УДК 517.91:519.6

КОМПЬЮТЕРНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Ромм Я.Е.

Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) ФГБОУ ВО «РГЭУ (РИНХ)», Таганрог, e-mail: romm@list.ru

Необходимые и достаточные условия устойчивости по Ляпунову сформулированы с учетом асимптотического поведения отношения возмущения решения к варьируемому возмущению начальных значений в ограничениях общего вида. Вытекающие отсюда признаки устойчивости адаптированы к специфике нелинейных, автономных и линейных систем. Признаки ориентированы на компьютерную реализацию, но могут применяться для аналитического исследования. В случае автономных систем правые части трактуются как аналоги функций Ляпунова, что приводит к критериям, использующим сопоставление знаков компонентов решения, его первой и второй производных на полуоси. В случае линейных однородных систем с постоянной матрицей коэффициентов те же критерии достаточно применять лишь к одному решению с произвольно выбранными ненулевыми компонентами начального вектора. Критерии доказаны аналитически, иллюстрированы примерами, практически апробированы с помощью численных экспериментов. Эксперименты с программным формированием признаков устойчивости выполнены для систем различных классов. Приведены коды программ, на основе которых выполнялись эксперименты, анализируется соответствие практических результатов и теоретических оценок устойчивости. Численное моделирование использует комплекс предложенных критериев, выполняется по ходу решения системы, процесс моделирования применим для мониторинга устойчивости автоматизированных систем управления.

Ключевые слова: критерии устойчивости по Ляпунову, аналоги функций Ляпунова, компьютерная реализация анализа устойчивости, численное моделирование устойчивости, системы обыкновенных дифференциальных уравнений

COMPUTER-ORIENTED STABILITY ANALYSIS OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL SYSTEMS

Romm Ya.E.

A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) of Rostov State University of Economics, Taganrog, e-mail: romm@list.ru

The necessary and sufficient Lyapunov stability conditions are formulated taking into account the asymptotic behavior of the ratio of the solution perturbation to the varied perturbation of the initial values in general constraints. The resulting signs of stability are adapted to the specifics of nonlinear, autonomous and linear systems. The signs are computer-oriented, but can be used for analytical research. In the case of autonomous systems, the right-hand sides are treated as analogues of Lyapunov functions, which leads to criteria using a comparison of the signs of the solution components, its first and second derivatives on the semi-axis. In the case of linear homogeneous systems with a constant matrix of coefficients, the same criteria can be applied to only one solution with arbitrarily selected nonzero components of the initial vector. The criteria are proved analytically, illustrated by examples, practically tested using numerical experiments. Experiments with the software formation of stability signs were performed for systems of various classes. The codes of the programs on the basis of which the experiments were carried out are given, the correspondence of practical results and theoretical stability estimates is analyzed. Numerical modeling uses a set of proposed criteria, is performed in the course of solving the system, the modeling process is applicable for monitoring the stability of automated control systems.

Keywords: Lyapunov stability criteria, analogues of Lyapunov functions, computer implementation of stability analysis, numerical simulation of stability, systems of ordinary differential equations

Анализ устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) опирается на методы качественной теории [1, 2] и теории автоматического управления [3]. Компьютеризация системных исследований приводит к вопросу о применении в этой области средств вычислительной техники. Подход к анализу устойчивости на основе численного моделирования был предложен в [4, 5], исследование продолжено, его современное состояние отражено в [6, 7]. Известные методы, если они не относятся к специальным видам ОДУ, используют различные способы вычисления функций Ляпунова [8, 9]. В излагаемой ниже работе подход опирается на разностное (в общем случае приближенное) решение системы, с выполнением которого совмещается численное моделирование устойчивости. Предварительные результаты приведены для линейных и нелинейных ОДУ в [10, 11]. В некоторых разновидностях предлагаемые методы дают возможность аналитического применения, в целом трактуются как компьютерно-ориентированные. Их построение опирается на рекуррентные и аддитивные преобразования разностных методов, для анализа устойчивости используются также функции правой части ОДУ и аналитическое выражение производных этих функций. Цель работы – представить целостные способы анализа устойчивости, ориентированные на компьютерную реализацию, изложить обоснование и указать ограничения. Требуется показать их применимость в различных условиях для нелинейных, автономных и линейных систем, привести примеры и результаты численных экспериментов. Излагаемые признаки могут входить частью в основу сравнительно доступных средств анализа для автоматизированного контроля устойчивости.

В работе ставится цель построить компьютерно-ориентированный метод анализа устойчивости в смысле Ляпунова решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, который имеет следующие отличия от известных аналогов.

1. Метод инвариантен относительно класса дифференциальных уравнений, применим к нелинейным, автономным и линейным системам, при этом позволяет учитывать специфику системы.

2. Предложенный подход не использует построение функций Ляпунова, не опирается на первый и второй методы Ляпунова.

3. Метод включает алгоритмизацию, сравнительно простую программную реализацию и может использоваться для численного моделирования по ходу решения системы.

4. Отличия дают преимущество относительно известных способов компьютерного анализа устойчивости, позволяющее достигать инвариантности достоверной оценки устойчивости в условиях сходимости метода приближенного решения системы.

Цель работы включает математическое обоснование предложенных критериев, выполнение их алгоритмизации. Кроме того, требуется представить развернутый численный эксперимент, иллюстрирующий практическую реализуемость комплекса предложенных средств компьютерного анализа устойчивости.

Исходные соотношения. Рассматривается задача Коши для системы

$$Y' = F(t,Y),\ Y(t_0)=Y_0, \quad (1)$$

где

$$F(t,Y)=(f_1(t,Y), f_2(t,Y),\ldots, f_n(t,Y)),$$

$$Y=(y_1(t), y_2(t),\ldots, y_n(t)),\ Y_0=(y_{01}, y_{02},\ldots, y_{0n}).$$

Предполагается, что существует $\delta_0>0$, такое, что на полупрямой $[t_0,\infty)$ выполнены все условия существования и единственности для невозмущенного решения и для каждого его возмущения $Y=\tilde{Y}(t)$, $Y(t_0)=\tilde{Y}_0$, с начальным вектором в границах $\left\|\tilde{Y}_0-Y_0\right\|\le\delta_0$. Применяются канонические согласованные нормы матрицы и вектора. По умолчанию $\left\|\tilde{Y}(t)\right\|=\max\limits_{1\le k\le n}\left|\tilde{y}_k(t)\right|$, в численных экспериментах используется эвклидова норма. Предполагается, что в области $R_0:\left\{t_0\le t<\infty;\ \forall\, Y(t),\tilde{Y}(t):\left\|\tilde{Y}_0-Y_0\right\|\le\delta_0\right\}$ функция $F(t,Y)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема (в t_0 – справа), компоненты функции удовлетворяют неравенству:

$$\left|f_k(t,Y)-f_k(t,\tilde{Y})\right|\le L\left|y_k-\tilde{y}_k\right|,\ L=\text{const}\ \forall t\in[t_0,\infty),\ \forall\,(t,Y),(t,\tilde{Y})\in R_0,\ \forall k\in\overline{1,n}. \quad (2)$$

Из (2) следует условие Липшица $\left\|F(t,Y)-F(t,\tilde{Y})\right\|\le\tilde{L}\left\|Y-\tilde{Y}\right\|$, $\tilde{L}=\text{const}$. В этих условиях определение устойчивости упрощено: решение $Y=Y(t)$ устойчиво, если $\forall\varepsilon>0$ найдется $\Delta,\ 0<\Delta\le\delta_0$, такое, что $\left\|\tilde{Y}_0-Y_0\right\|\le\Delta$ влечет $\left\|\tilde{Y}(t)-Y(t)\right\|\le\varepsilon\ \forall t\in[t_0,\infty)$. Решение асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и найдется $\Delta_0,\ 0<\Delta_0\le\Delta$, такое, что из неравенства $\left\|\tilde{Y}_0-Y_0\right\|\le\Delta_0$ следует $\tilde{Y}(t)-Y(t)\to 0$, если $t\to\infty$. Метод Эйлера решения задачи (1)

$$Y_{i+1}=Y_i+F(t_i,Y_i)h, \quad (3)$$

включая запись с остаточным членом, на произвольном отрезке $[t_0,t]$, применяется в предположении, что значение $t\in[t_0,\infty)$ является произвольно фиксированным, при этом индекс i неограниченно растет одновременно с убыванием равномерного шага:

$$t=\text{const},\ t=t_{i+1},\ h=(t_{i+1}-t_0)/(i+1),\ i=0,1,\ldots,\ t_{k+1}=t_k+h,\ k\in\overline{0,i}. \quad (4)$$

В форме с остаточным членом метод (3) примет вид $Y_{i+1}=Y_i+F(t_i,Y_i)h+Q_i$, $Q_i=(q_{1i},q_{2i},\ldots,q_{ni})$, где i, h из (4), q_{ki} – остаточный член формулы Тейлора для k-го компонента приближения: $q_{ki}=2^{-1}f_k'(\xi_{ki},Y(\xi_{ki}))h^2$, $t_i<\xi_{ki}<t_{i+1}$, аналогично для возмущенного

решения, $\tilde{Y}_{i+1} = \tilde{Y}_i + F(t_i, \tilde{Y}_i)h + \tilde{Q}_i$, $\tilde{Q}_i = (\tilde{q}_{1i}, \tilde{q}_{2i}, \ldots, \tilde{q}_{ni})$, $\tilde{q}_{ki} = 2^{-1} f_k'(\tilde{\xi}_{ki}, \tilde{Y}(\tilde{\xi}_{ki}))h^2$, $t_i < \tilde{\xi}_{ki} < t_{i+1}$, $k \in \overline{1,n}$. Предварительно предполагается, что

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty),\ \forall k \in \overline{1,n}, \tag{5}$$

в дальнейшем ограничение (5) будет ослаблено или снято. Исходными являются соотношения $\tilde{y}_{k(i+1)} - y_{k(i+1)} = \tilde{y}_{ki} - y_{ki} + \dfrac{f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)}{\tilde{y}_{ki} - y_{ki}} (\tilde{y}_{ki} - y_{ki}) h + w_{ki}$, $w_{ki} = \tilde{q}_{ki} - q_{ki}$, или

$$\tilde{y}_{k(i+1)} - y_{k(i+1)} = (1 + D_i^{(k)} h)(\tilde{y}_{ki} - y_{ki}) + w_{ki},\ D_i^{(k)} = (f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)) / (\tilde{y}_{ki} - y_{ki}). \tag{6}$$

С учетом (2) при ограничении (5) выполняется неравенство:

$$\left| f_k(t, Y) - f_k(t, \tilde{Y}) \right| / \left| y_k(t) - \tilde{y}_k(t) \right| \leq L,\ L = \text{const}\ \forall t \in [t_0, \infty),\ \forall (t, Y), (t, \tilde{Y}) \in R_0,\ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{7}$$

Отсюда

$$\left| D_{i-\ell}^{(k)} \right| \leq L,\ L = \text{const},\ \forall i = 0, 1, \ldots, \forall \ell \in \overline{0,i},\ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{8}$$

Рекуррентное преобразование (6) влечет

$$\tilde{y}_{k(i+1)} - y_{k(i+1)} = \prod_{\ell=0}^{i} (1 + D_{i-\ell}^{(k)} h)(\tilde{y}_{k0} - y_{k0}) + R_{0i}^{(k)},\ R_{0i}^{(k)} = \sum_{r=0}^{i-1} \prod_{\ell=0}^{r} (1 + D_{i-\ell}^{(k)} h) w_{k(i-r-1)} + w_{ki}, \tag{9}$$

где h соответствует (4), w_{ki} из (6), $k \in \overline{1,n}$. Для дальнейшего приводятся некоторые утверждения из [10, 11].

Лемма 1. *В рассматриваемых условиях* $\lim\limits_{i \to \infty} R_{0i}^{(k)} = 0\ \ \forall t \in [t_0, \infty), \forall k \in \overline{1,n}$.

Доказательство. Для $\forall t \in [t_0, \infty)$, $\forall \tilde{t} \in [t_0, t]$ $\exists C_0 = C_0(t)$: $\left\| F_t'(\tilde{t}, Y) \right\| \leq C_0$, $\left\| F_t'(\tilde{t}, \tilde{Y}) \right\| \leq C_0$. Поэтому $\left| w_{kr} \right| \leq C_0 h^2\ \ \forall r \in \overline{0,i}$, $i = 1, 2, \ldots$, $\forall k \in \overline{1,n}$. Из (9) с учетом (8) $\left| R_{0i}^{(k)} \right| \leq \sum\limits_{\ell=0}^{i} (1 + Lh)^{\ell} C_0 h^2$, следовательно, $\left| R_{0i}^{(k)} \right| \leq C_0 L^{-1} ((1 + Lh)^{i+1} - 1) h$. Отсюда $\left| R_{0i}^{(k)} \right| \leq C_0 L^{-1} ((1 + Lh)^{\frac{t - t_0}{h}} - 1) h$, тем более, $\left| R_{0i}^{(k)} \right| \leq C_0 L^{-1} (e^{L(t - t_0)} - 1)(t - t_0) / (i + 1)$, и $R_{0i}^{(k)} \to 0$ при $i \to \infty\ \ \forall t \in [t_0, \infty)$, $\forall k \in \overline{1,n}$. Лемма доказана.

Следствие 1. В тех же условиях

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \lim_{i \to \infty} \prod_{\ell=0}^{i} (1 + D_{i-\ell}^{(k)} h)(\tilde{y}_{k0} - y_{k0}) \quad \forall t \in [t_0, \infty),\ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{10}$$

Лемма 2. *В рассматриваемых условиях для устойчивости решения задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы существовало* Δ_1, $0 < \Delta_1 \leq \delta_0$, *такое, что* $\forall\ \tilde{Y}(t)$, $\tilde{Y}(t_0) = \tilde{Y}_0$, *при ограничении* $\left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \leq \Delta_1$ *выполняется неравенство*

$$\left| \lim_{i \to \infty} \prod_{\ell=0}^{i} (1 + D_{i-\ell}^{(k)} h) \right| \leq C^{(1)},\ C^{(1)} = \text{const},\ \forall t \in [t_0, \infty),\ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{11}$$

Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предыдущее утверждение и существовало $\Delta_2 \le \Delta_1$, такое, что $\left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \Delta_2$ влечет

$$\lim_{t\to\infty} \left| \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} (1 + D_{i-\ell}^{(k)} h) \right| = 0 \ \ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{12}$$

На $[t_0, t]$ частичное произведение $\prod_{\ell=0}^{i}(1 + D_{i-\ell}^{(k)} h)$ при изменении i меняет одновременно все свои сомножители и h в каждом из них согласно (4).

