

УДК 681.51:519.6

ДЕСКРИПТИВНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ СИГНАЛА В ОДНОМ АЛГОРИТМЕ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ^{1,2}Воскобойников Ю.Е., ¹Боева В.А.¹ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет» (Сибстрин), Новосибирск, e-mail: voscob@mail.ru;²ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет», Новосибирск, e-mail: voscob@mail.ru

Многие технические системы описываются математическими моделями в виде интегрального вольтерровского уравнения I рода с разностным ядром. Задача непараметрической идентификации для подобных систем будет сводиться к построению оценки импульсной переходной функции идентифицируемой системы на основе измеренных (с шумами) значений входного и выходного сигналов. В некоторых схемах идентификации, широко используемых на практике, на вход идентифицируемой системы в некоторый момент времени подается прямоугольный сигнал постоянной амплитуды. Для такого входного сигнала импульсная переходная функция определяется как первая производная выходного сигнала системы. Однако вычисление производной относится к классу некорректно поставленных задач, и существенной особенностью этой задачи является неустойчивость вычисленной производной к погрешностям регистрации выходного сигнала. Для устойчивого вычисления используют различные алгоритмы сглаживания экспериментальных данных, из которых наиболее эффективным являются сглаживающие кубические сплайны. Для однозначного определения коэффициентов этих сплайнов задают краевые условия. К сожалению, традиционные естественные краевые условия (нулевые вторые производные сплайна) не позволяют учитывать особенности задачи идентификации. Более того, известные алгоритмы построения сплайнов не позволяют учитывать при вычислении коэффициентов качественную априорную (или апостериорную) информацию об искомом решении задачи идентификации. Поэтому в данной работе предлагается алгоритм сглаживания на основе сглаживающих кубических сплайнов, позволяющий в достаточной (для повышения точности идентификации) степени учитывать информацию об идентифицируемой импульсной переходной функции. Выполненные исследования показали эффективность предлагаемого алгоритма сглаживания и всей процедуры идентификации в целом.

Ключевые слова: задача идентификации, уравнение Вольтерра I рода, сглаживающие кубические сплайны, задание краевых условий, учет априорной информации

DESCRIPTIVE SIGNAL SMOOTHING IN A SINGLE ALGORITHM NONPARAMETRIC IDENTIFICATION OF TECHNICAL SYSTEMS^{1,2}Voskoboinikov Yu.E., ¹Boeva V.A.¹Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), Novosibirsk, e-mail: voscob@mail.ru;²Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, e-mail: voscob@mail.ru

Mathematical models of many technical systems have the form of Volterra integral equation of the first kind with a difference kernel. For such systems, the non-parametric identification problem reduces to the estimation of pulse transition characteristic of the system from the registered noise-contaminated values of input and output signals. In actual practice, some identification schemes use the square-wave signal with constant amplitude at some instant as the input signal of identification system. For such an input signal, the pulse transition characteristic is an output signal first derivative. Except that, derivative calculation procedure is an ill-posed problem characterized by an essential singularity of estimated derivative non-stability concerning noise terms in output signal. To find a unique stable solution for the problem, for observation data different smoothing algorithms exist, and the most effective is cubic smoothing splines algorithm. There are boundary conditions for these splines coefficients unambiguous determination. Unfortunately, the equal to zero second spline derivatives that are traditional natural boundary conditions not allow taking properties of identification problem into account. What is more, smoothing cubic splines algorithms existed keep from using qualitative a priori or a posteriori information about identification problem required solution when coefficients calculation is. For these reasons, in this paper authors present smoothing cubic splines algorithm with identifying pulse transition characteristic qualitative data taking into account to improve identification procedure accuracy. All the studies investigated prove the confident efficiency of smoothing algorithm proposed and identification procedure as a whole.

