

УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧАСТОТНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ СИГНАЛОВ МНОГОЧАСТОТНОГО ДОПЛЕРОВСКОГО ПРОСВЕЧИВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО КАНАЛА

¹Агеева Е.Т., ²Афанасьев Н.Т., ¹Багинов А.В., ¹Ким Д.Б., ²Танаев А.Б., ²Чудаев С.О.

¹ФГБОУ ВО «Братский государственный университет», Братск;

²ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет», Иркутск, e-mail: spacemaklay@gmail.com

Развит метод численно-аналитического расчета статистических моментов доплеровского смещения частоты сигнала в задаче многочастотного просвечивания диэлектрического информационного канала. В основу метода положено решение трехмерного стохастического уравнения эйконала методом характеристик. С помощью прямого разложения Пуанкаре сделан вывод системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для совместного расчета вторых моментов доплеровского сдвига частоты и траектории сигнала, соединяющей пункты излучения и приема. Решения системы уравнений находятся путем пристрелки невозмущенных траекторий сигнала в пункт наблюдения для каждой рабочей частоты просвечивания. Уравнения для моментов решаются с начальными условиями. В результате решение краевой стохастической траекторной задачи для обращения данных многочастотного доплеровского просвечивания канала существенно упрощается. В качестве модели возмущения канала рассмотрено квазиоднородное пространственно-временное поле неоднородностей, удовлетворяющее гипотезе о замороженном переносе. В канале с линейным профилем диэлектрической проницаемости получено аналитическое решение для дисперсий доплеровского сдвига частоты сигнала при движении поля неоднородностей в различных направлениях относительно трассы просвечивания. Для численного решения полученной системы дифференциальных уравнений в случае произвольного профиля диэлектрической проницаемости разработан вычислительный алгоритм. Проведено тестирование алгоритма путем сравнения результатов численных и аналитических расчетов. Выполнено моделирование дисперсии доплеровского сдвига частоты сигнала при многочастотном просвечивании двухслойного канала с крупномасштабным возмущением интенсивных хаотических неоднородностей диэлектрической проницаемости.

Ключевые слова: информационный канал, стохастические возмущения, численно-аналитическое моделирование, математическая теория управления

MODELING FREQUENCY FLUCTUATIONS OF A SIGNAL DURING MULTI-FREQUENCY DOPPLER TRANSMISSION IN A STOCHASTIC CHANNEL

¹Ageeva E.T., ²Afanasev N.T., ¹Baginov A.V., ¹Kim D.B., ²Tanaev A.B., ²Chudaev S.O.

¹Bratsk State University, Bratsk;

²Irkutsk State University, Irkutsk, e-mail: spacemaklay@gmail.com

A method is developed for numerical-analytical calculation of the statistical moments of the Doppler frequency shift of a signal during multi-frequency transmission in the dielectric information channel. The method is based on the solution of the three-dimensional stochastic eikonal equation by the method of characteristics. Using direct Poincaré expansion, a system of ordinary first-order differential equations is derived for the joint calculation of the second moments of the Doppler frequency shift and the signal path connecting the emission and reception points. The solution of the system of equations is found by shooting unperturbed signal trajectories to the observation point for each operational transmission frequency. The equations for the moments are solved assuming initial conditions. As a result, the solution of the boundary-value stochastic trajectory problem for reversing the data of multi-frequency Doppler transmission in a channel is significantly simplified. The channel perturbations are modeled as a quasi-homogeneous spatio-temporal field of dielectric permittivity inhomogeneities, satisfying the hypothesis of frozen-in transport. In a channel characterised by a linear dielectric permittivity profile, an analytical solution is obtained for the variances of the Doppler frequency shift when the field of inhomogeneities moves in various directions relative to the transmission path. In the case of an arbitrary dielectric permittivity profile, a numerical algorithm to solve the resulting system of differential equations is developed. The algorithm is tested by comparing the results of numerical and analytical calculations. The variance of the Doppler frequency shift is computed for the case of a multi-frequency transmission in a two-layer channel with a large-scale perturbation of intense chaotic inhomogeneities of the dielectric permittivity.

Keywords: information channel, stochastic disturbances, numerical-analytical modeling, mathematical control theory

Для прогнозирования состояния информационного канала необходимо знать степень воздействия различных возмущающих факторов на характеристики передаваемых сигналов. Особенно это важно при отсутствии возможности экспериментальной проверки возникающих искажений сигнала. В таких условиях решающую

роль играет математическое моделирование процесса передачи сигнала в возмущенном канале. Для решения ряда практических задач определяющее значение имеет оперативность оценки возможных искажений сигналов при распространении в канале. Последнее обстоятельство вынуждает искать пути упрощения и опти-

мизации алгоритмов расчетов характеристик сигнала.