Расширенные условия устойчивости. Из (10)

$$(\tilde{y}_k(t) - y_k(t)) / (\tilde{y}_{k0} - y_{k0}) = \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} (1 + D_{i-\ell}^{(k)} h) \ \ \forall t \in [t_0, \infty), \ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{13}$$

Следствие 2. При $\tilde{y}_{k0} \ne y_{k0}$ формулировка и утверждение леммы 2 дословно сохраняются при замене (11) на соотношение

$$\left| (\tilde{y}_k(t) - y_k(t)) / (\tilde{y}_{k0} - y_{k0}) \right| \le C^{(1)}, \ C^{(1)} = \text{const}, \ \forall t \in [t_0, \infty), \ \forall k \in \overline{1,n}, \tag{14}$$

и (12) – на соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \left| (\tilde{y}_k(t) - y_k(t)) / (\tilde{y}_{k0} - y_{k0}) \right| = 0 \ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{15}$$

Частное в (14) выражает отношение возмущения решения именно к вызвавшему его возмущению начальных значений при всех их вариациях в границах $\left| \tilde{y}_{k0} - y_{k0} \right| \le \Delta_1$ выполняется $\left| (\tilde{y}_k(t) - y_k(t)) / (\tilde{y}_{k0} - y_{k0}) \right| = O(1) \ \ \forall t \in [t_0, \infty), \ \forall k \in \overline{1,n}$.

Предварительно предполагалось выполнение (5). Требуется показать, что обе леммы и следствия сохраняются при ослаблении или исключении этого ограничения.

Лемма 3. *Пусть для решений $Y(t)$, $\tilde{Y}(t)$ задачи (1) рассматриваются $k \in \overline{1,n}$, L из (2), t_i из (4) и произвольные значения $\tilde{y}_k(t_i)$, $y_k(t_i)$, включая случай $t_i \to \tilde{t}$, где $\tilde{y}_k(\tilde{t}) = y_k(\tilde{t})$, при этом в некоторой окрестности $\tilde{t}$ выполнено $\tilde{y}_k(t) \ne y_k(t) \ \ \forall t \ne \tilde{t}$. В этих условиях*

$$\lim_{t_i\to\tilde{t}} ((f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)) / (\tilde{y}_k(t_i) - y_k(t_i))) =$$

$$= \lim_{i\to\infty} ((f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)) / (\tilde{y}_k(t_i) - y_k(t_i))) = \beta_k, \ \left| \beta_k \right| \le L, \ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{16}$$

Доказательство. В достаточно малой окрестности $\tilde{t}$ с учетом $\tilde{y}_k(t) \ne y_k(t) \ \ \forall t \ne \tilde{t}$ и (2) выполняется (7). Функции $F(x, Y)$, $F(x, \tilde{Y})$ и $Y(t)$, $\tilde{Y}(t)$ из (1) определены и непрерывны на $[t_0, \infty)$, поэтому $\exists \lim_{t\to\tilde{t}} (\tilde{y}_k(t) - y_k(t)) = c_{0k}$ и $\exists \lim_{t\to\tilde{t}} (f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)) = c_{1k}$, разности под знаками пределов конечны на любом отрезке $[t_0, T]$, включающем $\tilde{t}$ вместе с рассматриваемой окрестностью. Так что $\left| c_{0k} \right| < \infty$, кроме того, $\left| c_{1k} \right| \le L \left| c_{0k} \right|$ вследствие (2). Отсюда $\exists \lim_{t_i\to\tilde{t}} ((f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)) / (\tilde{y}_k(t_i) - y_k(t_i))) = c_{1k} / c_{0k}$, где $\left| c_{1k} / c_{0k} \right| \le L$. В частности, для $t_i \to \tilde{t}$, $t_i \ne \tilde{t}$, $i \to \infty$, $\lim_{t_i\to\tilde{t}} ((f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)) / (\tilde{y}_k(t_i) - y_k(t_i))) = \beta_k$, $\beta_k = c_{1k} / c_{0k}$. Лемма доказана.

Лемма 4. *В условиях леммы 3*

$$\exists \lim_{i\to\infty} ((f_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) - f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell})) / (\tilde{y}_k(t_{i-\ell}) - y_k(t_{i-\ell}))) =$$

$$= \beta_{ek}, \ \left| \beta_{ek} \right| \le L \ \ \forall \ell \in \overline{1, i}, \ \forall k \in \overline{1, n}. \tag{17}$$

Для **доказательства** достаточно заметить, что относительно отношения под знаком предела в (17) с точностью до обозначений сохраняются рассуждения и оценки доказательства леммы 3. Поэтому $\forall \ell \in \overline{1,i} \ \ \exists \lim_{t_{i-\ell}\to\tilde{t}} ((f_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) - f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell})) / (\tilde{y}_k(t_{i-\ell}) - y_k(t_{i-\ell}))) = \beta_{ek}$, $\left| \beta_{ek} \right| \le L$, $\forall k \in \overline{1,n}$, отсюда следует (17).

Условия леммы 3 исключают неустранимые особенности в $D_i^{(k)}$ и $D_{i-\ell}^{(k)}$.

Следствие 3. Соотношение (10) будет сохраняться на произвольном отрезке $[t_0, t]$, если условия леммы 1 расширить до условий леммы 3 и, кроме того, допускать любое конечное число точек, в которых на этом отрезке нарушается ограничение (5).

Доказательство. С учетом (16), (17) при однократном нарушении (5) ни одно из соотношений доказательства леммы 1 в расширенных условиях не изменится, поэтому (10) будет сохраняться. Если на $[t_0, t]$ количество точек $\tilde{t}_e$, где $\tilde{y}_k(\tilde{t}_e) = y_k(\tilde{t}_e)$ конечно, то они взаимно отделены. В достаточно малой окрестности каждой из них нарушение ограничения (5) однократно, следовательно, (10) сохраняется. Следствие доказано.

Из следствия 3, соотношения (10) и леммы 2 вытекает

Теорема 1. *В исходных предположениях, с тем изменением, что на произвольном отрезке $[t_0, t]$ допускается любое конечное число нарушений ограничения (5), для устойчивости, а также для асимптотической устойчивости решения задачи (1) сохраняются необходимые и достаточные условия леммы 2, включая соотношения (11), (12).*

Согласно (13) имеет место

Следствие 4. Теорема 1 распространяется на условия устойчивости следствия 2, включая соотношения (14), (15) при $\tilde{y}_{k0} \neq y_{k0}\ \forall k \in \overline{1,n}$.

Условия устойчивости можно дополнительно расширить. Пусть решение системы (1) устойчиво. Пусть произвольно зафиксировано k, $\tilde{y}_{k0} \neq y_{k0}$ и рассматривается $[t_0, t]$ $\forall t \in [t_0, \infty)$. Пусть сохраняются все исходные условия, с тем исключением, что множество точек $\tilde{t} \in [t_0, t]$, в которых нарушается (5), $\tilde{y}_k(\tilde{t}) = y_k(\tilde{t})$, является произвольным. Вне данного множества $\forall \tilde{t}_e \in [t_0, t]$, $\tilde{t}_e \neq \tilde{t}$, для разности $\tilde{y}_k(\tilde{t}_e) - y_k(\tilde{t}_e)$ согласно следствию 1 сохраняется (10). В каждой такой точке необходимо выполняется (11) и (14), при этом в Δ_1-окрестности y_{k0} константа $C^{(1)}$ не меняется. В точках $\tilde{t} \in [t_0, t]$, где $\tilde{y}_k(\tilde{t}) = y_k(\tilde{t})$, функция $(\tilde{y}_k(\tilde{t}) - y_k(\tilde{t}))/(\tilde{y}_{k0} - y_{k0})$ равна нулю. По непрерывности этой функции каждое $\tilde{t}$ можно заключить в столь малый интервал $V(\tilde{t})$, что $\left|(\tilde{y}_k(t_e) - y_k(t_e))/(\tilde{y}_{k0} - y_{k0})\right| \leq C^{(1)}$ $\forall t_e \in V(\tilde{t})$. В результате все точки отрезка $[t_0, t]$ покрываются системой интервалов $\bigcup V(\tilde{t}, \tilde{t}_e)$, на каждом из которых выполнено (14). По лемме Бореля из системы $\bigcup V(\tilde{t}, \tilde{t}_e)$ можно выбрать конечную подсистему, покрывающую $[t_0, t]$. На каждом интервале конечного покрытия, следовательно, во всех точках $[t_0, t]$, для выбранных k и t выполнено (14). Рассуждения сохраняются $\forall k \in \overline{1,n}$ с одной и той же $C^{(1)} = \text{const}$. Ввиду произвольности t отсюда следует, что в случае устойчивости (14) с необходимостью выполнено $\forall t \in [t_0, \infty)$, $\forall k \in \overline{1,n}$. Такое обоснование необходимости опирается на (10), что априори предполагает непрерывную дифференцируемость $F(t, Y)$. В то же время выполнение (14) является достаточным условием устойчивости без этого предположения. Если $\left|\tilde{y}_k(t) - y_k(t)\right| \leq C^{(1)}\left|\tilde{y}_{k0} - y_{k0}\right|$, $C^{(1)} = \text{const}$, $0 < C^{(1)}$, $\forall t \in [t_0, \infty)$, $\forall k \in \overline{1,n}$, $\tilde{y}_{k0} - y_{k0} \neq 0$, то $\forall \varepsilon > 0$ выполнено $\left|\tilde{y}_k(t) - y_k(t)\right| \leq \varepsilon$ $\forall k \in \overline{1,n}$, $\forall t \in [t_0, \infty)$, лишь только $C^{(1)}\left|\tilde{y}_{k0} - y_{k0}\right| \leq \varepsilon$. Отсюда $\left\|\tilde{Y}(t_0) - Y(t_0)\right\| \leq \Delta_1$, где $\Delta_1 \leq \varepsilon / C^{(1)}$, влечет $\left\|\tilde{Y}(t) - Y(t)\right\| \leq \varepsilon\ \forall t \in [t_0, \infty)$, и (14) – достаточное условие устойчивости без отмеченного ограничения. Из изложенного вытекает

Теорема 2. *Пусть сохраняются все исходные условия, включая непрерывную дифференцируемость $F(t, Y)$ из (1), со следующим изменением: на произвольном отрезке $[t_0, t]$, $\forall k \in \overline{1,n}$ допускается любое множество точек $\tilde{t}$, в которых $\tilde{y}_k(\tilde{t}) = y_k(\tilde{t})$. Тогда для устойчивости решения задачи (1) необходимо, чтобы существовало такое Δ_1, $0 < \Delta_1 \leq \delta_0$, что $\forall\ \tilde{Y}(t), \tilde{Y}(t_0) = \tilde{Y}_0$, при ограничении $\left\|\tilde{Y}_0 - Y_0\right\| \leq \Delta_1$, $\tilde{y}_{k0} \neq y_{k0}\ \forall k \in \overline{1,n}$ верно неравенство*

$$\left\|\left\{(\tilde{y}_k(t) - y_k(t))/(\tilde{y}_{k0} - y_{k0})\right\}_{k=1}^{n}\right\| \leq C^{(1)},\ C^{(1)} = \text{const}, \forall t \in [t_0, \infty). \quad (18)$$

Эти же условия являются достаточными условиями устойчивости без предположения о непрерывной дифференцируемости $F(t, Y)$ из (1). Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы в соответственных условиях устойчивости существовало $\Delta_2 \leq \Delta_1$, такое, что $\left\|\tilde{Y}_0 - Y_0\right\| \leq \Delta_2$ влечет

$$\lim_{t \to \infty}\left\|\left\{(\tilde{y}_k(t) - y_k(t))/(\tilde{y}_{k0} - y_{k0})\right\}_{k=1}^{n}\right\| = 0. \quad (19)$$

Остается доказать утверждение относительно (19). Поскольку $\tilde{y}_{k0} - y_{k0} \neq 0 \ \forall k \in \overline{1,n}$, то (19) выполняется тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{t\to\infty} \tilde{y}_k(t) - y_k(t) = 0 \ \forall k \in \overline{1,n}$, поэтому утверждение равносильно определению асимптотической устойчивости. Теорема доказана.

Следствие 5. Пусть система (1) имеет точку покоя. Теорема 2 дает необходимые и достаточные условия ее устойчивости при $Y(t) = \overline{0} \ \ \forall t \in [t_0, \infty)$, $Y_0 = \overline{0}$, (18) переходит в соотношение

$$\left\| \left\{ \tilde{y}_k(t) / \tilde{y}_{k0} \right\}_{k=1}^{n} \right\| \leq C, \ C = \text{const}, \ \forall t \in [t_0, \infty). \tag{20}$$

Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости точки покоя получаются из этой теоремы при переходе (19) в соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \left\{ \tilde{y}_k(t) / \tilde{y}_{k0} \right\}_{k=1}^{n} \right\| = 0. \tag{21}$$

С учетом (2) имеет место

Следствие 6. В условиях теоремы 2 для устойчивости решения задачи (1) необходимо, чтобы существовало Δ_F, $0 < \Delta_F \leq \delta_0$, такое, что $\forall \tilde{Y}(t)$, $\tilde{Y}(t_0) = \tilde{Y}_0$, при ограничении $0 < \left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \leq \Delta_F$ выполняется неравенство

$$\left\| \left\{ (f_k(t,\tilde{Y}) - f_k(t,Y)) / (\tilde{y}_{k0} - y_{k0}) \right\}_{k=1}^{n} \right\| \leq C_F, \ C_F = \text{const}, \ \forall t \in [t_0, \infty). \tag{22}$$

Для асимптотической устойчивости необходимо, чтобы решение было устойчиво и существовало $\tilde{\Delta}_F \leq \Delta_F$, такое, что $0 < \left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \leq \tilde{\Delta}_F$ влечет

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \left\{ (f_k(t,\tilde{Y}) - f_k(t,Y)) / (\tilde{y}_{k0} - y_{k0}) \right\}_{k=1}^{n} \right\| = 0. \tag{23}$$

В самом деле, согласно (2) $\left| (f_k(t,\tilde{Y}) - f_k(t,Y)) / (\tilde{y}_{k0} - y_{k0}) \right| \leq L \left| (\tilde{y}_k - y_k) / (\tilde{y}_{k0} - y_{k0}) \right|$, $L = \text{const} \ \forall t \in [t_0, \infty)$, и в случае устойчивости, с учетом (18) $\left| (f_k(t,\tilde{Y}) - f_k(t,Y)) / (\tilde{y}_{k0} - y_{k0}) \right| \leq LC^{(1)}$, $C^{(1)} = \text{const} \ \forall t \in [t_0, \infty), \forall k \in \overline{1,n}$. Отсюда $\left\| \left\{ (f_k(t,\tilde{Y}) - f_k(t,Y)) / (\tilde{y}_{k0} - y_{k0}) \right\}_{k=1}^{n} \right\| \leq C_F$, $C_F = LC^{(1)}, C_F = \text{const}$. Аналогично доказывается (23).

Замечание 1. В условиях теоремы 2 в случае устойчивости соотношение (22) влечет равномерную на полуоси оценку правой части (1): $\left| f_k(t,\tilde{Y}) - f_k(t,Y) \right| \leq C_F \left| \tilde{y}_{k0} - y_{k0} \right|$, и $\forall \varepsilon > 0$ выполнено $\left| f_k(t,\tilde{Y}) - f_k(t,Y) \right| \leq \varepsilon \ \forall t \in [t_0, \infty)$, $\forall k \in \overline{1,n}$, лишь только $C_F \left| \tilde{y}_{k0} - y_{k0} \right| \leq C_F \Delta_F$, где $\Delta_F \leq \varepsilon C_F^{-1}$. Таким образом, необходимым условием устойчивости является соотношение

$$\left\| \left\{ f_k(t,\tilde{Y}) - f_k(t,Y) \right\}_{k=1}^{n} \right\| \leq \varepsilon \ \forall t \in [t_0, \infty), \forall \tilde{Y}(t), \tilde{Y}(t_0) = \tilde{Y}_0, 0 < \left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \leq \Delta_F. \tag{24}$$

Замечание 2. Для асимптотической устойчивости необходимо, чтобы решение было устойчиво и существовало $\tilde{\Delta}_F \leq \Delta_F$, такое, что $0 < \left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \leq \tilde{\Delta}_F$ влечет

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \left\{ f_k(t,\tilde{Y}) - f_k(t,Y) \right\}_{k=1}^{n} \right\| = 0. \tag{25}$$

Утверждение следует из того, что $(f_k(t,\tilde{Y}) - f_k(t,Y)) / (\tilde{y}_{k0} - y_{k0}) \to 0$ тогда и только тогда, когда $f_k(t,\tilde{Y}) - f_k(t,Y) \to 0$. Необходимость (25) следует также из условия Липшица.

