alpha/n}{1 - \alpha/n} \right)}, \quad m \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, \quad (8)$$

$$p_{n+i} = \frac{\alpha^{n+i}}{n! \cdot n^i \cdot b \left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\alpha/n}{1 - \alpha/n} \right)}, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (9)$$

Показатели эффективности функционирования системы при условии $(\alpha/n) < 1$ следующие:
1) вероятность нахождения не более s требований в очереди равна:

$$P_{n+s} = \sum_{m=0}^n r_m + \sum_{j=1}^s r_{n+j} = b p_0 \left(\sum_{m=0}^n \frac{\alpha^m}{m!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{j=1}^s \left(\frac{\alpha}{n} \right)^j \right). \quad (10)$$

2) математическое ожидание числа требований в очереди:

$$M(l) = \sum_{j=1}^{\infty} j r_{n+j} = b p_0 \frac{\alpha^{n+1}}{n! \cdot n \cdot \left(1 - \alpha/n \right)^2}. \quad (11)$$

При вычислении показателей эффективности применялся метод псевдосостояний, при котором временная ось «растягивалась» в $(k + 1)$ раз. Поэтому для «стыковки» результатов примем:

$$b = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_0}{\lambda_i} > 1, \quad \alpha = \frac{\lambda_0}{\mu}, \quad \mu = \frac{(k+1)}{(m_z)}. \quad (12)$$

2. Определение параметров пешеходных потоков перед эвакуационным выходом

В формулах (12) m_z – среднее время обслуживания одного клиента. Рассматривая поток пешеходов как поток Пальма, в котором интервалы по времени имеют (специальный) закон распределения Эрланга с параметрами $k = 6$ и λ , получим следующие значения параметров:

$$b = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{\lambda} = k = 6, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \mu = \frac{6}{(m_z)}. \quad (13)$$

Для определения среднего количества пешеходов в очереди перед эвакуационным выходом и вероятности нахождения в очереди не более s пешеходов следует подставить в формулы (10) и (11) значения, определяемые по формуле (13).

Суммарный поток, полученный при слиянии s плотных пешеходных потоков можно также аппроксимировать с помощью (специального) закона Эрланга порядка $k = 6$. Второй параметр распределения при этом определяется как сумма исходных:

$$\lambda = \sum_{i=1}^s \lambda_i. \quad (14)$$

Если при этом среднее время эвакуации через каждый из n выходов равно m_z , то среднее количество людей, скопившихся у выхода, вычисляется по той же формуле:

$$M(l) = bp_0 \frac{\alpha^{n+1}}{n! n \cdot (1 - \alpha/n)^2}, \quad (15)$$

где $b = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{\lambda} = k = 6, \quad \alpha = \frac{\lambda_0}{\mu}, \quad \mu = \frac{6}{(m_z)}.$

3. Определение функции распределения суммарного потока, получаемого при слиянии s плотных пешеходных потоков

В пункте 2 для определения количества пешеходов в очереди мы предположили, что суммарный поток также имеет распределение Эрланга. Если требуется определить вероятность того, что за время T_0 к точке пространства с фиксированной координатой в суммарном потоке не подойдет ни один пешеход, следует более точно определить функцию распределения суммарного потока.

Для вывода функции распределения интервалов по времени в суммарном потоке воспользуемся методом, приведенным в работе [7]. Пусть τ^* произвольная точка в суммарном потоке $\Pi^{(s)}$, не совпадающая ни с одним из событий в независимых потоках $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_s$. Тогда время, оставшееся до появления очередного события в суммарном потоке, равно $R^{(s)} = \min \{R_1, R_2, \dots, R_s\}$.

В случае справедливости гипотезы о распределении интервалов в потоке по закону Эрланга, согласно теории случайных процессов, вероятности того, что время Q , прошедшее после последнего прибытия автомобиля, и время R , оставшееся до очередного прибытия, меньше некоторого наперед заданного значения T_0 , выражаются формулами:

$$\begin{aligned} P(Q < T_0) &= P(R < T_0) = \int_{-\infty}^{T_0} \frac{1 - F^{(k)}(t)}{m_t^{(k)}} dt = \int_{-\infty}^{T_0} \frac{\lambda}{k} R(k-1, \lambda t) dt = \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\lambda}{k} \int_{T_0}^{\infty} P(n, \lambda t) dt = 1 - \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} R(n, T_0 \lambda). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь приняты обозначения:

$$R(n, a) = \int_a^{\infty} \frac{x^n}{n} e^{-x} dx = \sum_{k=0}^n P(k, a); \quad P(k, \alpha) = \frac{(\alpha^k e^{-\alpha})}{k!} \quad (17)$$

Итак, функция распределения времени, оставшегося до наступления очередного события в потоке Эрланга порядка k_i , имеет вид:

$$F_{r_i}(t) = 1 - \frac{1}{k_i} \sum_{n=0}^{k_i-1} R(n, \lambda_i t). \quad (18)$$

Функция распределения минимальной из s случайных величин определяется по формуле:

$$F_{r^{(s)}}(t) = 1 - \prod_{i=1}^s (1 - F_{r_i}(t)) = 1 - \prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{k_i} \sum_{n=0}^{k_i-1} R(n, \lambda_i t) \right). \quad (19)$$

Функция распределения интервалов по времени $T^{(s)}$ в суммарном потоке $\Pi^{(s)}$ определяется по формуле:

$$F^{(s)}(t) = 1 - m^{(s)}(t) \cdot f_{r^{(s)}}(t). \quad (20)$$

Математическое ожидание интервала между событиями в потоке Π_i равно $m_i = \frac{k_i}{\lambda_i}$. Тогда

$$m^{(s)} = \frac{1}{\lambda^{(s)}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^s \lambda_i / k_i}. \quad (21)$$