Одним из эффективных методов оценки состояния информационного канала является метод многочастотного доплеровского просвечивания [1]. Преимуществами этого метода являются: повышенная чувствительность к малым изменениям среды канала, высокое временное разрешение, сравнительная простота и дешевизна аппаратных решений, а также возможность организации непрерывных наблюдений. Для решения практической задачи многочастотного просвечивания стохастического канала полезным является математическое моделирование ожидаемых доплеровских характеристик сигнала в условиях пространственно-временных случайных возмущений.

Для расчета характеристик сигнала в информационном канале широко используется лучевое приближение [2]. Под влиянием возмущений канала лучи могут изменять направление распространения и формировать сложную структуру сигнала. Хорошо известным методом расчета влияния случайных неоднородностей канала на траекторные характеристики сигнала является метод статистических испытаний, основанный на численной схеме Монте-Карло [3]. Однако при фиксированной дистанции между корреспондентами эта схема не всегда оптимальна для расчета. Возникающая здесь проблема в первую очередь связана с трудностями численного решения краевой задачи для стохастических дифференциальных уравнений, описываю-

щих процесс распространения сигнала. Для каждой реализации пространственно-временного распределения неоднородностей канала необходимо выполнение граничного условия для траекторий сигнала в пункте приема. Последнее не только требует больших вычислительных ресурсов для проведения расчетов, но и может сопровождаться потерей устойчивости самой схемы расчета. Другим вариантом расчета флуктуаций характеристик сигнала является приближенное аналитическое решение стохастических дифференциальных уравнений с последующим усреднением квадратур и введением физических представлений о корреляционных свойствах неоднородностей канала. Численная реализация усредненных квадратур является завершающей стадией метода численно-аналитического расчета статистических моментов сигнала [4].

Цель настоящей работы заключается в развитии метода численно-аналитического моделирования частотных флуктуаций сигнала в задаче многочастотного доплеровского просвечивания информационного канала, подверженного пространственно-временным случайным воздействиям.

Основные теоретические соотношения

В приближении геометрической оптики [5] расчет доплеровского смещения частоты сигнала при многочастотном просвечивании стохастического информационного канала сводится к интегрированию дифференциального уравнения:

$$\frac{d\Delta f}{dt} = -\frac{f}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} [\varepsilon(x(t, f), y(t, f), z(t, f), f, \tau)], \quad (1)$$

где $\varepsilon(x, y, z, f, \tau)$ – случайная функция, характеризующая диэлектрическую проницаемость канала, τ – время, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – случайные функции, описывающие траекторию луча, f – рабочая частота просвечивания, Δf – доплеровский сдвиг частоты, dt – элемент времени группового запаздывания. Случайную траекторию луча в формуле (1) можно определить, решая уравнение эйконала методом характеристик [5]. Для расчетов будем использовать лучевые уравнения в виде

$$\frac{dx}{dt} = c\sqrt{\varepsilon} \cos \alpha_1, \quad \frac{dy}{dt} = c\sqrt{\varepsilon} \cos \alpha_2, \quad \frac{dz}{dt} = c\sqrt{\varepsilon} \cos \alpha_3, \quad (2)$$

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = c \left(\frac{\partial \sqrt{\varepsilon}}{\partial y} \cos \alpha_2 + \frac{\partial \sqrt{\varepsilon}}{\partial z} \cos \alpha_3 \right) \operatorname{ctg} \alpha_1 - c \frac{\partial \sqrt{\varepsilon}}{\partial x} \sin \alpha_1, \quad (3)$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = c \left(\frac{\partial \sqrt{\varepsilon}}{\partial x} \cos \alpha_1 + \frac{\partial \sqrt{\varepsilon}}{\partial z} \cos \alpha_3 \right) \operatorname{ctg} \alpha_2 - c \frac{\partial \sqrt{\varepsilon}}{\partial y} \sin \alpha_2, \quad (4)$$

$$\frac{d\alpha_3}{dt} = c \left(\frac{\partial \sqrt{\varepsilon}}{\partial y} \cos \alpha_2 + \frac{\partial \sqrt{\varepsilon}}{\partial x} \cos \alpha_1 \right) \operatorname{ctg} \alpha_3 - c \frac{\partial \sqrt{\varepsilon}}{\partial z} \sin \alpha_3, \quad (5)$$

где $\cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2$, $\cos \alpha_3$ – направляющие косинусы луча в декартовой системе координат.