Keywords: identification problem, Volterra integral equation of the first kind, smoothing cubic splines, boundary conditions imposition, taking account of qualitative a priori information

Для моделирования различных динамических систем достаточно часто используются интегральные модели [1, с. 4–5, 163–164]. Если параметры системы не меняются во времени, то такая система называется стационарной, и ее поведение описывается интегральным уравнением Вольтерра I рода с разностным ядром [2, с. 109–128]:

$$\int_0^t k(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где $k(t)$ – импульсная переходная функция (ИПФ) системы; $\varphi(\tau)$, $f(t)$ – ее входной и выходной сигналы. Для физически реализуемой системы выполняется условие

$k(t) = 0$ при $t < 0$. Задача непараметрической идентификации системы (1) заключается в вычислении оценки для ИПФ $k(t)$ по измеренным значениям входного и выходного сигналов идентифицируемой системы.

На практике для идентификации стационарных систем часто (в силу своей простоты) применяется схема, в которой на вход идентифицируемой системы подается (в момент $t = 0$) ступенчатый сигнал, амплитуда которого постоянна. Заметим, что если амплитуда равна 1, то такой сигнал называется функцией Хевисайда (выполнение этого условия предполагается в дальнейшем). Для такого входного сигнала можно показать [2, с. 163–164], что:

$$k(t) = \frac{d}{dt} f_H(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

где $f_H(t)$ – выходной сигнал (реакция системы), если на вход подана функция Хевисайда. Несмотря на хорошо разработанные алгоритмы численного дифференцирования, использование (2) на практике связано с той же проблемой некорректности, что и при решении уравнения (1), так как операция дифференцирования является некорректно поставленной задачей [3]. Чаще всего это проявляется в неустойчивости операции дифференцирования, когда даже небольшой уровень шума регистрации выходного сигнала вызывает очень большие ошибки в полученной (на основе (2)) оценке ИПФ. Для получения устойчивой оценки ИПФ зарегистрированный (с ошибками измерения) сигнал $\tilde{f}_H(t)$ первоначально сглаживают (фильтруют), а затем применяют операцию дифференцирования. Часто на практике для этих целей используют (из-за их простоты построения и наличия соответствующего программного обеспечения в ряде математических пакетов) сглаживающие кубические сплайны (СКС) [4; 5]. К сожалению, в получаемых оценках ИПФ при высоком уровне шума (10–15%) присутствуют (даже при оптимальных параметрах сглаживания) значительные ошибки идентификации (особенно при малых и больших значениях времени t). Поэтому целью данной статьи является разработка способов уменьшения ошибки идентификации путем:

- построения СКС с заданием левого и правого краевых условий в виде значений первых производных;

- использования при построении СКС качественной априорной информации о поведении выходного сигнала $f_H(t)$ или ИПФ идентифицируемой системы.

Материалы и методы исследования

Предположим, что зарегистрированный в узлах $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ зашумленный выходной сигнал $\tilde{f}_H(t_i)$ допускает представление:

$$\tilde{f}_i = \tilde{f}_H(t_i) = f_H(t_i) + \eta_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где η_i – шум с нулевым средним и дисперсией σ_η^2 . Для сглаживания зашумленных значений $\{\tilde{f}_i\}$ обратимся к сглаживающим кубическим сплайнам (СКС). Напомним, что сглаживающий кубический сплайн $S_i(x)$ на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1})$, $i = 1, \dots, N - 1$ представляет собой полином третьей степени вида [4; 5]:

$$S_{i,\alpha}(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad (4)$$

и является дважды непрерывно дифференцируемым на всем интервале $[0, T]$. Для однозначного вычисления коэффициентов СКС a_i, b_i, c_i, d_i задают левые и правые краевые условия. Например, естественные краевые условия определяют нулевые значения вторых производных в узлах t_1, t_N , т.е.

$$S''_{i,\alpha}(t_1) = S''_{i,\alpha}(t_N) = 0. \quad (5)$$

Показано [4; 6], что СКС с естественными краевыми условиями доставляет минимальное значение функционалу:

$$F_\alpha(S) = \alpha \int_{t_1}^{t_N} |S''(t)|^2 dt + \sum_{i=1}^n p_i^{-1} (\tilde{f}_i - S(t_i))^2, \quad (6)$$