Теорема 2, следствия и замечания применимы к нелинейным, автономным и линейным системам.

Условия устойчивости в случае автономной системы. Пусть для задачи Коши

$$Y' = F(Y),\ Y(t_0) = Y_0, \tag{26}$$

где $F(Y) = (f_1(Y), f_2(Y), \ldots, f_n(Y))$, $Y = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$, $Y_0 = (y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n})$, сохраняются все условия теоремы 2. В семейство решений (26) вместе с $Y = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ всегда входит сдвиг $Y(t+\Delta) = (y_1(t+\Delta), y_2(t+\Delta), \ldots, y_n(t+\Delta))$ при любом $\Delta = \text{const}$. Если в (18) положить $\tilde{y}_{k0} - y_{k0} = \Delta,\ k \in 1, n$, то применительно к (26), в силу единственности решения, $\tilde{y}_k(t) = y_k(t+\Delta),\ k \in \overline{1,n}$. При таких начальных значениях в случае устойчивости условие $0 < \left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \Delta_1$ теоремы 2, или, $0 < |\Delta| \le \Delta_1$, влечет

$$\left\| \left\{ (y_k(t+\Delta) - y_k(t)) / \Delta \right\}_{k=1}^{n} \right\| \le C_1,\ C_1 = \text{const},\ \forall \Delta,\ 0 < |\Delta| \le \Delta_1, \forall t \in [t_0, \infty). \tag{27}$$

Таким образом, (27) – необходимое условие устойчивости решения задачи (26).

Поскольку выполнены условия теоремы о среднем, то

$|y_k(t+\Delta) - y_k(t)| = |y_k'(\bar{t}_k)| \times |\Delta|,\ t - |\Delta| < \bar{t}_k < t + |\Delta|,\ \forall\ \Delta : 0 < |\Delta| \le \Delta_1,\ \forall t \in [t_0, \infty),\ k \in \overline{1,n}$.

Из (27)

$$|y_k'(\bar{t}_k)| \le C_1,\ C_1 = \text{const}\ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{28}$$

В (28) $\bar{t}_k$ меняется в зависимости от *t*, но неравенство переносится на $\forall t \in [t_0, \infty)$. Если предположить, что это не так и в условиях устойчивости $\forall N > C_1$ найдутся $k \in \overline{1,n}$, $t = \tilde{t}_k, t \in [t_0, \infty)$, такие, что $|y_k'(\tilde{t}_k)| > N$, то с учетом $y_k'(\tilde{t}_k) = f_k(Y(\tilde{t}_k))$ получится противоречие. В самом деле, $|f_k(Y(\tilde{t}_k))| > N$. В силу непрерывности $f_k(Y(t))$ последнее неравенство сохраняется на некотором интервале, включающем $\tilde{t}_k$: $|f_k(Y(t))| > N\ \forall t \in (\tilde{t}_k - |\tilde{\Delta}|, \tilde{t}_k + |\tilde{\Delta}|)$, $|\tilde{\Delta}| \le |\Delta|$. Вследствие устойчивости на этом интервале выполняется (27). В частности, $|y_k(\tilde{t}_k + \tilde{\Delta}) - y_k(\tilde{t}_k) / \tilde{\Delta}| \le C_1$, и $|y_k'(\hat{t}_k)| \le C_1$, или, $|f_k(Y(\hat{t}_k))| \le C_1$, $\hat{t}_k \in (\tilde{t}_k - |\tilde{\Delta}|, \tilde{t}_k + |\tilde{\Delta}|)$. Таким образом, $|f_k(Y(\hat{t}_k))| > N$, и вместе с тем $|f_k(Y(\hat{t}_k))| < N$, что невозможно. Следовательно, предположение неверно, и $|y_k'(t)| \le C_1$, или $|f_k(Y(t))| \le C_1$, $C_1 = \text{const}\ \forall t \in [t_0, \infty), \forall k \in \overline{1,n}$. Отсюда и из (24) $\left\| \left\{ f_k(\tilde{Y}) \right\}_{k=1}^{n} \right\| \le C_1 + \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < C_1,\ \forall \tilde{Y}(t),\ \tilde{Y}(t_0) = \tilde{Y}_0,\ 0 < \left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \Delta_F,\ \forall t \in [t_0, \infty)$. В результате имеет место

Лемма 5. *Если в условиях теоремы 2 решение* $Y = Y(t),\ Y(t_0) = Y_0$ *задачи (26) устойчиво, то существует* $\Delta_0 = \text{const}$, $0 < \Delta_0 \le \min(\Delta_F, \Delta_1)$, *где* Δ_F *из (24),* Δ_1 *из (27), такое, что*

$$\left\| F(\tilde{Y}) \right\| \le C_0,\ \tilde{Y}(t_0) = \tilde{Y}_0,\ C_0 = \text{const}\ \ \forall \tilde{Y}_0 :\ 0 \le \left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \Delta_0, \forall t \in [t_0, \infty). \tag{29}$$

В рассматриваемых ограничениях соотношение (29) – необходимое условие устойчивости решения автономной системы. Ниже определяются достаточные условия.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы 2 применительно к задаче (26). Тогда для устойчивости решения этой задачи необходимо и достаточно, чтобы* $\exists\ c_0 = \text{const},\ 0 < c_0$, $\exists\ \tilde{\Delta}_0 = \text{const}$, *такие, что* $\forall \Delta,\ 0 < |\Delta| \le \tilde{\Delta}_0$, *имеет место соотношение*

$$|\tilde{y}_k(t) - y_k(t)| \le c_0 \sup_{k \in \overline{1,n}, 0 < |\Delta| \le \tilde{\Delta}_0,\ t \in [t_0, \infty)} |y_k(t+\Delta) - y_k(t)|\ \ \forall t \in [t_0, \infty), \forall k \in \overline{1,n}, \forall \tilde{Y}(t) : \left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \tilde{\Delta}_0. \tag{30}$$

Условие (30) является достаточным для устойчивости решения (26), если выполнено (29).

Доказательство. Пусть $\nabla_{\sup} = \sup_{k \in \overline{1,n},\ 0 < |\Delta| \le \tilde{\Delta}_0,\ t \in [t_0, \infty)} |y_k(t+\Delta) - y_k(t)|$. Можно считать, что $0 < \nabla_{\sup}$, иначе все сдвиги совпадали бы с невозмущенным решением, что для автономной системы невозможно [12]. Необходимость доказывается следующим образом. Если предположить, что решение устойчиво, но (30) не выполняется, то, как бы велико ни было c_0 и как бы мало ни было $\tilde{\Delta}_0$, найдутся $k \in \overline{1,n}$, Δ, $0 < |\Delta| \le \tilde{\Delta}_0$, и $t \in [t_0, \infty)$, такие, что $|\tilde{y}_k(t) - y_k(t)| > c_0 \nabla_{\sup}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ можно выбрать c_0 так, что $c_0 \nabla_{\sup} > \varepsilon$, и $|\tilde{y}_k(t) - y_k(t)| > \varepsilon$. Но в силу устойчивости при достаточно малом $\tilde{\Delta}_0$, $\forall \tilde{y}_{k0} : |\tilde{y}_{k0} - y_{k0}| \le \tilde{\Delta}_0$ всегда выполнено $|\tilde{y}_k(t) - y_k(t)| \le \varepsilon \ \forall t \in [t_0, \infty)$, что противоречит предположению. Достаточность получается с применением теоремы о среднем: $\nabla_{\sup} = \sup\limits_{k \in \overline{1,n},\, 0 < |\Delta| \le \tilde{\Delta}_0,\, t \in [t_0,\infty)} |y_k'(t_k)| |\Delta|$, $t - |\Delta| < t_k < t + |\Delta|$. Поэтому

$$\nabla_{\sup} \le \sup_{k \in \overline{1,n},\ 0 < |\Delta| \le \tilde{\Delta}_0,\, t \in [t_0,\infty)} |f_k(Y(t_k))| \times \tilde{\Delta}_0\ ,\ t - \tilde{\Delta}_0 < t_k < t + \tilde{\Delta}_0,$$

и

$$\nabla_{\sup} \le \tilde{\Delta}_0 \times \sup_{t \in [t_0,\infty)} \max_{1 \le k \le n} \max_{\tilde{t} \in [t - \tilde{\Delta}_0\ ,\ t + \tilde{\Delta}_0]} |f_k(Y(\tilde{t}))|.$$

Отсюда

$$\nabla_{\sup} \le \tilde{\Delta}_0 \times \sup_{t \in [t_0,\infty)} \sum_{k=1}^{n} \max_{\tilde{t} \in [t - \tilde{\Delta}_0\ ,\ t + \tilde{\Delta}_0]} |f_k(Y(\tilde{t}))|,$$

тем более,

$$\nabla_{\sup} \le \tilde{\Delta}_0 \times \sup_{t \in [t_0,\infty)} \sum_{k=1}^{n} \max_{\tilde{t} \in [t - \tilde{\Delta}_0\ ,\ t + \tilde{\Delta}_0]} \left\| \{ f_k(Y(\tilde{t})) \}_{k=1}^{n} \right\|,$$

или,

$$\nabla_{\sup} \le n \tilde{\Delta}_0 \times \sup_{t \in [t_0,\infty)} \max_{\tilde{t} \in [t - \tilde{\Delta}_0\ ,\ t + \tilde{\Delta}_0]} \left\| \{ f_k(Y(\tilde{t})) \}_{k=1}^{n} \right\|.$$

Отсюда и из (29) $\sup\limits_{k \in \overline{1,n},\, 0 < |\Delta| \le \tilde{\Delta}_0\ ,\ t \in [t_0,\infty)} |y_k(t + \Delta) - y_k(t)| \le n C_0 \tilde{\Delta}_0$. Таким образом, (30) влечет $|\tilde{y}_k(t) - y_k(t)| \le \tilde{C}_0 \tilde{\Delta}_0$, $\tilde{C}_0 = n c_0 C_0$, $\tilde{C}_0 = \mathrm{const}$, и, следовательно, $\|\tilde{Y}(t) - Y(t)\| \le \tilde{C}_1 \tilde{\Delta}_0$, $\tilde{C}_1 = \mathrm{const}$, $0 < \tilde{C}_1$, $\forall t \in [t_0, \infty)$, $\forall \tilde{Y}(t) : \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \le \tilde{\Delta}_0$. В результате $\forall \varepsilon > 0$ выполнено $\|\tilde{Y}(t) - Y(t)\| \le \varepsilon\ \forall t \in [t_0, \infty)$, лишь только $\tilde{\Delta}_0 \le \varepsilon \tilde{C}_1^{-1}$. Лемма доказана.

Для асимптотической устойчивости решения задачи (26) необходимо и достаточно соответственное выполнение условий леммы 6 и существование $\bar{\Delta}_0$-окрестности Y_0, $0 < \bar{\Delta}_0 \le \tilde{\Delta}_0$, в начальных условиях из которой выполняется соотношение

$$|y_k(t + \Delta) - y_k(t)| \to 0,\ t \to \infty, \forall k \in \overline{1,n}, \forall \Delta : 0 < |\Delta| \le \bar{\Delta}_0. \tag{31}$$

Достаточность получается подстановкой (31) в правую часть (30) с учетом условий леммы, необходимость – из определения асимптотической устойчивости применительно к возмущению $\tilde{y}_k(t) = y_k(t + \Delta)$. Из изложенного вытекает

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2 применительно к задаче (26). Тогда для устойчивости решения этой задачи необходимо выполнение соотношений (27), (29) и (30). При этом если (29) выполнено, то выполнение (30) является достаточным условием устойчивости. Необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости решения задачи (26) является выполнение соответственных условий устойчивости при одновременном выполнении с ними соотношения (31).*

Следствие 7. Из (27) следует известный факт равномерной непрерывности устойчивого решения автономной системы: $\forall \varepsilon > 0 : \left\| \{ y_k(t + \Delta) - y_k(t) \}_{k=1}^{n} \right\| \le \varepsilon\ \forall \Delta$, $0 < |\Delta| \le \Delta_1$, $\forall t \in [t_0, \infty)$, $\Delta_1 \le \varepsilon C_1^{-1}$, где $C_1 = \mathrm{const}$ из (27).

Из замечаний 1, 2 вытекает

Следствие 8. В условиях теоремы 3 для устойчивости решения задачи (26) необходимо, чтобы существовало Δ_F, $0<\Delta_F\le\delta_0$, такое, что $\forall\Delta:\ 0<|\Delta|\le\Delta_F$, верно неравенство

$$\left\|\left\{(f_k(Y(t+\Delta))-f_k(Y(t)))/\Delta\right\}_{k=1}^{n}\right\|\le C_\Delta,\ C_\Delta=\mathrm{const},\ \forall t\in[t_0,\infty). \qquad (32)$$

Для асимптотической устойчивости необходимо, чтобы решение было устойчиво и существовало $\tilde{\Delta}_F\le\Delta_F$, такое, что $\forall\Delta:\ 0<|\Delta|\le\tilde{\Delta}_F$ выполнялось соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\left\{f_k(Y(t+\Delta))-f_k(Y(t))\right\}_{k=1}^{n}\right\|=0. \qquad (33)$$

Замечание 3. В случае устойчивости решения задачи (26) соотношение (32) влечет равномерную непрерывность правой части на полуоси. Именно $\forall\varepsilon>0$ при $\forall\Delta:\ 0<|\Delta|\le\Delta_F$, выполнено $\left|f_k(Y(t+\Delta))-f_k(Y(t))\right|\le\varepsilon\ \forall t\in[t_0,\infty)$, $\forall k\in\overline{1,n}$, лишь только $\Delta_F\le\varepsilon C_\Delta^{-1}$. Таким образом,

$$\left\|F((Y(t+\Delta))-F(Y(t))\right\|\le\varepsilon\ \forall t\in[t_0,\infty),\ \forall\Delta:\ 0<|\Delta|\le\Delta_F. \qquad (34)$$

При данных ограничениях (34) – необходимое условие устойчивости решения (26).

Условия устойчивости точки покоя автономной системы. Пусть система (26) преобразована к виду, при котором анализ устойчивости ее решения сводится к анализу устойчивости нулевого решения (точки покоя):

$$V'=U(V),\ V(0)=\bar{O}, \qquad (35)$$

где $U(V)=(u_1(V),u_2(V),\ldots,u_n(V))$, $V=(v_1(t),v_2(t),\ldots,v_n(t))$, $\bar{O}=(0,0,\ldots,0)^T$, не умаляя общности, можно считать $U(\bar{O})=\bar{O}$ [1]. В дальнейшем формально предполагается, что $U(V)\ne\bar{O}$, если $V\ne\bar{O}$, и, кроме того, соотношение $\lim\limits_{t\to\infty}u_\ell(t)=0\ \ \forall\ell\in\overline{1,n}$ возможно только, если $\lim\limits_{t\to\infty}v_\ell(t)=0\ \ \forall\ell\in\overline{1,n}$. Применительно к анализу устойчивости нулевого решения задачи (35) вычитаемые в делимом (27), в соотношениях (30) – (34) становятся нулями. Ниже возмущение нулевого решения не будет отмечаться волной.