Уравнения (1)–(5) были решены методом прямого разложения Пуанкаре [6]. Диэлектрическая проницаемость канала представлялась в виде суммы средней составляющей $\epsilon_0(z) = \langle \epsilon \rangle$ и случайного воздействия $\epsilon_1(x, y, z)$, ($\langle \epsilon_1 \rangle = 0$) при условии $|\epsilon_1| \ll \epsilon_0$. Решение уравнений (1)–(5) определялось в виде разложений: $x = x_0 + x_1$, $y = y_0 + y_1$, $z = z_0 + z_1$, $\alpha_1 = \alpha_{10} + \alpha_{11}$, $\alpha_2 = \alpha_{20} + \alpha_{21}$, $\alpha_3 = \alpha_{30} + \alpha_{31}$, $\Delta f = \Delta f_0 + \delta f$. Здесь $y_0 = \langle y \rangle$, $x_0 = \langle x \rangle$, $z_0 = \langle z \rangle$, $\alpha_{10} = \langle \alpha_1 \rangle$, $\alpha_{20} = \langle \alpha_2 \rangle$, $\alpha_{30} = \langle \alpha_3 \rangle$, $\Delta f_0 = \langle \Delta f \rangle$ – средние характеристики сигнала; $x_1, y_1, z_1, \alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \delta f$ – малые флуктуации характеристик. Подставляя эти разложения в (1)–(5) и полагая, что средняя траектория лежит в плоскости ZOX ($y_0 = 0, \alpha_{20} = \pi/2, \alpha_{10} + \alpha_{30} = \pi/2$), для расчета флуктуаций доплеровского смещения частоты сигнала, прошедшего заданную дистанцию, в первом приближении имеем уравнение

$$\frac{d\delta f}{dt} = -\frac{f}{2} \frac{\partial \epsilon_1(x_0, z_0, y_0, \tau)}{\partial \tau}, \quad (6)$$

где средняя траектория есть решение системы уравнений

$$\frac{dx_0}{dt} = c\sqrt{\epsilon_0} \sin \beta_0, \quad \frac{dz_0}{dt} = c\sqrt{\epsilon_0} \cos \beta_0,$$

$$\frac{d\beta_0}{dt} = -c \frac{\partial \sqrt{\epsilon_0}}{\partial z} \sin \beta_0. \quad (7)$$

Здесь β_0 – текущий угол рефракции луча относительно вертикальной оси Z. При выводе (6) предполагалось, что скорость движения хаотических неоднородностей существенно больше скорости движения средней диэлектрической проницаемости канала ($\frac{\partial \epsilon_0}{\partial \tau} \ll \frac{\partial \epsilon_1}{\partial \tau}$). Уравнения (6), (7) были решены с краевыми условиями

$$\delta f(0) = 0, \quad x_0(0, f) = 0, \quad x_0(t_k, f) = x_k,$$

$$z_0(0, f) = z_0(t_k, f) = 0, \quad (8)$$

где t_k – групповая задержка сигнала в пункте приема x_k . Интегрируя (6) и проводя усреднение по всем реализациям флуктуаций диэлектрической проницаемости, для дис-

персии доплеровского сдвига частоты сигнала имеем

$$\sigma_f^2 = \frac{f^2}{4} \int_0^{t_k} \int_0^{t_k} \left\langle \frac{\partial^2 N}{\partial \tau_1 \cdot \partial \tau_2} \right\rangle dt_1 dt_2, \quad (9)$$

где $N(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, \tau_1, \tau_2)$ – пространственно-временная корреляционная функция случайного поля неоднородностей канала. Полагая, что поле неоднородностей обладает свойствами квазистационарности и квазиоднородности [5], функцию корреляции можно представить в виде

$$N = N_1 \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \times$$

$$\times N_0(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2, \tau_1 - \tau_2), \quad (10)$$

где τ_1, τ_2 – последовательные моменты времени, а функция N_1 меняется более медленно, по сравнению с функцией N_0 .