где p_i^{-1} , $i = 1, \dots, N$ – весовые множители. Меняя параметр сглаживания α в интервале $[0, \infty)$, можно изменять ошибку сглаживания. Величину параметра сглаживания, минимизирующего среднеквадратическую ошибку (СКО) сглаживания, назовем оптимальным параметром и обозначим α_{opt} . Алгоритмы оценивания α_{opt} рассмотрены в работах [6, с. 62–67; 7].

К сожалению, задание краевых условий $S''_{i,\alpha}(t_1) = 0$, $S''_{i,\alpha}(t_N) = 0$ может привести к значительным ошибкам идентификации (ошибкам дифференцирования СКС) при малых и больших значениях аргумента СКС. Для иллюстрации этого факта на рисунке, α показаны значения «точной» ИПФ (сплошная кривая) и оценки $\hat{k}_{\alpha_{\text{opt}}}^{(2_0)}(t) = S'_{i,\alpha_{\text{opt}}}(t)$ (штриховая кривая), вычисленной дифференцированием СКС, построенной при $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$ и краевых условиях (5), при этом шум измерения имел относительный уровень 0.15.

Видна большая ошибка идентификации при малых значениях t : вместо нулевого значения при $t=0$ оценка $\hat{k}_{\alpha_{\text{opt}}}^{(2_0)}(0) \approx 3.5$, но по мере увеличения аргумента влияние левого краевого условия уменьшается. Аналогичную ошибку можно наблюдать для значений времени, близких к правому концу интервала: $\hat{k}_{\alpha_{\text{opt}}}^{(2_0)}(T) = -0.79$. Для уменьшения таких ошибок необходимо задать краевые условия, исходя из специфики решаемой задачи. Например, для ряда динамических систем (колебательные звенья второго порядка и др.) известно, что $k(0) = 0, k(T) = 0$. Учитывая эту и подобную априорную информацию, целесообразно

краевые условия задать значениями первой производной, что, несомненно, приведет к увеличению точности идентификации. Поэтому перейдем к построению алгоритма вычисления коэффициентов сплайна при таких краевых условиях.

Составим систему уравнений (используя результаты работы [6]) для вычисления значений $M_i = S''_{f,\alpha}(t_i), i = 1, \dots, N$, в случае, когда слева в качестве краевых условий будут задаваться величины первых производных:

$$s_1 = S'(t_1), \quad s_N = S'(t_N). \quad (7)$$

Систему уравнений можно представить в следующем виде:

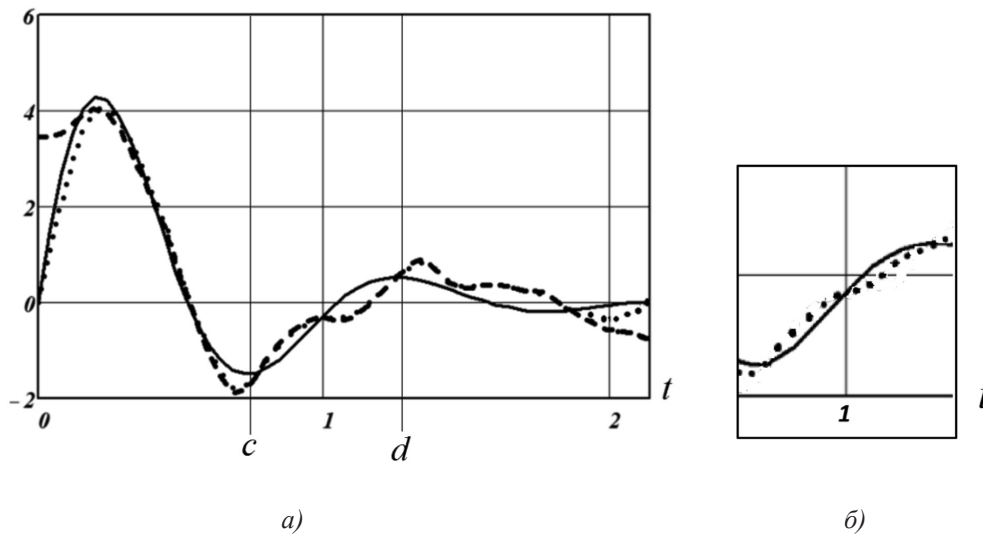
$$\begin{aligned} \lambda_1 M_1 + \mu_1 M_2 + \beta_1 M_3 &= g_1; \\ \mu_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \mu_2 M_3 + \beta_2 M_4 &= g_2; \\ \beta_{i-2} M_{i-2} + \mu_{i-1} M_{i-1} + \lambda_i M_i + \mu_i M_{i+1} + \beta_i M_{i+2} &= g_i, \quad i = 3, \dots, n-2; \\ \beta_{n-3} M_{n-3} + \mu_{n-2} M_{n-2} + \lambda_{n-1} M_{n-1} + \mu_{n-1} M_n &= g_{n-1}; \\ \beta_{n-2} M_{n-2} + \mu_{n-2} M_{n-2} + \lambda_n M_n &= g_n. \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты системы определяются соотношениями, в которых $h_i = t_{i+1} - t_i, i = 1, \dots, N-1$ – шаги между соответствующими узлами сетки

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{h_1}{3} + \alpha \cdot \left(\frac{p_1 + p_2}{h_1^2} \right); \quad \lambda_N = \frac{h_{N-1}}{3} + \alpha \cdot \left(\frac{p_{N-1} + p_N}{h_{N-1}^2} \right); \\ \lambda_i &= \frac{h_{i-1} + h_i}{3} + \alpha \cdot \left(\frac{p_{i-1} + p_i}{h_{i-1}^2} + \frac{p_i + p_{i+1}}{h_i^2} + 2 \frac{p_i}{h_i \cdot h_{i-1}} \right), \quad i = 2, \dots, N-1; \\ \mu_1 &= \frac{h_1}{6} - \alpha \cdot \left[\frac{p_1}{h_1^2} + \frac{p_2}{h_1} \cdot \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \right]; \quad \mu_{N-1} = \frac{h_{N-1}}{6} - \alpha \cdot \left[\frac{p_N}{h_{N-1}^2} + \frac{p_{N-1}}{h_{N-1}} \cdot \left(\frac{1}{h_{N-2}} + \frac{1}{h_{N-1}} \right) \right]; \\ \mu_i &= \frac{h_i}{6} - \frac{\alpha}{h_i} \cdot \left[p_i \cdot \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) + p_{i+1} \cdot \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) \right], \quad i = 2, 3, \dots, N-2; \\ \beta_i &= \frac{\alpha \cdot p_{i+1}}{h_i \cdot h_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, N-2; \\ g_1 &= \frac{\tilde{f}_{H_2} - \tilde{f}_{H_1}}{h_1} - s_1; \quad g_N = \frac{\tilde{f}_{H_{N-1}} - \tilde{f}_{H_N}}{h_{N-1}} + s_N; \quad g_i = \frac{\tilde{f}_{H_{i+1}} - \tilde{f}_{H_i}}{h_i} + \frac{\tilde{f}_{H_{i-1}} - \tilde{f}_{H_i}}{h_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, N-1. \end{aligned}$$