Следствие 9. Условия и утверждения теоремы 3 с точностью до обозначения повторяются для решения $V(t)=\bar{O}$ задачи (35). В частности, это относится к ограниченности в условиях устойчивости правой части $U(V)$ из (35). В случае устойчивости точки покоя задачи (35) соотношение (27) примет вид $\left\|\left\{(v_k(t+\Delta))/\Delta\right\}_{k=1}^{n}\right\|\le C_1,\ C_1=\mathrm{const}$, $\forall\Delta,\ 0<|\Delta|\le\Delta_1,\ \forall t\in[0,\infty)$ и (35) перейдет в соотношение $\left\|\left\{v_k(t+\Delta)\right\}_{k=1}^{n}\right\|\to0,\ t\to\infty$, $\forall\Delta:\ |\Delta|\le\bar{\Delta}_0,\ \bar{\Delta}_0\le\Delta_1$.

Следствие 10. Применительно к (35) сохраняется следствие 8, при этом (32), (33) переходят в соотношения $\left\|\left\{u_k(V(t+\Delta))/\Delta\right\}_{k=1}^{n}\right\|\le C_\Delta,\ C_\Delta=\mathrm{const}$, $\forall t\in[0,\infty),\ \forall\Delta:\ 0<|\Delta|\le\Delta_F$, и $\lim\limits_{t\to\infty}\left\|\left\{u_k(V(t+\Delta))\right\}_{k=1}^{n}\right\|=0\quad\forall\Delta:\ 0<|\Delta|\le\tilde{\Delta}_F,\ \tilde{\Delta}_F\le\Delta_F$. Сохраняется также замечание 3, при этом (34) перейдет в соотношение $\left\|\left\{u_k(V(t+\Delta))\right\}_{k=1}^{n}\right\|\le\varepsilon\ \forall t\in[0,\infty),\ \forall V(t),\ V(0)=\bar{O},\ \forall\Delta:\ 0<|\Delta|\le\Delta_F$.

Согласно этим следствиям в случае устойчивости точки покоя системы (35) решение $V(t)=\left\{v_k(t)\right\}_{k=1}^{n}$ с начальными значениями из некоторой окрестности $V(0)=\bar{O}$ и правая часть $U(V)=\left\{u_k(V(t))\right\}_{k=1}^{n}$ ограничены. При некоторых условиях ограниченность $V(t)$ может определяться знаком компонентов $V_t'=U(V)$, а $U(V)$ – знаком компонентов U_t'. Покомпонентное сопоставление знаков производных приводит к достаточным условиям устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости, излагаемым ниже. По-прежнему относительно (35) сохраняются все условия теоремы 2.

Чтобы исключить неверный смысл последующих утверждений, дополнительно предполагается, что всюду, где используется знак нестрогого неравенства относительно $v_k(t)$, $u_k(t)$, $u'_k(t)$, решения системы (35) исключают каждый из случаев, когда $\exists k \in \overline{1,n}$: $v_k(t) \equiv 0$ $\forall\, t \in [0,\infty)$ или $\exists k \in \overline{1,n}$: $u_k(t) \equiv 0$ $\forall\, t \in [0,\infty)$, или $\exists k \in \overline{1,n}$: $u'_k(t) \equiv 0$ $\forall\, t \in [0,\infty)$.

Очевидны следующие утверждения.

1. Если $\exists\, \Delta > 0$, такое, что $\forall\, V(0): 0 < \|V(0)\| \le \Delta$, $\forall k \in \overline{1,n}$ верны неравенства $0 \le v_k(t)$, $u_k(t) \le 0$, $0 \le u'_k(t)$ $\forall\, t \in [0,\infty)$, то $U(V)$ ограничена, а точка покоя системы (35) устойчива.

В данных условиях функция $u_k(t)$ не убывает, поэтому по модулю не возрастает, и $|u_k(t)| \le |u_k(0)|$ $\forall\, t \in [0,\infty)$, $\forall k \in \overline{1,n}$. Функция $v_k(t)$ не возрастает, поэтому $0 \le v_k(t) \le v_k(0)$ $\forall\, t \in [0,\infty)$. Отсюда $\forall \varepsilon > 0$, при выборе $\Delta \le \varepsilon$, выполнено $|v_k(t)| \le \varepsilon$ $\forall\, t \in [0,\infty)$, $\forall k \in \overline{1,n}$.

2. Если $\exists\, \Delta > 0$, такое, что $\forall\, V(0): 0 < \|V(0)\| \le \Delta$, $\forall k \in \overline{1,n}$ верны неравенства $v_k(t) \le 0$, $0 \le u_k(t)$, $u'_k(t) \le 0$ $\forall\, t \in [0,\infty)$, то $U(V)$ ограничена, а точка покоя системы (35) устойчива.

Утверждение оправдывается по аналогии с пунктом 1.

3. Если для некоторых $k = k_1 \in \overline{1,n}$ выполнены условия пункта 1, а для всех остальных $k = k_2 \in \overline{1,n}$ – условия пункта 2, то $U(V)$ ограничена, а точка покоя системы (35) устойчива.

При $\forall k \in \overline{1,n}$ выполнено: $|u_k(t)| \le |u_k(0)|$, $0 \le |v_k(t)| \le |v_k(0)|$ $\forall\, t \in [0,\infty)$. Если $0 < \|V(0)\| \le \Delta$, то $\|U(V(t))\| \le \max\limits_{\|V(0)\| \le \Delta} \|U(V(0))\|$, и $\forall \varepsilon > 0$, при выборе $\Delta \le \varepsilon$, верно $\|V(t)\| \le \varepsilon$ $\forall\, t \in [0,\infty)$.

Ограниченность $U(V)$ в общем случае – следствие устойчивости согласно лемме 5, ниже это свойство отдельно не оговаривается. Из пунктов 1–3 вытекает

Предложение 1. *Если $\exists\, \Delta > 0$, такое, что $\forall\, V(0): 0 < \|V(0)\| \le \Delta$, $\forall k \in \overline{1,n}$ выполняется любая из пар неравенств $0 \le v_k(t)$, $u_k(t) \le 0$ или $v_k(t) \le 0$, $0 \le u_k(t)$ $\forall\, t \in [0,\infty)$, то точка покоя системы (35) устойчива.*

Теорема 4. *Пусть выполнены условия предложения 1. Если $\exists\, \bar{\Delta} > 0$, $\bar{\Delta} \le \Delta$, такое, что $\forall\, V(0): 0 < \|V(0)\| \le \bar{\Delta}$, $\forall k \in \overline{1,n}$ выполняется пара неравенств $0 \le v_k(t)$, $u_k(t) < 0$ или $v_k(t) \le 0$, $0 < u_k(t)$ $\forall\, t \in [0,\infty)$, и при этом $\exists \lim\limits_{t\to\infty} u_k(t) = \bar{q}_k$, $|\bar{q}_k| \ne \infty$, то точка покоя системы (35) асимптотически устойчива.*

Доказательство. Согласно предложению 1 точка покоя устойчива. Пусть при условии $\forall\, V(0): 0 < \|V(0)\| \le \bar{\Delta}$ произвольно зафиксировано $k \in \overline{1,n}$, выбрано $\forall\, v_k(0): 0 \le v_k(0) \le \bar{\Delta}$, при котором выполняется $0 \le v_k(t)$, $u_k(t) < 0$ $\forall\, t \in [0,\infty)$, и пусть $\exists \lim\limits_{t\to\infty} u_k(t) = \bar{q}_k$, $|\bar{q}_k| \ne \infty$. Предположение, что $\bar{q}_k \ne 0$, окажется в противоречии с устойчивостью. В этом предположении $\exists\, q_k$, $q_k = \text{const}$, $\bar{q}_k < q_k < 0$, такое, что, начиная с некоторого t_1, будет верно неравенство: $u_k(t) < q_k$ $\forall\, t \in [t_1, \infty]$. Тогда $v_k(t) = v_k(0) + \int\limits_0^{t_1} u_k(t)dt + \int\limits_{t_1}^{t} u_k(t)dt$, где $\left|\int\limits_{t_1}^{t} u_k(t)\,dt\right| \ge \left|\int\limits_{t_1}^{t} q_k\,dt\right|$, и $\left|\int\limits_{t_1}^{t} q_k\,dt\right| = |q_k|(t - t_1) \to \infty$, если $t \to \infty$. Отсюда $|v_k(t)| = \left|v_k(0) + \int\limits_0^{t} u_k(t)\,dt\right| \to \infty$ при $t \to \infty$, что означает неустойчивость нулевого решения вопреки условию. Предположение неверно, и в рассматриваемых условиях выполнено $\lim\limits_{t\to\infty} u_k(t) = 0$. Поскольку $u_k(t) = u_k(v_1(t), v_2(t), \ldots, v_n(t))$, и $U(V) = \bar{O}$ тогда и только тогда, когда $V(t) = \bar{O}$, с учетом произвольности выбора $k \in \overline{1,n}$, соотношение $\lim\limits_{t\to\infty} u_k(t) = 0$ возможно только, если $\lim\limits_{t\to\infty} v_\ell(t) = 0$ $\forall\, \ell \in \overline{1,n}$. Поэтому точка покоя асимптотически устойчива. Аналогично рассматривается случай $v_k(t) \le 0$, $0 < u_k(t)$.

Предложение 2. *Пусть точка покоя системы (35) устойчива. Если $\exists\, \Delta_1$, такое, что $\forall\, V(0): 0 < \|V(0)\| \le \Delta_1$, $\forall k \in \overline{1,n}$ выполнены неравенства $0 \le u_k(t)$, $u'_k(t) < 0$ $\forall\, t \in [0,\infty)$, то точка покоя асимптотически устойчива.*

Доказательство. Пусть зафиксировано $\forall k \in \overline{1,n}$ и выбрано $\forall\ v_k(0):\ 0 \le \left| v_k(0) \right| \le \Delta_1$. Функция $u_k(t)$ убывает и ограничена снизу. Поэтому $\exists\ \lim\limits_{t\to\infty} u_k(t) = q_k$, $q_k \ge 0$. Если предположить, что $q_k > 0$, возникнет противоречие. В самом деле, $\exists\ \lim\limits_{t\to\infty} v_k(t) = v_k(0) + \lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t u_k(t)\,dt$, $\exists\ \gamma_k = \mathrm{const}$, $0 < \gamma_k < q_k$, $\exists\ t_1,\ 0 \le t_1$, такие, что $u_k(t) \ge \gamma_k\ \ \forall\ t \ge t_1$. Отсюда $\lim\limits_{t\to\infty} v_k(t) \ge v_k(0) + \int\limits_0^{t_1} u_k(t)\,dt + \lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{t_1}^{t} \gamma_k\,dt$, где $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{t_1}^{t}\gamma_k\,dt = \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} v_k(t) = \infty$ вопреки устойчивости точки покоя. Предположение неверно, и $q_k = 0$. С учетом произвольности выбора $k \in \overline{1,n}$ и $v_k(0)$ соотношение $\lim\limits_{t\to\infty} u_k(t) = 0$ возможно только, если $\lim\limits_{t\to\infty} v_\ell(t) = 0\ \ \forall\ \ell \in \overline{1,n}$. Отсюда следует асимптотическая устойчивость точки покоя.

Предложение 3. *Пусть точка покоя системы (35) устойчива. Если* $\forall\ V(0):\ 0 < \left\| V(0) \right\| \le \Delta_1$, $\forall k \in \overline{1,n}$ *выполнено* $u_k(t) \le 0$, $0 < u'_k(t)\ \ \forall\ t \in [0,\infty)$, *то точка покоя асимптотически устойчива.*

Доказательство аналогично предыдущему.

Если для некоторых $k = k_1 \in \overline{1,n}$ выполнены условия предложения 2, а для всех остальных $k = k_2 \in \overline{1,n}$ – условия предложения 3, то точка покоя системы (35) асимптотически устойчива. Отсюда вытекает

Теорема 5. *Если точка покоя системы (35) устойчива и* $\exists\ \Delta_1$, *такое, что* $\forall\ V(0): 0 < \left\| V(0) \right\| \le \Delta_1$, $\forall k \in \overline{1,n}$ *выполнено либо* $u_k(t) \le 0$, $0 < u'_k(t)$, *либо* $0 \le u_k(t)$, $u'_k(t) < 0\ \ \forall\ t \in [0,\infty)$, *то точка покоя асимптотически устойчива.*

Замечание 4. Согласно замечанию 2 соотношение (25) – необходимое условие асимптотической устойчивости. Для системы (35) оно примет вид: $\forall\ V(0): 0 < \left\| V(0) \right\| \le \overline{\Delta}$, $\forall k \in \overline{1,n}$ выполняется $\lim\limits_{t\to\infty} u_k(t) = 0$. Для доказательства теоремы 4 и для доказательства предложения 2 достаточно выполнения самого этого соотношения и факта устойчивости, без использования условий, в силу которых это соотношение имеет место, в частности неравенств из условий предложений 1, 2.

На основании замечания 4 имеет место

Теорема 6. *Если точка покоя системы (35) устойчива, то для ее асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности* $V(0)$ *выполнялось* $\lim\limits_{t\to\infty} \left\| U(V) \right\| = 0$.

Непосредственно из теорем 4, 5 вытекает

Теорема 7. *Если* $\exists \Delta_1 > 0$, *такое, что* $\forall\ V(0): 0 < \left\| V(0) \right\| \le \Delta_1$, $\forall k \in \overline{1,n}$ *выполняется любая из троек неравенств* $0 < v_k(t)$, $u_k(t) < 0$, $0 < u'_k(t)$ *или* $v_k(t) < 0$, $0 < u_k(t)$, $u'_k(t) < 0$ $\forall\ t \in [0,\infty)$, *то точка покоя системы (35) асимптотически устойчива.*

В ограничениях начального предположения все знаки строгих неравенств в условиях теорем 4, 5, 7 можно заменить знаками соответственных нестрогих неравенств с сохранением утверждений. На пункты 4, 5 аналогичное утверждение не распространяется.

4. Если имеет место устойчивость, теорема 6 дает необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости. Кроме того, в условиях постоянства знака компонентов решения достаточные условия теорем 4, 5, 7 становятся необходимыми.

Предложение 4. *Пусть* $\exists \Delta_1 > 0$, *такое, что* $\forall\ V(0):\ \left\| V(0) \right\| \le \Delta_1$, $\forall k \in \overline{1,n}$ *задача (35) имеет решения со свойством постоянства знаков компонентов,* $\mathrm{sgn}(v_k) = \mathrm{const}$, *то есть либо* $v_k(t) < 0\ \ \forall\ t \in [0,\infty)$, *либо* $0 < v_k(t)\ \ \forall\ t \in [0,\infty)$. *Пусть* $\forall\ V(0)$ *из рассматриваемой окрестности начальных данных* $\lim\limits_{t\to\infty} \left\| U(V) \right\| = 0$. *Тогда для асимптотической устойчивости точки покоя необходимо и достаточно выполнение одной из пар неравенств* $v_k(t) < 0$, $0 \le u_k(t)$ *или* $0 < v_k(t)$, $u_k(t) \le 0\ \ \forall\ t \in [0,\infty)$.