Для расчета интеграла (9) необходимо задать явный вид функции N . В общем случае эта функция неизвестна. Между тем оценка флуктуаций доплеровского смещения частоты сигнала в информационном канале возможна на основе модели случайно-неоднородной среды канала с обобщенными (интегральными) свойствами. В данном направлении были получены важные результаты благодаря введению представлений о гауссовом корреляционном эллипсоиде, эффективно описывающих случайные неоднородности среды [7] и позволяющих существенно упростить аналитические расчеты статистических моментов сигнала. Следует заметить, что реальные информационные каналы могут содержать хаотические неоднородности многих масштабов, которые описываются степенным спектром [5]. Тем не менее при расчетах низших моментов фазовых флуктуаций сигнала можно использовать гауссов спектр неоднородностей с эффективными параметрами. В частности, исследования показали, что при расчетах дисперсии фазы сигнала в многомасштабной случайно-неоднородной среде канала можно использовать гауссову модель корреляционного эллипсоида, если в качестве пространственного масштаба неоднородностей считать внешний масштаб турбулентности, заданной степенным спектром. Связано это с тем, что высокочастотная часть спектра неоднородностей в большей степени оказывает влияние на амплитуду сигнала и в меньшей степени на его фазу [5].

Для однородной части корреляционной функции канала используем гауссову форму, а движение случайных неоднородностей учтем в рамках гипотезы о замороженном переносе [5]. Тогда однородная часть корреляционной функции (10) будет иметь вид

$$N_0 = \exp \left(- \left[\frac{x_1 - x_2 - v_x(\tau_1 - \tau_2)}{a_x} \right]^2 - \left[\frac{y_1 - y_2 - v_y(\tau_1 - \tau_2)}{a_y} \right]^2 - \left[\frac{z_1 - z_2 - v_z(\tau_1 - \tau_2)}{a_z} \right]^2 \right), \quad (11)$$

где v_x, v_y, v_z – продольная, поперечная и вертикальная скорости движения поля неоднородностей соответственно; a_x, a_y, a_z – внешние масштабы турбулентности канала.

Вычисляя интеграл (9) методом суммарно-разностного интегрирования по разностной переменной и полагая для простоты $a_x = a_y = a_z = a$, для дисперсии доплеровского смещения частоты при движении поля неоднородностей вдоль осей X, Y, Z соответственно имеем

$$\sigma_{f_x}^2 = f^2 \sqrt{\pi} \int_0^{t_k} \frac{v_x^2 N_1}{2a} \frac{\cos^2 \beta_0}{c \sqrt{\epsilon_0}} dt, \quad \sigma_{f_y}^2 = f^2 \sqrt{\pi} \int_0^{t_k} \frac{v_y^2 N_1}{2ac \sqrt{\epsilon_0}} dt, \quad \sigma_{f_z}^2 = f^2 \sqrt{\pi} \int_0^{t_k} \frac{v_z^2 N_1}{2a} \frac{\sin^2 \beta_0}{c \sqrt{\epsilon_0}} dt. \quad (12)$$

Следуя методу алгоритмизации, предложенному в [4], интегральные формулы (12) можно преобразовать к обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\frac{d\sigma_{f_x}^2}{dt} = \frac{\sqrt{\pi} f^2 v_x^2 N_1}{2a} \frac{\cos^2 \beta_0}{c \sqrt{\epsilon_0}}, \quad \frac{d\sigma_{f_y}^2}{dt} = \frac{\sqrt{\pi} f^2 v_y^2 N_1}{2a c \sqrt{\epsilon_0}}, \quad \frac{d\sigma_{f_z}^2}{dt} = \frac{\sqrt{\pi} f^2 v_z^2 N_1}{2a} \frac{\sin^2 \beta_0}{c \sqrt{\epsilon_0}}. \quad (13)$$