После вычисления решения этой системы коэффициенты сплайна определяются выражениями:

$$\begin{aligned} a_1 &= \tilde{f}_{H_1} - \alpha \cdot p_1 \frac{M_2 - M_1}{h_1}; \quad a_N = \tilde{f}_{H_N} - \alpha \cdot p_N \frac{M_{N-1} - M_N}{h_{N-1}}; \\ a_i &= \tilde{f}_{H_i} - \alpha \cdot p_i \cdot \left[\frac{(M_{i+1} - M_i)}{h_i} - \frac{(M_i - M_{i-1})}{h_{i-1}} \right], \quad i = 2, 3, \dots, N-1; \\ b_i &= \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - h_i \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6}, \quad c_i = \frac{M_i}{2}, \quad d_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$



Оценки импульсной переходной функции

Очевидно, что, вычислив коэффициенты СКС, можно найти первую производную для любого значения $t_i \leq t \leq t_{i+1}$:

$$S'_{f,\alpha}(t) = b_i + \Delta_i(2c_i + 3\Delta_i d_i), \quad \Delta_i = t - t_i.$$

На рисунке, *a* точечной кривой показаны значения ИПФ, вычисленной как производная СКС с краевыми условиями (7). Видно, что точность этой оценки (в граничных точках интервала) существенно выше, чем при использовании краевых условий (5).

Заметим, что и для краевых условий (7) параметр сглаживания можно эффективно выбирать, используя статистический алгоритм, построенный на основе критерия оптимальности и изложенный в работе [6, с. 62–67].

Результаты исследования и их обсуждение

Дескриптивный алгоритм сглаживания. На практике у экспериментатора имеется определенная информация (априорная или апостериорная) о поведении на отдельных интервалах времени либо самой ИПФ, либо выходного сигнала $f_H(t)$ идентифицируемой системы. Очевидно, что учет такой нетривиальной достоверной информации может также привести к уменьшению ошибки идентификации ИПФ. К сожалению, изложенный выше алгоритм вычисления коэффициентов сплайна не позволяет учитывать такую информацию. Изложим подход, позволяющий при построении сплайна учесть некоторые формы задания априорной информации.

Запишем функционал (6) и имеющуюся априорную информацию в дискрет-

ном виде через значения сглаживающего сплайна $S_{f,\alpha}(t_i)$, $i = 1, \dots, N$, которые представим в виде вектора s_α с проекциями $s_{\alpha_i} = S_{f,\alpha}(t_i)$, $i = 1, \dots, N$. Можно показать, что слагаемое $\int_{t_i}^{t_{i+1}} |S''_{f,\alpha}(t)|^2$ в выражении (6) можно представить выражением:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} |S''_{f,\alpha}(t)|^2 = s_\alpha^T Q s_\alpha, \quad (9)$$

где матрица Q имеет размеры $N \times N$ и определяется как $Q = H^T A H$. Элементы матрицы H размером $(N-2) \times N$ определяются выражениями:

$$H_{i,i} = \frac{1}{h_i}, \quad H_{i,i+1} = \left[\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right],$$

$$H_{i,i+2} = \frac{1}{h_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, N-2,$$

а элементы трехдиагональной матрицы A размером $(N-2) \times (N-2)$ определяются выражениями:

$$A_{i,i} = \frac{h_i + h_{i+1}}{3}, \quad i = 1, \dots, N-2;$$

$$A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = -\frac{h_{i+1}}{6}, \quad i = 1, \dots, N-3.$$

Введя диагональную матрицу весов P с элементами $P_{i,i} = p_i^{-1}$, $i = 1, \dots, N$, функционал (6) (с учетом (9)) можно записать в виде:

$$F_\alpha(s) = s^T (\alpha Q + P) s - 2s^T P \tilde{f} + \tilde{f}^T P \tilde{f}. \quad (10)$$

Перейдем к построению системы ограничений, позволяющей задать априорную информацию об идентифицируемой ИПФ. Наиболее универсальной формой задания (хорошо согласующейся с функционалом (10)) является система линейных неравенств вида:

$$Ds \leq d, \quad (11)$$

где размеры матрицы D и вектора d зависят от вида априорной информации. Например, информацию о знаках ИПФ или ее производных можно задать с помощью конечных разностей соответствующего порядка [8]. Пример такого задания приводится ниже.