Доказательство. Достаточность условий доказывается аналогично тому, как доказывалась достаточность условий теоремы 4. Пусть теперь точка покоя системы (35) асимптотически устойчива, тогда $\forall\ V(0):\ \left\| V(0) \right\| \le \Delta_1$ решение $V(t)$ ограничено. Если предположить, что при некотором $k \in \overline{1,n}$ условия теоремы 6 нарушены, например в виде $0 < v_k(t)$, $0 \le u_k(t)\ \ \forall\ t \in [0,\infty)$, то возникнет противоречие. Функция v_k положительна, не убывает и ограничена, следовательно, $\exists\ \lim\limits_{t\to\infty} v_k(t) = \tau$, $0 < \tau < \infty$. Но значение $\tau > 0$ противоречит асимптотической устойчивости, в силу которой $\lim_{t\to\infty} v_k(t)=0$. Предположение неверно, и в рассматриваемых условиях необходимо $v_k(t)<0$, $0\le u_k(t)$ $\forall\, t\in[0,\infty)$. Если нарушение условий возникло в форме $v_k(t)<0$, $u_k(t)\le 0$ $\forall\, t\in[0,\infty)$, то в силу устойчивости функция $v_k(t)$ отрицательна, ограничена на полуоси, при этом не возрастает. Поэтому $\exists \lim_{t\to\infty} v_k(t)=\overline{\tau}$, $-\infty<\overline{\tau}<0$. Такое значение $\overline{\tau}$ противоречит асимптотической устойчивости. Отсюда необходимо $v_k(t)<0$, $0\le u_k(t)$ $\forall\, t\in[0,\infty)$. Случаи нарушения условий $0<v_k(t)$, $u_k(t)\le 0$ $\forall\, t\in[0,\infty)$ рассматриваются аналогично.

С использованием ограниченности $U(V)$ согласно (29) аналогично доказывается

Предложение 5. *Пусть точка покоя системы (35) устойчива. Тогда для ее асимптотической устойчивости необходимо и достаточно выполнение одной из пар неравенств* $u_k(t)<0$, $0\le u_k'(t)$ *или* $0<u_k(t)$, $u_k'(t)\le 0$ $\forall\, t\in[0,\infty)$.

5. Следующие условия достаточны для неустойчивости.

Предложение 6. *Если для задачи (35)* $\forall\ \Delta_1>0\ \exists V(t):\ 0<\|V(0)\|\le\Delta_1$, $\exists\, k\in\overline{1,n}$, $\exists\, t_0>0$, *такие, что неравенства* $0\le v_k(t)$, $0<u_k(t)$ *верны* $\forall\, t\in[t_0,\infty)$, *при этом либо* $u_k'(t)\le 0$, *либо* $0\le u_k'(t)$ $\forall\, t\in[t_0,\infty)$, *то точка покоя неустойчива. Аналогично, если* $v_k(t)\le 0$, $u_k(t)<0$.

Доказательство. Пусть $0\le v_k(t)$, $0<u_k(t)$, где k из условий предложения. Если функция $v_k(t)$ ограничена сверху, то $\exists \lim_{t\to\infty} v_k(t)=\overline{p}<\infty$, при этом $0<\overline{p}$ с учетом возрастания $v_k(t)$. Если в этом случае предположить, что точка покоя устойчива и $u_k'(t)\le 0$ $\forall\, t\in[t_0,\infty)$, то согласно предложению 5 и теореме 6 необходимо $\exists \lim_{t\to\infty} u_k(t)=0$. Тогда $\lim_{t\to\infty} v_k(t)=0$, что противоречит $0<\overline{p}$. Если же предположить, что точка покоя устойчива и $0\le u_k'(t)$ $\forall\, t\in[t_0,\infty)$, то в силу леммы 5 функция $u_k(t)$ ограничена, не убывает, следовательно, имеет предел $\lim_{t\to\infty} u_k(t)=\overline{q}>0$. Отсюда, как и раньше, $\exists \lim_{t\to\infty} v_k(t)=\infty$, что противоречит устойчивости. Остается предположить, что $v_k(t)$ не ограничена сверху, но это также означает, что точка покоя неустойчива. Случай $v_k(t)\le 0$, $u_k(t)<0$ рассматривается аналогично.

Нетрудно видеть, что к тому же результату приводит выполнение соотношений $0<v_k(t)$, $0\le u_k(t)$ или $v_k(t)<0$, $u_k(t)\le 0$ $\forall\, t\in[t_0,\infty)$ при сохранении условий относительно $u_k'(t)$.

С помощью аналогичных рассуждений доказывается

Теорема 8. *Точка покоя системы (35) неустойчива, если* $\forall\ \Delta_1>0\ \exists V(t):\ 0<\|V(0)\|\le\Delta_1$, $\exists\, k\in\overline{1,n}$, $\exists\, t_0>0$, *такие, что* $\forall\, t\in[t_0,\infty)$ *верна хоть одна из пар следующих неравенств при сохранении условий предложения 6 относительно* $u_k'(t)$: $0\le v_k(t)$, $0<u_k(t)$; $v_k(t)\le 0$, $u_k(t)<0$; $0<v_k(t)$, $0\le u_k(t)$; $v_k(t)<0$, $u_k(t)\le 0$. *В тех же условиях решение неустойчиво, если верна хоть одна из пар следующих неравенств:* $0<u_k(t)$, $0\le u_k'(t)$; $u_k(t)<0$, $u_k'(t)\le 0$; $0\le u_k(t)$, $0<u_k'(t)$; $u_k(t)\le 0$, $u_k'(t)<0$.

Элементарные примеры и программная реализация. Нулевое решение уравнения $v'=e^v-1$ неустойчиво: $v''=e^v(e^v-1)$, если $v>0$, то $v'>0$, $v''>0$; если $v<0$, то $v'<0$, $v''<0$ (теорема 8). Нулевое решение уравнения $v'=e^{-v}-1$ асимптотически устойчиво: $v''=-e^{-v}(e^{-v}-1)$, если $v>0$, то $v'<0$, $v''>0$; если $v<0$, то $v'>0$, $v''<0$ (теорема 7). Уравнение $v'=v$ неустойчиво: $v''=v'$ (теорема 8), уравнение $v'=-v$ асимптотически устойчиво: $v''=v=-v'$ (теорема 7). Для системы $v_1'=-v_1^3v_2^2$, $v_2'=-v_1^2v_2^3$ знаки v_1' и v_1'', v_2' и v_2'' покомпонентно противоположны: $v_1''=5v_1^5v_2^4$, $v_2''=5v_1^4v_2^5$. Однако нельзя сделать вывод об асимптотической устойчивости – не выполнены исходные условия, которые предполагают теоремы 4, 6, 8, в частности не выполнено (2). В общем случае аналитически идентифицировать асимптотическое поведение знака решения, его первой и второй производной далеко не всегда возможно. Однако это не составляет затруднения при применении компьютера: достаточно по ходу решения выводить приближения $v_k(t)$, $u_k(t)$, $u_k'(t)$. Например, для уравнения $v'=e^v-1$ следующая программа (Delphi) даст искомую информацию:

```
Program sgnnorm;{$APPTYPE CONSOLE} uses  SysUtils;
const h = 0.000001;eps =0.001; tt=1000000; var t,v: extended; k: longint;
function u (t,v:extended):extended; begin u:=exp(v)-1; end;
function u1 (t,v:extended):extended; begin u1:=exp(v)*(exp(v)-1); end;
begin k:=0; v:= eps; t:=0; while t <= 6 do begin v:=v+h*u (t,v); t:=t+h; k:=k+1; if k = tt then begin
writeln ('t=',t:4,'  ');
writeln; writeln ('  ','znaki':32,'  '); writeln; writeln ('  ',v,'  ',u (t,v),'  ',u1 (t,v)); writeln; writeln; k:=0 end; end;
readln end.
```

В качестве возмущения нулевого решения с отсчетом tt шагов выводится приближение по методу Эйлера решения v (v), $v(0)=eps$, правой части $v'=u$ (u(t,v)), ее производной $v''=u'$ (u1(t,v)). Их знаки положительны на всем интервале приближения, что означает признак неустойчивости. Интервал взят малым, иначе возникнет переполнение, что дает дополнительный признак: заведомо нарушается необходимое условие устойчивости (20). Если по данной программе приближенно решать уравнение $v'=e^{-v}-1$, интервал можно произвольно продлить, знаки решения, первой и второй производной будут чередоваться, $0<v,\ u<0,\ 0<u'$, все эти величины будут убывать к нулю, означая асимптотическую устойчивость. При варьируемых начальных значениях чередование сохраняется. В продолжение процесса обнулятся значащие цифры выводимых значений в расширенном формате. Согласно (21) и теореме 6 стремление решения, а также производной к нулю дает дополнительный признак асимптотической устойчивости. По аналогичной программе можно выводить отношение решения к начальному значению (v/eps) для проверки необходимых и достаточных условий (20), (21).

В общем случае для исследования системы (35) программа с очевидностью модифицируется. В результате она выполнит аналогичные действия для каждого уравнения в отдельности, при этом производная от $u_k(V)=u_k(v_1(t),v_2(t),\ldots,v_n(t))$ априори аналитически определяется по формуле $\dfrac{du_k}{dt}=\sum_{\ell=1}^{n}\dfrac{\partial u_k}{\partial v_\ell}\dfrac{dv_\ell}{dt}$, или, $\dfrac{du_k}{dt}=\sum_{\ell=1}^{n}\dfrac{\partial u_k}{\partial v_\ell}u_\ell$ [13]. Значения u_k и u_k' задаются подпрограммами-функциями, их приближения выводятся одновременно с компонентами приближенного решения v_k. Использование компонента $u_k(t)$ вектор-функции $\{u_k(t)\}_{k=1}^{n}$ из (35) сходно с применением производной в силу системы [1, 3]. Принципиальное отличие функции Ляпунова, использующей известное построение, в том, что в общем случае она не является вектор-функцией, ее значение принадлежит R как функции n переменных. Известное видоизменение – вектор-функция Ляпунова [3] – имеет число компонентов меньше n и использует вспомогательную систему. Рассматриваемое применение $u_k(t)$ ограничено условиями существования и непрерывности $u_k'(t)\ \ \forall\, t\in[0,\infty)$, $\forall\, k\in\overline{1,n}$, что не необходимо для применения функции Ляпунова. Ее построение не детерминировано формулой и оставляет возможность оценки устойчивости с помощью выбора переменных, причем в более общем случае. Однако для численного моделирования устойчивости существенна инвариантность задания u_k' по формуле производной сложной функции.

Признаки устойчивости линейных систем. Как частный случай автономной системы (35) рассматривается однородная система

$$Y'=AY \tag{36}$$

с матрицей вещественных коэффициентов $n\times n$. К (36) применимы теоремы 4–8 и данные ранее утверждения относительно автономных и нелинейных систем. Выражение производных наглядно просто: $Y'=AY,\ Y''=A^2Y$. Одним из условий асимптотической устойчивости системы является противоположность знаков $\overline{k}$-х компонентов AY и A^2Y при каждом $k\in\overline{1,n}$ $\forall\ t\in[0,\infty)$. Одно из условий неустойчивости – наличие при некотором k противоположных знаков k-х компонентов AY и A^2Y $\forall\ t\in[t_0,\infty)$. Пусть, например, рассматривается система $y_1'=2y_1+2y_2,\ y_2'=y_1+2y_2$. В этом случае

$$A=\begin{pmatrix}2&2\\1&2\end{pmatrix},\ A^2=\begin{pmatrix}6&8\\4&6\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},$$

$$AY=\begin{pmatrix}2y_1+2y_2\\y_1+2y_2\end{pmatrix},\ A^2Y=\begin{pmatrix}6y_1+8y_2\\4y_1+6y_2\end{pmatrix}.$$

Из записи метода Эйлера для приближенного решения этой системы, $Y_{i+1}=(E+hA)Y_i$, $i=0,1,\ldots,$ видно, что существует решение с положительными компонентами. При $y_1>0,\ y_2>0$ знаки компонентов Y, AY и A^2Y совпадают, решение неустойчиво (теорема 8). Такой вывод можно повторить для любой положительной матрицы A, что согласуется с теоремой Перрона о наибольшем по модулю собственном значении положительной матрицы: оно вещественно и положительно [14]. Пусть рассматривается система $y_1'=-5y_1-2y_2$, $y_2'=-3y_2$. Здесь

$$A=\begin{pmatrix}-5&-2\\0&-3\end{pmatrix},\ A^2=\begin{pmatrix}25&16\\0&9\end{pmatrix},$$

$$Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\ AY=\begin{pmatrix}-5y_1-2y_2\\-3y_2\end{pmatrix},$$

$$A^2Y=\begin{pmatrix}25y_1+16y_2\\9y_2\end{pmatrix}.$$

Второй компонент меняет знак при переходе от Y к AY и от AY к A^2Y. Если, начиная с некоторого $t_0 > 0$, выполнено $|y_1| > 0.4\,|y_2|$, то и первый компонент меняет знак аналогично. В этом предположении знаки компонентов Y, AY и A^2Y попарно противоположны $\forall\, t \in [t_0, \infty)$, система асимптотически устойчива согласно теореме 7. Легко убедиться непосредственной подстановкой, что в семейство решений входит $y_1 = e^{-5t} - e^{-3t}$, $y_2 = e^{-3t}$, это решение соответствует предположению и иллюстрирует асимптотическую устойчивость. Приближенное решение системы проявило бы те же и другие свойства асимптотического поведения ненулевого решения, в частности признак асимптотической устойчивости: $AY \to \overline{0}$, если $t \to \infty$ (теорема 6).

Ниже оговаривается, что для оценки устойчивости системы (36) достаточно выполнения обсуждаемых признаков для одного произвольного решения со всеми ненулевыми компонентами начальных значений.

Невыполнение достаточных условий теорем и предложений не означает неустойчивость. Так, система $y_1' = y_2$, $y_2' = -y_1$ не отвечает условиям этих утверждений, но устойчива: собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ мнимые и не кратные [14].

Как и в общем случае, для системы (36) нельзя предложить универсальный алгоритм аналитической идентификации знаков компонентов решения и производных. Однако компьютерная идентификация знаков выполняется относительно без затруднений. В программу вводится матрица A, программно вычисляется A^2. Для компонентов AY и A^2Y задаются подпрограммы-функции, соответственные каждой из строк матриц, значения функций выводятся по шагам приближенного решения одновременно с компонентами решения Y в случае возмущенных начальных значений. Такой процесс обладает естественным параллелизмом, в последовательной реализации A^2 можно не вычислять: выводятся компоненты Y, AY, по ассоциативности – $A \times (AY)$.