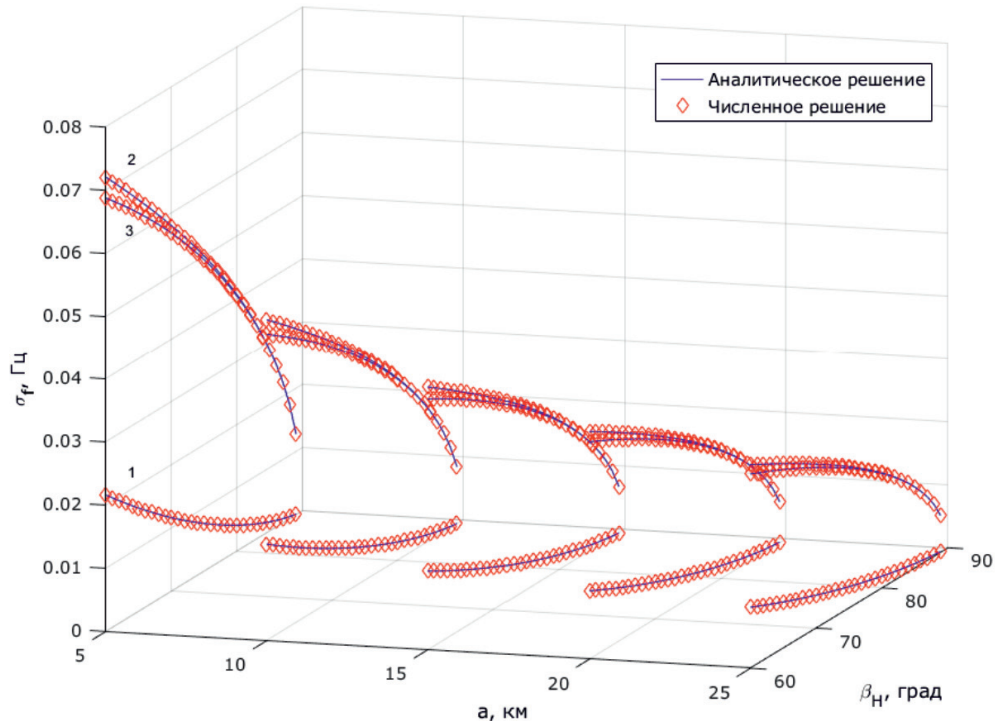


Рис. 1. Зависимости σ_f от угла β_n и масштаба неоднородности a .
Параметры возмущенного линейного слоя: $z_m = 300$ км, $f_{кр} = 5$ МГц, $v = 0,1$ км/с
(где v принимает значения v_x, v_y или v_z), $N_1 = 10^{-6}$, $f = 10$ МГц. Кривые 1, 2, 3
соответствуют движению поля неоднородностей вдоль осей X, Y, Z и характеризуют $\sigma_{f_x}, \sigma_{f_y}, \sigma_{f_z}$

Совместное численное решение уравнений (13) и (7) позволяет определить дисперсии доплеровского смещения частоты сигналов на различных рабочих частотах при заданной дистанции между пунктами излучения и приема. Заметим, что решения усредненных лучевых уравнений, входящих в систему (7), находятся путем пристрелки траекторий в пункт наблюдения для каждой рабочей частоты просвечивания. В то же время уравнения системы (13) интегрируются с начальными условиями. Таким образом, решение исходной краевой стохастической задачи для обращения данных многочастотного доплеровского просвечивания канала существенно упрощается.

В частном случае линейного слоя, когда $\epsilon_0(z) = 1 - \frac{f_{кр}^2}{f^2} \frac{z}{z_m}$, уравнения (13) с начальными условиями $\sigma_{f_x}^2(t=0) = \sigma_{f_y}^2(t=0) = \sigma_{f_z}^2(t=0) = 0$ имеют аналитические решения:

$$\begin{aligned} \sigma_{f_x}^2 &= \frac{\sqrt{\pi} f^4 v_x^2 N_1 z_m}{ac^2 f_{кр}^2} \ln \left| \frac{1 + \cos \beta_n}{1 - \cos \beta_n} \right| - \\ &\quad - \frac{2\sqrt{\pi} f^4 v_x^2 N_1 z_m \cos \beta_n}{ac^2 f_{кр}^2}, \\ \sigma_{f_y}^2 &= \frac{\sqrt{\pi} f^4 v_y^2 N_1 z_m}{ac^2 f_{кр}^2} \ln \left| \frac{1 + \cos \beta_n}{1 - \cos \beta_n} \right|, \\ \sigma_{f_z}^2 &= \frac{2\sqrt{\pi} f^4 v_z^2 N_1 z_m \cos \beta_n}{ac^2 f_{кр}^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где β_n – начальный угол входа луча в канал. Для решения системы (13), (7) был разработан численный алгоритм. Тестирование алгоритма показало его хорошую точность.

На рис. 1 приведены среднеквадратичные значения σ_{f_x} , σ_{f_y} , σ_{f_z} , рассчитанные с помощью системы (13), (7) и по формулам (14).