Тогда значения дескриптивного (от глагола «описывать») сглаживающего сплайна определяются как решение задачи условной минимизации:

$$\min [s^T (\alpha Q + P)s - 2s^T P\tilde{f} + \tilde{f}^T P\tilde{f}] \quad (12)$$

при ограничениях:

$$Ds \leq d. \quad (13)$$

После решения этой вариационной задачи по полученным значениям s_α^* дескриптивного сплайна строится интерполяционный сплайн, производная от которого является оценкой для идентифицируемой ИПФ динамической системы.

Заметим, что в состав многих математических пакетов входят модули (например, в пакете MathCAD это функция *Minimize* и блок решений *Given*), позволяющие решать задачи условной оптимизации большой размерности [9].

Результаты численных исследований. Для исследования изложенного подхода к построению дескриптивного сплайна вернемся к ранее рассмотренному примеру. Из рисунка, a видно, что на интервале $[c, d]$ построенная оценка ИПФ с условиями (7) (точечная кривая кое-где совпадает со штриховой кривой – краевые условия (5)) должна быть неубывающей функцией. Колебания этой оценки обусловлены влиянием остаточного (после сглаживания) шума измерения. Поэтому зададим эту информацию (по сути дела уже апостериорную) в виде системы ограничений (13) для проекций вектора ИПФ с номерами $J1, J1+1, \dots, J2$, соответствующих интервалу $[c, d]$. Тогда ненулевые элементы матрицы D с размерами $(N-2) \times N$ задаются через конечные

разности второго порядка следующими соотношениями:

$$D_{i,i} = -1, D_{i,i+1} = 2, D_{i,i+2} = -1, i = J1, \dots, J2 - 2.$$

Остальные элементы матрицы D равны 0. Вектор d размерности $N - 2$ является нулевым вектором. Очевидно, что описанные ограничения соответствуют разностям второго порядка $s_{i+2} - 2s_{i+1} + s_i \geq 0$, $i = J1, \dots, J2 - 2$, т.е. значения сплайна для индексов $i = J1, \dots, J2$ не убывают.

На рисунке, b в увеличенном масштабе точечной кривой показаны значения оценки ИПФ, полученной дифференцированием интерполяционного сплайна, построенного по значениям s_α^* , которые являются решением вариационной задачи (12), (13). Видно, что новая оценка ИПФ на интервале $[c, d]$ является неубывающей функцией, что соответствует физическим представлениям об идентифицируемой ИПФ, и эта оценка имеет меньшую ошибку идентификации.

Заключение

Предложенный подход к учету как априорной, так и апостериорной информации об идентифицируемой функции позволяет существенно повысить точность идентификации, но, самое главное, построить оценку, которая удовлетворяла бы ограничениям, сформированным на основе имеющейся у экспериментатора информации об идентифицируемой ИПФ.

Список литературы

1. Сидоров Д.Н. Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. 293 с.
2. Бойков И.В., Кривулин Н.П. Аналитические и численные методы идентификации динамических систем: монография. Пенза: ПГУ, 2016. 396 с.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 285 с.
4. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 345 с.
5. Wang Y. Smoothing Splines Methods and Applications. Ser. Monographs on Statistics and Applied Probability v. 121. A Chapman & Hall book. 2011. 347 p.
6. Воскобойников Ю.Е., Преображенский Н.Г., Седельников А.И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984. 238 с.
7. Воскобойников Ю.Е., Боева В.А. Новый устойчивый алгоритм непараметрической идентификации технических систем // Современные наукоемкие технологии. 2019. № 5. С. 25–29.
8. Пименов В.Г. Численные методы. Разностные схемы решения уравнений. М.: Юрайт, 2019. 269 с.
9. Воскобойников Ю.Е., Задорожный. Основы вычислений и программирования в пакете MATHCAD PRIME. СПб.: Лань, 2016. 224 с.