Для дальнейшего исследования потребуется рассмотреть структуру общего решения системы (36), которое в форме Коши имеет вид [15]

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i^{(0)} y_{ik}(t)\,,\ k \in \overline{1,n}, \qquad (37)$$

где $y_i^{(0)}$ – начальные значения, которые считаются произвольными, $y_{ik}(t)$ – компоненты нормированной фундаментальной системы, $i \in \overline{1,n}$. Нормированность означает [15], что любое частное решение с единственностью получается из (37) при фиксировании начальных значений именно этого решения: $y_k(t_0) = y_k^{(0)}$, $k \in \overline{1,n}$ (включая $t_0 = 0$). Отсюда любое частное решение системы (36) в выражении из (37) в качестве элементов линейной комбинации содержит все n вектор-функций фундаментальной системы, каждую с ненулевым коэффициентом, при условии, что начальные значения решения имеют все ненулевые компоненты: $y_i^{(0)} \neq 0\ \forall\, i \in \overline{1,n}$. Поэтому одно такое решение сохраняет свойства всех решений фундаментальной системы в смысле асимптотического поведения, определяющего характер устойчивости. Вектор-функция фундаментальной системы представляет собой решение с компонентами $y_{ik}(t) = P_{ik}(t)e^{\lambda_i t}$, $k \in \overline{1,n}$, где каждому собственному числу λ_i кратности ℓ матрицы A соответствуют полиномы $P_{ik}(t)$ степени не выше $\ell - 1$, в совокупности имеющие ℓ произвольных коэффициентов, через которые выражаются остальные [15]. При $\ell = 1$ полином имеет нулевую степень и выражается в виде одного свободного коэффициента. В случае комплексного λ_i отделяются его вещественная и мнимая части, по отдельности они порождают вещественные компоненты $y_{ik}(t)$. Вхождение каждого $y_{ik}(t) = P_{ik}(t)e^{\lambda_i t}$ с ненулевым коэффициентом в (37) сохраняет асимптотический характер роста в зависимости от знака действительной части λ_j либо от кратности мнимой части, если действительная часть равна нулю. В любом случае асимптотическое поведение одного частного решения, начальные значения которого составляют только ненулевые компоненты, эквивалентно в смысле устойчивости поведению всей фундаментальной системы, соответственной n собственным значениям матрицы системы. Это коррелирует с известным свойством системы (36): для ее устойчивости необходима и достаточна ограниченность одновременно всех решений, для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно стремление к нулю одновременно всех решений при $t \to \infty$ [1]. Однако по асимптотике какого именно из решений можно точно судить об устойчивости всей системы, ясно только на основании (37): по поведению любого частного решения, все компоненты начальных значений которого не равны нулю. На этой основе для анализа устойчивости системы (36) не требуется указывать окрестность возмущения начальных значений, как в следствии 5 в общем случае. Достаточно формулировать условия этого следствия для произвольного решения с ненулевыми компонентами начальных значений. Применительно к (36) не требуется проверять выполнение условий предложений и теорем в окрестности нулевых начальных значений: достаточно их проверить для произвольно выбранных ненулевых компонентов начального вектора. Выполнение условий влечет в асимптотике ограниченность, стремление к нулю или неограниченность решения, характерные для всей фундаментальной системы.

Пусть в (36) $A=(a_{ij})$, $A^2=(a_{ij}^{(2)})$ $\forall i,j\in\overline{1,n}$. Компоненты $Y(t)$, $Y'(t)$, $Y''(t)$ находятся из соотношений

$$Y(t)=(y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t))^T,$$

$$y_k'(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}y_j(t),\quad y_k''(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}^{(2)}y_j(t),$$

$$k\in\overline{1,n}. \tag{38}$$

Согласно изложенному из теорем 4–8 применительно к (36) вытекает

Теорема 9. *Пусть решение $Y(t)$ системы (36) выбрано произвольно при условии $y_k(0)\neq 0$ $\forall k\in\overline{1,n}$ и компоненты $Y(t)$, $Y'(t)$, $Y''(t)$ определяются из (38). Если $\forall k\in\overline{1,n}$ выполняется любая из пар неравенств $0\le y_k(t)$, $y_k'(t)\le 0$ или $y_k(t)\le 0$, $0\le y_k'(t)$ $\forall t\in[0,\infty)$, то система (36) устойчива. Если $\forall k\in\overline{1,n}$ выполняется пара неравенств $0\le y_k(t)$, $y_k'(t)<0$ или $y_k(t)\le 0$, $0<y_k'(t)$ $\forall t\in[0,\infty)$, и при этом $\exists\lim_{t\to\infty}y_k'(t)=\bar{q}_k$, $|\bar{q}_k|\neq\infty$, то рассматриваемая система асимптотически устойчива. Если эта система устойчива и $\forall k\in\overline{1,n}$ выполнено либо $y_k'(t)\le 0$, $0<y_k''(t)$, либо $0\le y_k'(t)$, $y_k''(t)<0$ $\forall t\in[0,\infty)$, то она асимптотически устойчива. Если система (36) устойчива, то для ее асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $\lim_{t\to\infty}\|Y'(t)\|=0$. Если $\forall k\in\overline{1,n}$ выполняется любая из троек неравенств $0<y_k(t)$, $y_k'(t)<0$, $0<y_k''(t)$ или $y_k(t)<0$, $0<y_k'(t)$, $y_k''(t)<0$ $\forall t\in[0,\infty)$, то система (36) асимптотически устойчива.*

Теорема 10. *Система (36) неустойчива, если $\exists k\in\overline{1,n}$, $\exists t_0>0$, такие, что $\forall t\in[t_0,\infty)$ верна хоть одна из пар неравенств: $0\le y_k(t)$, $0<y_k'(t)$; $y_k(t)\le 0$, $y_k'(t)<0$; $0<y_k(t)$, $0\le y_k'(t)$; $y_k(t)<0$, $y_k'(t)\le 0$; и при этом либо $y_k''(t)\le 0$, либо $0\le y_k''(t)$ $\forall t\in[t_0,\infty)$. В тех же условиях решение неустойчиво, если верна любая из следующих пар неравенств: $0<y_k'(t)$, $0\le y_k''(t)$; $y_k'(t)<0$, $y_k''(t)\le 0$; $0\le y_k'(t)$, $0<y_k''(t)$; $y_k'(t)\le 0$, $y_k''(t)<0$.*

Имеет место

Предложение 7. *Пусть решение $Y(t)$ системы (36) выбрано при условии $y_j(0)\neq 0$ $\forall j\in\overline{1,n}$. Тогда для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы хоть одна производная решения произвольного порядка была ограничена на полуоси: $\left\|Y^{(\ell)}(t)\right\|\le c$, $c=\text{const}$ $\forall t\in[0,\infty)$, $\ell=1,2,\ldots$. Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы для такой производной выполнялось соотношение $\left\|Y^{(\ell)}(t)\right\|\to 0$, $t\to\infty$.*

Доказательство. Очевидно,

$$Y'(t)=AY(t),\; Y''(t)=AY'(t)=A^2Y(t),$$

и

$$Y^{(\ell)}(t)=AY^{(\ell-1)}(t)=A^{\ell}Y(t)\;\;\forall\,\ell,\;\ell=1,2,\ldots.$$

Поэтому производная $Y^{(\ell)}(t)$ ограничена в том и только в том случае, если ограничено решение $Y(t)$. В рассматриваемых условиях ограниченность одного решения определяет ограниченность одновременно всех решений, что необходимо и достаточно для устойчивости системы (36) [1]. Для ее асимптотической устойчивости необходимо и достаточно стремление к нулю одновременно всех решений [1]. При рассматриваемом выборе решения это определяется тем, что $\|Y(t)\|\to 0$ при $t\to\infty$. Последнее соотношение выполняется тогда и только тогда, когда $\left\|Y^{(\ell)}(t)\right\|\to 0$, $t\to\infty$. Предложение доказано.

Следствие 11. Предложение 7 сохраняется, если в качестве условия устойчивости требовать ограниченности на полуоси производных одновременно всех порядков, в качестве условия асимптотической устойчивости – их одновременного стремления к нулю при $t\to\infty$.

Замечание 5. В условиях предложения 7 в случае неасимптотической устойчивости системы (36) необходимо найдется $k\in\overline{1,n}$, такое, что компонент производной $y_k^{(\ell)}(t)$ любого порядка циклически меняет знак с ростом *t* на полуоси.

Если предположить обратное, например, что $\forall k\in\overline{1,n}$ $\exists\ell\ge 2$, $\exists t_\ell\ge 0$: $0\le y_k^{(\ell)}(t)$ $\forall t\in[t_\ell,\infty)$, то $y_k^{(\ell-1)}(t)$ не убывает. По следствию 11 решение и производные всех порядков ограничены в силу устойчивости. Отсюда $\exists\lim y_k^{(\ell-1)}(t)=c_{\ell-1}$, $c_{\ell-1}=\text{const}$, $c_{\ell-1}\neq 0$,

$t\to\infty$. Аналогично в случае $y_k^{(\ell)}(t)\le 0$ $\forall t\in[t_\ell,\infty)$. В любом случае $\exists t_{\ell-1}\ge 0$, такое, что знак $c_{\ell-1}$, а вместе с ним и знак $y_k^{(\ell-1)}(t)$ постоянны $\forall t\in[t_{\ell-1},\infty)$. Для $y_k^{(\ell-1)}(t)$ можно повторить рассуждение, в результате $\exists t_{\ell-2}\ge 0$, такое, что знак $y_k^{(\ell-2)}(t)$ постоянен $\forall t\in[t_{\ell-2},\infty)$. По индукции $\exists t_1\ge 0$, такое, что знак $y_k'(t)$ постоянен $\forall t\in[t_1,\infty)$, и $\exists t_0\ge 0$, такое, что знак $y_k(t)$ постоянен $\forall t\in[t_0,\infty)$. Не умаляя общности, можно считать, что $t_1\le t_0$. Тогда $\forall t\in[t_0,\infty)$ компоненты $y_k(t)$ и $y_k'(t)$ имеют постоянные знаки. Если постоянные знаки $y_k(t)$, $y_k'(t)$ совпадают (знак $y_k''(t)$ постоянен), то по теореме 10 решение неустойчиво. Если эти знаки противоположны ($\exists \lim\limits_{t\to\infty} y_k'(t)=\bar q_k$, $|\bar q_k|\ne\infty$), то по теореме 9 решение асимптотически устойчиво. В обоих случаях это противоречит условию, по которому решение устойчиво, но не асимптотически. Следовательно, предположение неверно. С учетом того, что рассуждения распространялись на случай $y_k^{(\ell)}(t)$ при $\ell=1$, утверждение замечания доказано.

С учетом окрестности нулевых начальных значений сходное утверждение доказывается относительно решения системы (35).

Замечание 6. В случае неасимптотической устойчивости решения системы (35) $\forall\Delta_0 \underline{>0}$ $\exists V(0): 0<\|V(0)\|\le\Delta_0$, такое, что $\exists k\in\overline{1,n}$, при котором компоненты $u_k(t)$, $u_k'(t)$ циклически меняют знак с ростом t на полуоси.

Для компьютерного анализа устойчивости системы (36) целесообразно применять еще один способ численного моделирования. Он основан на том, что система (36) устойчива тогда и только тогда, когда $\left\|\lim\limits_{i\to\infty}\prod\limits_{\ell=0}^{i}(E+hA)\right\|\le C_0$, $C_0=\text{const}$, $\forall t\in[0,\infty)$, для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{t\to\infty}\left\|\lim\limits_{i\to\infty}\prod\limits_{\ell=0}^{i}(E+hA)\right\|=0$, где h из (4) [10, 11].

Вычисление степени $(E+hA)^i$ заменяется вычислением $(E+hA)^{2^\ell}$:

$$\left\|\lim_{\ell\to\infty}(E+hA)^{2^\ell}\right\|\le C_0,\ C_0=\text{const};$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\lim_{\ell\to\infty}(E+hA)^{2^\ell}\right\|=0. \qquad (39)$$

При достаточно малом h реализация (39) сводится к умножению матрицы $(E+hA)^{2^\ell}$ на себя до момента достижения заданной границы изменения t. Следующая программа совмещает анализ устойчивости системы (36) на основе теорем 8, 9 и соотношений (39).

```
Program sgnlinconst;{$APPTYPE CONSOLE} uses SysUtils;
const n=3; h=1.1e-14; x0=0; xn=1500; h1=1.1e-4;TT=150000;
type matr=array[1..n,1..n] of extended; vect=array[1..n] of extended;
const A: matr= ((-1,    -0.09,  0.077),
                (0.087,  -0.9,  0.005),
                (-0.034, 0.034, -0.2));
var  a1,c: matr; y1,y2,y3,z1,z2,z3: extended; s0,s1,x: extended; I,j,l,k,k0,kk: integer;
function ay1 (const a:matr; var y1,y2,y3: extended): extended;
begin ay1:=a[1,1]*y1 +a[1,2]*y2+a[1,3]*y3; end;
function ay2 (const a:matr; var y1,y2,y3: extended): extended;
begin ay2:=a[2,1]*y1 +a[2,2]*y2+a[2,3]*y3; end;
function ay3 (const a:matr; var y1,y2,y3: extended): extended;
begin ay3:=a[3,1]*y1 +a[3,2]*y2+a[3,3]*y3; end;
procedure ummatr (var a1,c: matr);
var  s1: extended; I,j,l : integer;
begin  for I := 1  to  n do for j := 1  to  n do
begin s1:=0; for l:= 1 to n do s1:= s1+a1[I,l]*a1[l,j]; c[I,j]:= s1 end; end;
begin kk:=0; for  i:=1 to n do for j:=1 to n do begin a1[I,j]:=a[I,j]*h; if i=j then a1[I,j]:=a1[I,j]+1 end;
x:=x0; y1:=2;y2:=2;y3:=2; while x<=xn do begin kk:=kk+1;
y1:=y1+ay1(a,y1,y2,y3)*h1; y2:=y2+ay2(a,y1,y2,y3)*h1; y3:=y3+ay3(a,y1,y2,y3)*h1;
if kk=TT then begin z1:=ay1(a,y1,y2,y3);z2:=ay2(a,y1,y2,y3);z3:=ay3(a,y1,y2,y3);
write ('  ':4,y1:4,'  ':4,ay1(a,y1,y2,y3):4,'  ':4,ay1(a,z1,z2,z3):4);writeln;
write ('  ':4,y2:4,'  ':4,ay2(a,y1,y2,y3):4,'  ':4,ay2(a,z1,z2,z3):4);writeln;
write ('  ':4,y3:4,'  ':4,ay3(a,y1,y2,y3):4,'  ':4,ay3(a,z1,z2,z3):4);writeln;
writeln; writeln; kk:=0; end; x:=x+h1; end; writeln; writeln;
k:=0; x:=x0; while  abs(x) <= 1e9{3} do begin ummatr (a1,c); k:=k+1;x:=h*exp((k+1)*ln(2));
for i:=1 to n do for j:=1 to n do a1[I,J]:=c[I,j]; s0:=0; for i:=1 to n do for j:=1 to n do
s0:=s0+sqr(a1[I,j]); s0:= sqrt(s0);  write ('  ':2, s0:2,'  ':8); end; writeln; writeln; writeln ('  ':2, 'шаг =',h,'  ');
writeln ('  ':2, 'параметр k=',k,'  ');writeln ('  ':2, 'параметр x=',x:2,'  '); readln end.
```

Результат выполнения программы:

Y	Y'	Y''
6.8E-0003	-1.3E-0003	2.8E-0004
1.3E-0003	-2.8E-0004	5.7E-0005
7.2E-0002	-1.4E-0002	3.0E-0003
2.4E-0004	-4.9E-0005	9.9E-0006
4.8E-0005	-9.8E-0006	2.0E-0006
2.5E-0003	-5.2E-0004	1.0E-0004
………	………	………
4.4E-0132	-8.9E-0133	1.8E-0133
8.8E-0133	-1.8E-0133	3.6E-0134
4.7E-0131	-9.4E-0132	1.9E-0132

$$\left\| (E+hA)^{2^\ell} \right\|$$

1.7E + 0000	1.7E + 0000	1.7E + 0000	1.7E + 0000
1.7E + 0000	1.7E + 0000	1.7E + 0000	1.7E + 0000
………	………	………	………
1.7E + 0000	1.7E + 0000	1.6E + 0000	1.5E + 0000
1.3E + 0001	1.1E + 0000	8.0E-0001	5.4E-0001
………	………	………	………
1.9E-0009	3.7E-0018	1.4E-0035	1.9E-0070
3.5E-0140	1.2E-0279	1.4E-0558	2.0E-1116
………	………	………	………
0.0E + 0000	0.0E + 0000	0.0E + 0000	0.0E + 0000
0.0E + 0000	0.0E + 0000	0.0E + 0000	0.0E + 0000

Система (36) с матрицей A, 3×3, заданной в разделе описания констант, решается методом Эйлера с шагом $h_1 = 1.1\times 10^{-4}$ на отрезке $[0, 1500]$. По ходу решения с начальными значениями $y_k(0) = 2$, $k = 1, 2, 3$ выводятся компоненты $y_k(t)$, $y'_k(t)$, $y''_k(t)$. Компоненты убывают до 10^{-130}, по следствию 11 это признак асимптотической устойчивости. Знаки компонентов чередуются на всем отрезке решения: $0 < y_k(t)$, $y'_k(t) < 0$, $0 < y''_k(t)$, $k = 1, 2, 3$. По теореме 8 это также признак асимптотической устойчивости. Соотношение (39) реализуется с шагом $h = 1.1\times 10^{-14}$ путем умножения матрицы $(E+hA)^{2^\ell}$ на себя до момента $t = 10^9$ (закомментировано $t = 10^3$ на случай переполнения от роста нормы при неустойчивости). Норма убывает от $\left\|(E+hA)^{2^1}\right\| = 1.7$ до $\left\|(E+hA)^{2^\ell}\right\| = 0$ при количестве умножений матрицы на себя $\ell = 76$. Согласно (39) это дополнительный признак асимптотической устойчивости. Признаки указывают правильный результат, поскольку матрица имеет диагональное преобладание отрицательных элементов.

Численный эксперимент. Используются эвклидовы нормы матрицы и вектора. Пусть в (36) в качестве матрицы коэффициентов поочередно рассматриваются

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -0.09 & 0.077 & -0.01 \\ 0.087 & -0.9 & 0.005 & 0.019 \\ -0.034 & 0.034 & -0.2 & -0.06 \\ 0 & -0.022 & 0.092 & -1.4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -0.09 & 0.077 & -0.01 \\ 0.087 & 0.9 & 0.005 & 0.019 \\ -0.034 & 0.034 & 0.2 & -0.06 \\ 0 & -0.022 & 0.092 & 1.4 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Если в программе sgnlinconst ввести изменения, соответственные размерности и конкретным данным, выводить левую часть (20) в обозначении $z_\ell = y_\ell(t)/y_\ell(0)$ при $y_\ell(0) = 3\times 10^{-6}$, $\ell \in \overline{1,4}$, $t\in[0,1500]$, то в случае A_1 получится $\|Z\| = \sqrt{\sum_{\ell=1}^{4} z_\ell^2}$: 1.02×10^0, …,

5.16×10^{-17}, …, 3.72×10^{-29}, …, 8.07×10^{-86}, …, 1.28×10^{-104}, …, 2.67×10^{-134}. Согласно (21) это признак асимптотической устойчивости (соответствует диагональному преобладанию отрицательных элементов). Для этой же матрицы получится признак асимптотической устойчивости, соответственный теореме 9: $0 < y_k(t)$, $y_k'(t) < 0$, $0 < y_k''(t)$, $k \in \overline{1,4}$. Кроме того, компоненты $y_k(t)$, $y_k'(t)$, $y_k''(t)$, $k \in \overline{1,4}$ убывают от 6.1×10^{-11} до 2.6×10^{-142}, по следствию 11 это также указывает на асимптотическую устойчивость. Реализация (39) даст для A_1 еще один признак асимптотической устойчивости $\left\|(E+hA_1)^{2^\ell}\right\|$: 2.0×10^0, 2.0×10^0, … , 1.9×10^0, 1.8×10^0,…, 2.3×10^{-36}, 5.2×10^{-72},…, 0, 0. В случае A_2 преобладают положительные диагональные элементы, рост нормы соответствует неустойчивости, $\|Z\|$: 5.75×10^0, …, 1.01×10^{20}, …, 3.68×10^{100}, …, 1.85×10^{491}, …, 4.30×10^{656}, …, 8.62×10^{772}, …, 4.18×10^{908}. Другой признак неустойчивости: $y_1 < 0$, $y_1' < 0$, $y_1'' < 0$; $0 < y_2$, $0 < y_2'$, $0 < y_2''$; $y_3 < 0$, $y_3' < 0$, $y_3'' < 0$; $0 < y_4$, $0 < y_4'$, $0 < y_4''$. Компоненты растут до 8.8×10^{893}, и далее, до переполнения, нарушается необходимое условие устойчивости следствия 11. Наконец, $\left\|(E+hA_2)^{2^\ell}\right\|$: 2.0×10^0, 2.0×10^0, … , 2.0×10^0, 2.1×10^0, 2.2×10^0, …, 1.1×10^{240}, 1.3×10^{480}, далее следует переполнение. Для обеих матриц (40) признаки указывают правильные результаты. Можно рассмотреть пограничные состояния устойчивости линейных уравнений, взяв в (36) матрицу Фробениуса с нижней строкой, соответственной характеристическому полиному с кратными (или напротив) мнимыми корнями. Пусть, например,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \; A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -16 & -25 & -20 & -10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Последняя строка – коэффициенты характеристических полиномов, за вычетом единичных при старших степенях, взятые с обратным знаком и расположенные в порядке возрастания индексов. Характеристический полином A_3 имеет кратные мнимые корни: $P_6(t) = t^6 - 2t^4 - 7t^2 - 4$ или $P_6(t) = (t^2+1)^2(t^2-4)$, в этом случае система неустойчива [14]. Программа sgnlinconst для A_3, $y_\ell(0) = 3\times10^{-6}$, $\ell \in \overline{1,6}$, $t \in [0,1500]$, даст $\|Z\| = \sqrt{\sum_{\ell=1}^{6} z_\ell^2}$: 3.35×10^1, …, 3.37×10^{67}, …, 3.71×10^{146}, …, 1.76×10^{241}, …, 1.32×10^{1276}, 2.82×10^{1290}. Ввиду нарушения условия (20) это признак неустойчивости. То же получается в соответствии с теоремой 10: $0 < y_k(t)$, $0 < y_k'(t)$, $0 < y_k''(t)$, $k \in \overline{1,6}$. Компоненты $y_k(t)$, $y_k'(t)$, $y_k''(t)$ растут до 2.9×10^{1285}, нарушая необходимое условие устойчивости следствия 11. Еще один признак неустойчивости, $\left\|(E+hA_3)^{2^\ell}\right\|$: 2.4×10^0, 2.4×10^0, …, 2.4×10^0, 2.5×10^0, …, 9.9×10^{02}, …, 3.5×10^{344}, 6.0×10^{688}, далее следует переполнение, что нарушает (39). Для матрицы A_4 характеристический полином имеет вид $P_6(t) = t^6 + 4t^5 + 10t^4 + 20t^3 + 25t^2 + 16t + 4$ или $P_6(t) = (t+1)^4(t^2+4)$, мнимые корни не кратны, действительные части остальных корней отрицательны, что соответствует неасимптотической устойчивости [14]. Программа с теми же входными параметрами даст $\|Z\|$: 1.25×10^1, …, 2.25×10^1, …, 2.36×10^1, …, 2.21×10^1, …, 1.79×10^1, …, 1.55×10^1, …, 1.95×10^1, …, 1.93×10^1. Это признак устойчивости согласно (20). Изменение компонентов $y_k(t)$, $y_k'(t)$, $y_k''(t)$, $k \in \overline{1,6}$ ограничено по модулю, например при $k = 1$ соответственно от 1.4×10^{-8}, 4.9×10^{-9}, 5.6×10^{-8} до 9.0×10^{-9}, 2.2×10^{-8}, 3.6×10^{-8}, аналогично при $k \in \overline{2,6}$, что указывает на устойчивость по следствию 11. В тройке $y_k(t)$, $y_k'(t)$, $y_k''(t)$ знаки циклически меняются с ростом *t*. Точнее, при каждом $k \in \overline{1,6}$ всегда имеется пара противоположных знаков соседних компонентов тройки, для смежной пары один из знаков повторяется. При этом комбинация знаков меняется с ростом *t* и циклически повторяется, что по замечанию 5 иллюстрирует именно неасимптотическую устойчивость системы. На том же отрезке $\left\|(E+hA_4)^{2^\ell}\right\|$: 2.4×10^0, …, 2.4×10^0, …, 7.3×10^0, …, 1.0×10^1, …, 1.2×10^1, …, 9.4×10^0, …, 6.7×10^0, …, 1.1×10^1, …, 7.0×10^0. Согласно (39) признак указывает на устойчивость. В результате признаки соответствуют неустойчивости системы (36) с матрицей A_3 и ее неасимптотической устойчивости в случае A_4. Пусть теперь рассматривается система $v_1' = -v_2\sqrt{v_1^2+v_2^2}$, $v_2' = v_1\sqrt{v_1^2+v_2^2}$. Известно, что ее нулевое решение устойчиво, все остальные неустойчивы. Программа, реализующая (20), аналогична приведенной выше sgnrost, отличается размерностью и функциями правой части. Признак устойчивости нулевого решения получается, в частности, при $v_k(0)=10^{-6}$, $k=1,2$, $t\in[0,1500]$, шаг метода Эйлера $h=10^{-6}$. В прежнем обозначении выводится $\|Z\| = \sqrt{z_1^2+z_2^2}$: 1.4, 1.4, … , 1.4. Признак сохраняется при вариации начальных значений. То, что устойчивость нулевого решения не асимптотическая, иллюстрируется, в частности, в случае $v_k(0)=10^{-3}$: компоненты $v_k(t)$ и $u_k(t)$ циклически меняют знаки с ростом $t\in[0,1500]$ в соответствии с замечанием 6, при этом $\|Z\|$ не выходит из отмеченных выше границ. Неустойчивость ненулевых решений на основе соотношения (18) проявляется, начиная с начальных значений $v_1(0)=10^{-4}$, $v_2(0)=10^{-4}$, при возмущении 3×10^{-6}. В обозначении $z_k=(\tilde v_k(t)-v_k(t))/(\tilde v_k(0)-v_k(0))$ получится $\|Z\| = \sqrt{z_1^2+z_2^2}$: 1.41, 1.41, …, 1.42, …, 1.43, …, 1.447. Если $v_1(0)=10^{-3}$, $v_2(0)=10^{-3}$, то $\|Z\|$: 1.4, 1.5, …, 1.6, …, 1.9, …, 2, …, 2.1, …, 3, …, 3.3. Если $v_1(0)=v_2(0)=10^{-1}$, то $\|Z\|$: 2, …, 4, …, 12, …, 89, …, 91, …, 180, …, 251, …, 300, …, 312. Признак сохраняется при вариации возмущений начальных значений. Для ненулевого решения признак в соответствии с теоремой 7 непосредственно не получится, поскольку теорема дана для нулевого решения системы (35). Однако если численно смоделировать замены переменных $w_k(t)=\tilde v_k(t)-v_k(t)$, сводящие анализ устойчивости ненулевого решения $V(t)$ к анализу нулевого решения $W(t)$, то требуемый признак проявится при $v_k(0)=10^{-4}$ и $\tilde v_k(0)=10^{-4}+10^{-9}$, $k=1,2$. На всем отрезке $[0,1500]$ знаки второго компонента решения и производной будут совпадать: $0<w_2(t)$, $0<w_2'(t)$, при этом $\|Z\|$ монотонно растет. Согласно эксперименту при возмущениях любых ненулевых начальных значений $\|Z\|$ неизменно растет, указывая на неустойчивость ненулевых решений.

Инвариантность признаков (18)–(21) для нелинейных уравнений далее иллюстрирует пример с использованием аналитических преобразований и оценок. Из (10) $\tilde y_k(t)-y_k(t)=e^{\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{\ell=0}^{i}\ln(1+D_{i-\ell}^{(k)}h)}(\tilde y_{k0}-y_{k0})$ $\forall t\in[t_0,\infty)$, $\forall k\in\overline{1,n}$. Лемма 2 сохранится при замене (11) на соотношение $\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{\ell=0}^{i}\ln(1+D_{i-\ell}^{(k)}h)\le c_{11}$, $c_{11}=\text{const}$ $\forall t\in[t_0,\infty)$, $\forall k\in\overline{1,n}$ и (12) – на соотношение $\lim\limits_{t\to\infty}\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{\ell=0}^{i}\ln(1+D_{i-\ell}^{(k)}h)=-\infty$ $\forall k\in\overline{1,n}$ [11]. Согласно (16), (17) в условиях теоремы 1 при достаточно малом h под знаком логарифма исключены неустранимые особенности. С учетом $\lim\limits_{h\to0}(\ln(1+D_{i-\ell}^{(k)}h)/(D_{i-\ell}^{(k)}h))=1$ в тех же условиях лемма 2 сохранится при замене (11) на соотношение $\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{\ell=0}^{i}(D_{i-\ell}^{(k)}h)\le c_{11}$, $c_{11}=\text{const}$ $\forall t\in[t_0,\infty)$, $\forall k\in\overline{1,n}$ и (12) – на соотношение $\lim\limits_{t\to\infty}\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{\ell=0}^{i}(D_{i-\ell}^{(k)}h)=-\infty$ $\forall k\in\overline{1,n}$. На этой основе в рамках теоремы 1 ограничение (5) снимается с интегральных аналогов $\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{\ell=0}^{i}(D_{i-\ell}^{(k)}h)$ как пределов интегральных сумм на $[t_0,t]$, элементами которых являются $D_{i-\ell}^{(k)}$ из (6), (10). Пусть задача (1) записана в виде

$$V_t'=U(t,V),\ V(t_0)=V_0, \quad (41)$$

где $U(t,V)=(u_1(t,V),u_2(t,V),\dots,u_n(t,V))$, $V=(v_1(t),v_2(t),\dots,v_n(t))$, $V_0=(v_{10},v_{20},\dots,v_{n0})$, и пусть она имеет нулевое решение $V(t)=\bar O$ $\forall t\in[t_0,\infty)$, $V(t_0)=\bar O$, $0<t_0$, устойчивость которого требуется исследовать. В дальнейшем для задачи (41) предполагаются выполненными условия теоремы 1 относительно ограничения (5), и любое ненулевое решение (41) интерпретируется как возмущение решения $V(t)=\bar O$. При замене $\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{\ell=0}^{i}(D_{i-\ell}^{(k)}h)$ на интеграл справедлива

Лемма 7 [11]. *Лемма 2 сохраняется для* $V(t)$ *из (41), если соотношения (11) заменить на* $\int_{t_0}^{t}(u_k(t,V)/v_k(t))\,dt \le c^{(11)}$, $c^{(11)}=\mathrm{const}\ \forall t\in[t_0,\infty)$ *и (12) – на* $\int_{t_0}^{\infty}(u_k(t,V)/v_k(t))\,dt=-\infty$, $\forall k\in\overline{1,n}$.