Найдем плотность распределения $f_{r^{(s)}}(t)$

$$\begin{aligned} f_{r^{(s)}}(t) &= \left(F_{r^{(s)}}(t) \right)'_t = \left(1 - \prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{k_i} \sum_{n=0}^{k_i-1} R(n, \lambda_i t) \right) \right)'_t = \\ &= - \left(\prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{k_i} \sum_{n=0}^{k_i-1} \left(\frac{(\lambda_i t)^n e^{-\lambda_i t}}{k_i!} \right) \right) \right)'_t = - \left(\prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{k_i \cdot k_i!} \sum_{n=0}^{k_i-1} (\lambda_i t)^n e^{-\lambda_i t} \right) \right)'_t. \end{aligned} \quad (22)$$

В частности, если сливаются два потока Пальма, интервалы по времени в котором распределены по (специальному) закону Эрланга порядка $k = 6$ с параметрами λ_1 и λ_2 , то

$$\begin{aligned} f_{r^{(2)}}(t) &= - \left(\prod_{i=1}^2 \left(\frac{1}{6 \cdot 6!} \sum_{n=0}^5 (\lambda_i t)^n e^{-\lambda_i t} \right) \right)'_t = \\ &= - \left(\frac{1}{6 \cdot 6!} \right)^2 \cdot \left[\left(\sum_{n=0}^5 (\lambda_1 t)^n e^{-\lambda_1 t} \right)'_t \cdot \sum_{n=0}^5 (\lambda_2 t)^n e^{-\lambda_2 t} + \left(\sum_{n=0}^5 (\lambda_2 t)^n e^{-\lambda_2 t} \right)'_t \cdot \sum_{n=0}^5 (\lambda_1 t)^n e^{-\lambda_1 t} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Найдем производную, подставим в формулу (23) и упростим:

$$\begin{aligned} f_{r^{(2)}}(t) &= - \left(\frac{1}{6 \cdot 6!} \right)^2 \cdot e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} \cdot \left[\lambda_1 \left(\sum_{n=1}^5 n \cdot (\lambda_1 t)^{n-1} - \sum_{n=1}^5 (\lambda_1 t)^n \right) \cdot \sum_{n=0}^5 (\lambda_2 t)^n + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2 \left(\sum_{n=1}^5 n \cdot (\lambda_2 t)^{n-1} - \sum_{n=1}^5 (\lambda_2 t)^n \right) \cdot \sum_{n=0}^5 (\lambda_1 t)^n \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, функция распределения интервалов по времени в потоке, полученном при слиянии двух пешеходных потоков, распределенных по закону Эрланга порядка $k = 6$ с параметрами λ_1 и λ_2 , следующая:

$$F^{(2)}(t) = 1 - m^{(2)}(t) \cdot f_{r^{(2)}}(t), \quad (25)$$

где функция $f_{r^{(2)}}(t)$ определяется по формуле (24), а математическое ожидание интервала между событиями равно:

$$m^{(2)} = \frac{1}{\lambda^{(2)}} = \frac{6}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (26)$$

Вероятность того, что за время T_0 к точке пространства с фиксированной координатой в суммарном потоке не подойдет ни один пешеход:

$$P(T > T_0) = 1 - F^{(2)}(t). \quad (27)$$

А вероятность противоположного события, то есть того, что подойдет хотя бы один:

$$P(T < T_0) = F^{(2)}(t). \quad (28)$$

Заключение

Представленная модель пешеходного потока позволяет в режиме реального времени по минимальному количеству исходных данных определять отдельные параметры эффективности организации эвакуационного процесса. Кроме того, ее можно при-

менять при организации улично-дорожного движения с целью определения задержек транспортных средств и пешеходов у перекрестков. Преимущество модели перед имитационными микромоделями заключается также в скорости расчетов с ее помощью благодаря аналитическому аппарату.

Список литературы

1. Helbing D., Molnar P. Social force model for pedestrian dynamics. «Physical Review E». 1995. No. 51(5). P. 4282–4286.
2. Johansson F. Microscopic Modelling and Simulation of Pedestrian Traffic. Lincoping University Department of Science and Technology. Lincoping, Sweden. 2013. P. 119.
3. Carrillo J.A., Martin S., Wolfram M.-T. An improved version of the Hughes model for pedestrian flow. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2016. No. 26(04). P. 671–697.
4. Emiliano Cristiani, Benedetto Piccoli, and Andrea Tosin. Multiscale modeling of granular flows with application to crowd dynamics. *Multiscale Modeling & Simulation*. 2011. No. 9(1). P. 155–182.
5. Burger M., Hittmeir S., Ranetbauer H., Wolfram M.-T. Lane formation by side-stepping. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 2016. No. 48(2). P. 981–1005.
6. Naumova N.A., Naumov R.A. Method of Solving Some Optimization Problems for Dynamic Traffic Flow Distribution. *International Review on Modelling and Simulations*. Italy. 2018. Vol. 11. No 4.
7. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2000. 480 с.
8. Cox D.R. *Renewal theory*. London: Methuen, 1962. P. 150.
9. Naumova N.A. Advanced optimization of road network: Pedestrian crossings with calling devices. *International Journal of Emerging Trends in Engineering Research*. 2020. No. 8 (1). P. 130–137.