В точках устранимых особенностей, $v_k(\tilde t)=0$, дроби $u_k(t,V)/v_k(t)$ доопределяются: $u_k(\tilde t,V)/v_k(\tilde t)=\lim_{t\to\tilde t}(u_k(t,V)/v_k(t))$, и ограничение (5) снимается с условий двух теорем из [11].

Теорема 11. *Если* $\exists\,\Delta_1>0$: $\forall V(t)$, $0<\|V(t_0)\|\le\Delta_1$, *выполнено* $u_k/v_k \le f_k(t)\ \forall t\in[t_0,\infty)$, $\forall k\in\overline{1,n}$, *где* $\int_{t_0}^{t} f_k(t)\,dt\le c_{11}$, $c_{11}=\mathrm{const}$, *то решение* $V(t)=\bar O$ *устойчиво. В частности,* $f_k(t)=\rho t^{\beta}$, $\beta<-1$, $\beta=\mathrm{const}$, $\rho=\mathrm{const}$. *Если* $\forall\,\Delta_1>0\ \exists\,V(t)$, $0<\|V(t_0)\|\le\Delta_1$, $\exists\,k\in\overline{1,n}$: $u_k/v_k\ge g_k(t)\ \forall t\in[t_0,\infty)$, *где* $\int_{t_0}^{\infty} g_k(t)\,dt=\infty$, *то решение* $V(t)=\bar O$ *неустойчиво. В частности,* $g_k(t)=\rho t^{\alpha}$, $-1\le\alpha$, $0<\rho$, $\alpha=\mathrm{const}$, $\rho=\mathrm{const}$.

Теорема 12. *Если для (41) выполнены условия устойчивости теоремы 1 и* $\exists\Delta_2>0$, $\Delta_2\le\Delta_1$, $\forall V(t)$, $0<\|V(t_0)\|\le\Delta_2$: $u_k/v_k\le f_k(t)\ \forall t\in[t_0,\infty)$, $\forall k\in\overline{1,n}$, *где* $\int_{t_0}^{\infty} f_k(t)\,dt=-\infty$, *то решение* $V(t)=\bar O$ *асимптотически устойчиво. В частности,* $f_k(t)=-\rho t^{\beta}$, $-1\le\beta$, $0<\rho$, $\beta=\mathrm{const}$, $\rho=\mathrm{const}$.

Условиям теоремы 12 удовлетворяет система

$$\begin{aligned} v_k' &= -k\rho t^{\beta} v_k + t^{-2} v_k \cos^2(v_k v_r)\, e^{\sin^3\left(v_k^3 v_r^2\left(\sum_{\ell=0}^{p} a_\ell t^\ell \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell v_r^\ell\right)\right)},\\ v_r' &= -r(1+\sin^6(v_k^3+v_r^3))\, v_r t^{\beta},\ k\in\overline{1,n},\ \forall r\in\overline{1,n},\ r\ne k, \end{aligned} \tag{42}$$

где $0<t_0$, $v_k(t_0)=v_{k0}$, $k\in\overline{1,n}$, $0<\rho$, $-1<\beta<0$; $0\le p$, $0\le q$; a_ℓ, b_i – вещественные числа $\forall\ell\in\overline{0,p}$, $\forall i\in\overline{0,q}$. Для (42) $-k\rho t^{\beta}+t^{-2}\cos^2(v_k v_r)\, e^{\sin^3\left(v_k^3 v_r^2\left(\sum_{\ell=0}^{p} a_\ell t^\ell \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell v_r^\ell\right)\right)} \le f_k(t)$, где $f_k(t)=-k\rho t^{\beta}+t^{-2}e$, при этом $\int_{t_0}^{\infty} f_k(t)\,dt=-k\rho((\beta+1)^{-1}\lim_{t\to\infty}t^{\beta+1}-(\beta+1)^{-1}t_0^{\beta+1})+(-\lim_{t\to\infty}t^{-1}+t_0^{-1})$, или, $\int_{t_0}^{\infty} f_k(t)\,dt=-\infty$. Кроме того, $-r(1+\sin^6(v_k^3+v_r^3))\,t^{\beta}\le f_r(t)$, где $f_r(t)=-rt^{\beta}$, $r\ne k$, и $\int_{t_0}^{\infty} f_r(t)\,dt=-\infty$. Решение $V(t)=\bar O$ асимптотически устойчиво. На основе (20), (21), $z_k=v_k(t)/v_k(t_0)$ для значений $n=2$, $t_0=0.5$, $\beta=-0.5$, $\rho=0.5$, $p=3$, $q=3$, $a_\ell=1$, $b_\ell=1$, $\ell=0,1,2$ модифицированная программа sgnrost, $v_k(0)=3\times10^{-6}$, $k=1,2$, $t\in[0,1500]$, шаг метода Эйлера $h=10^{-6}$, даст соответственный признак $\|Z\|=\sqrt{z_1^2+z_2^2}$: 5.33×10^{-1}, …, 6.17×10^{-3}, …, 9.66×10^{-10}, …, 9.24×10^{-14}, …, 4.92×10^{-16}, …, 2.56×10^{-16}.

Кроме того, $0<v_k(t)$, $v_k'(t)<0$, $t\in[0,1500]$, $k=1,2$, для правой части в данном приближении выполнено $\lim_{t\to\infty}\|U(t,V)\|=0$ (на конце отрезка $\|U(t,V)\|=10^{-23}$).

Если в (42) множитель t^{-2} заменить на –1, то полученная система снова будет удовлетворять условиям теоремы 12, можно положить $f_k(t)=-k\rho t^{\beta}$, откуда следует асимптотическая устойчивость решения $V(t)=\bar O$. Программа даст $\|Z\|$: 3.99×10^{-5}, …, 7.65×10^{-12}, …, 8.26×10^{-21}, …, 2.31×10^{-38}, …, 1.91×10^{-54}, …, 1.42×10^{-63}, …, 1.45×10^{-66}.

Как и в предыдущем случае, $0<v_k(t)$, $v_k'(t)<0$, $t\in[0,1500]$, $k=1,2$, на конце отрезка $\|U(t,V)\|=2.3\times10^{-73}$.

Если t^{-2} заменить на +1 то $u_k(t) = v_k(t)\,g_k(t)$, где

$$g_k(t) = -k\rho t^{\beta} + \cos^2(v_k v_r)\, e^{\sin^3\left(v_k^3 v_r^2\left(\sum_{\ell=0}^{p} a_\ell t^\ell \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell v_r^\ell\right)\right)},$$

нулевое решение окажется неустойчивым. Если предположить обратное – что $V(t)=\bar{O}$ устойчиво, то $\forall\varepsilon>0$, $\varepsilon^4+\varepsilon\le 4^{-1}$, $\exists\,\Delta>0$: при условии $0<\|V(t_0)\|\le\Delta$ выполнено $|v_k(t)|\le\varepsilon\ \forall k\in\overline{1,n}$, так что $|v_k(t)v_r(t)|\le\varepsilon^2\ \forall t\in[t_0,\infty)$, $\forall k\in\overline{1,n}, \forall r\in\overline{1,n}$. С учетом $\cos^2(v_k v_r)=1-\sin^2(v_k v_r)$ при достаточно малом ε верно $\cos^2(v_k v_r)\ge 1-\varepsilon^4-\varepsilon$. Отсюда

$$\cos^2(v_k v_r)\, e^{\sin^3\left(v_k^3 v_r^2\left(\sum_{\ell=0}^{p} a_\ell t^\ell \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell v_r^\ell\right)\right)} \ge (1-\varepsilon^4-\varepsilon)\, e^{-1}.$$

В силу $\beta<0$, начиная с некоторого $t_1\ge t_0$, выполняется $\left|-k\rho t^{\beta}\right|\le(\varepsilon^4+\varepsilon)\,e^{-1}\ \forall t\in[t_1,\infty)$. С точностью до устранимых особенностей $u_k(t)/v_k(t)=g_k(t)\ \forall t\in[t_1,\infty)$, где $g_k(t)\ge(1-2\varepsilon^4-2\varepsilon)e^{-1}$. Поскольку $\varepsilon^4+\varepsilon\le 4^{-1}$, то $g_k(t)\ge 2^{-1}e^{-1}\ \forall t\in[t_1,\infty)$, $\int_{t_1}^{t} g_k(t)\,dt\ge 2^{-1}\int_{t_1}^{t} e^{-1}dt$, и $\int_{t_1}^{\infty} g_k(t)\,dt=\infty$. Функция $g_k(t)$ ограничена $\forall t\in[t_0,t_1]$, отсюда $\int_{t_0}^{\infty} g_k(t)\,dt=\infty$. По теореме 10 решение $V(t)=\bar{O}$ неустойчиво вопреки предположению. Предположение неверно, и решение неустойчиво. Программа даст признак $\|Z\|$: 1.75×10^{3}, …, 6.05×10^{22}, …, 8.43×10^{40}, …, 1.20×10^{50}, …, 1.17×10^{66}, …, 4.96×10^{74}, …, 8.42×10^{77}.

Кроме того, $0<v_1(t)$, $0<v_1'(t)$ ($0<v_2(t)$, $v_2'(t)<0$), $t\in[0,1500]$. Все признаки сохраняются в единичной окрестности нулевых начальных значений.

Система (42) не является автономной, поэтому для оценки устойчивости нельзя сослаться на теоремы 4–8 и предложения 1–6. Тем не менее в рассмотренных трех видоизменениях этой системы экспериментальное поведение знаков компонентов решения и производной, стремление производной к нулю на полуоси соответствуют предложению 4, теоремам 6 и 8. Можно допустить, что при некоторых ограничениях предложения 1–6 теоремы 4–8 переносятся на общий случай системы (41) и на ее частный случай (42). В самом деле, при доказательстве предложений и теорем в случае автономной системы нигде не использовалась специфика системы (35), а применялись только предельные свойства монотонной функции одной переменной в зависимости от знака ее производной. Эти свойства были нужны, чтобы получить стремление к нулю компонентов правой части: $\lim_{t\to\infty} u_k(t)=0$ $\forall k\in\overline{1,n}$. Как только эти соотношения выполнялись, из них автоматически следовало стремление к нулю решения: $\lim_{t\to\infty} v_k(t)=0$ $\forall k\in\overline{1,n}$. Отсюда рассматриваемые рассуждения переносятся на случай конкретной разновидности системы (41), если для нее выполняется $U(\bar{O})=\bar{O}$ и то ограничение, что из $\lim_{t\to\infty} u_k(t)=0\ \ \forall k\in\overline{1,n}$ следует $\lim_{t\to\infty} v_k(t)=0\ \ \forall k\in\overline{1,n}$. Нетрудно видеть, что для системы (42) $U(\bar{O})=\bar{O}$, а соотношения знаков $u_k(t)$ и $v_k(t)$ $\forall t\in[t_1,\infty)$ при достаточно большом t_1 тривиально выводятся аналитически. Из этих соотношений непосредственно следует устойчивость точки покоя первых двух рассмотренных разновидностей системы (42) и ее неустойчивость в случае третьей разновидности. Однако доказать асимптотическую устойчивость точки покоя двух первых разновидностей системы с помощью аналитического вывода соотношения $\lim_{t\to\infty} u_k(t)=0\ \ \forall k\in\overline{1,n}$ уже затруднительно. Более того, принципиальную трудность представляет показать, что из этого соотношения следует $\lim_{t\to\infty} v_k(t)=0$ $\forall k\in\overline{1,n}$: правая часть (42) может стремиться к нулю за счет множителей – степенных функций с отрицательными показателями. Однако можно отметить, что экспериментальное выполнение $\lim_{t\to\infty} u_k(t)=0$ согласуется с оценками на основе теоремы 12 – из оценок следует $u_k/v_k\to 0$, если $t\to\infty$, что возможно только, если $u_k\to 0$ при $t\to\infty$. Однако анализ на основе теоремы 12 уже влечет вывод об асимптотической устойчивости и не требует иных доказательств. Остается заключить, что представленные методы не перекрывают друг друга, они целесообразны в соответствии с классами задач и возможностями численного моделирования устойчивости.

Относительно ограничений параметров в ходе численного эксперимента можно отметить следующее. Для линейных систем изложенные признаки применимы в границах $10^{-15}\le h\le 10^{-3}$, для нелинейных – $10^{-6}\le h\le 10^{-3}$, h из (4). Границы t, в которых численные признаки достоверны, сокращаются с ростом h и размерности n, увеличиваются с точностью приближенных методов.

Заключение

Изложены компьютерно-ориентированные методы анализа устойчивости на основе приближенного решения дифференциальных систем, применимые к нелинейным, автономным и линейным системам. Методы включают необходимые и достаточные условия устойчивости с учетом класса задач, используются для построения численных признаков и для аналитического исследования. Предлагается совокупность способов одновременного компьютерного контроля устойчивости по ходу решения системы в реальном времени.

Список литературы

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Изд-во «Науку-всем», 2019. 480 с.

2. Канатников А.Н. Качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 44 с.

3. Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001. 376 с.

4. Маркеев А.П., Сокольский А.Г. Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем. М.: Препринт ИПМ АН СССР. 1976. № 31. 61 с.

5. Hammarling S. J. Numerical Solution of the Stable, Nonnegative Definite Lyapunov Equation. IMA J. of Num. Analysis. Vol. 2. Issue 3. 1. July 1982. P. 303–323.

6. Новиков М.А. О вычислительных способах достаточных условий устойчивости автономных консервативных систем // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2014. № 1 (41). С. 28–36.

7. Giesl P.A., Hafstein S.F. Computation of Lyapunov functions for nonlinear discrete time systems by linear programming. J. Difference Equ. Appl. 2014. 20. P. 610–640.

8. Giesl P.A., Hafstein S.F. Revised CPA method to compute Lyapunov functions for nonlinear systems. J. of Math. Anal. And Appl. February 2014. Vol. 410. Issue 1. P. 292–306.

9. Giesl P.A., Hafstein S.F. Review on computational methods for Lyapunov functions. Discrete & Continuous Dynamical Systems–B. 2015. Vol. 420 (8). P. 2291–2331.

10. Ромм Я.Е. Моделирование устойчивости по Ляпунову на основе преобразований разностных схем решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия РАН. Математическое моделирование. 2008. Т. 20. № 12. С. 105–118.

11. Ромм Я.Е. Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости на основе рекуррентных преобразований разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Кибернетика и системный анализ. 2015. Т. 51. № 3. С. 107–124.

12. Пиголкина Т.С. Автономные системы. Фазовые траектории. Элементы теории устойчивости. М.: Изд-во МФТИ, 2013. 40 с.

13. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. СПб.: Изд-во «Лань», 2018. 608 с.

14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 558 с.

15. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1967. 566 с.