Пример реализации метода расчета частотных флуктуаций сигнала при многочастотном просвечивании стохастического канала

В качестве примера для демонстрации работы аппарата численно-аналитического моделирования, на рис. 2 приведены результаты расчетов на основе системы (13), (7) частотной зависимости среднеквадратичных отклонений доплеровского смещения частоты сигнала при просвечивании двухслойного канала с крупномасштабным возмущением интенсивных хаотических неоднородностей диэлектрической проницаемости. Модель средней диэлектрической проницаемости канала представлялась зависимостью

$$\epsilon_0 = 1 - \frac{f_{крE}^2}{f^2} \exp\left(-\left(\frac{z - z_{mE}}{h_{mE}}\right)^2\right) - \frac{f_{кр}^2}{f^2} \exp\left(-\left(\frac{z - z_m}{h_m}\right)^2\right),$$

где $z_m, z_{mE}, h_m, h_{mE}, f_{кр}, f_{крE}$ – высоты минимумов, полутолщины и критические частоты слоев канала. Модель неоднородной части корреляционной функции, характеризующей крупномасштабное локализованное образование хаотических неоднородностей, была задана в виде

$$N_1 = \chi \frac{f_{кр}^2}{f^2} \exp\left(-\left(\frac{z - z_m}{h_m}\right)^2 - \left(\frac{x - x_L}{L}\right)^2\right),$$

где L, χ, x_L – размер, интенсивность и координата центра возмущения соответственно. Из рис. 2, в частности, следует значительный рост флуктуаций доплеровского сдвига частоты верхних (педерсеновских) лучей [2] на более низких рабочих частотах.

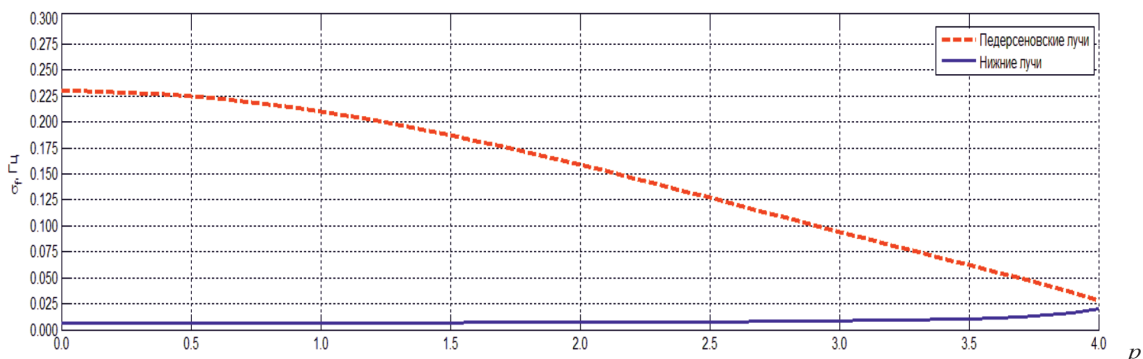


Рис. 2. Среднеквадратичные значения доплеровского сдвига частоты сигнала на различных частотах просвечивания канала. $f(p) = f_0 + bp^2$, $b = 0,025$, $f_0 = 13$ МГц, $z_m = 300$ км, $z_{mE} = 125$ км, $h_m = 100$ км, $h_{mE} = 25$ км, $f_{кр} = 6$ МГц, $f_{крE} = 3$ МГц, $L = 500$ км, $\chi = 0,1$, $x_L = 500$ км, $a = 10$ км, $v_z = 100$ м/с, $x_k = 1500$ км

Заключение

Для прогнозирования состояния информационного канала развит метод численно-аналитического моделирования доплеровских характеристик сигналов при многочастотном просвечивании канала в условиях пространственно-временных случайных возмущений. С помощью асимптотических разложений сделан вывод дифференциальных уравнений для расчета вторых моментов доплеровского сдвига частоты сигналов на различных рабочих частотах. Для численного решения дифференциальных уравнений разработан вычислительный алгоритм. Выполнено тестирование алгоритма путем сравнения результатов численных и аналитических расчетов для модели диэлектрической проницаемости канала, заданной линейным профилем. Предложенный вычислительный алгоритм расчета позволяет оперативно делать количественные оценки частотных флуктуаций сигналов при многочастотном просвечивании стохастического канала с произвольным высотным профилем средней диэлектрической проницаемости. Результаты

расчетов с использованием разработанного математического аппарата могут быть использованы для прогнозирования пропускной способности стохастических каналов различного назначения.

Список литературы

1. Благовещенский Д.В. Короткие волны в аномальных радиоканалах: Эксперимент, моделирование. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publ., 2011. 422 с.
2. Kravtsov Yu.A., Orlov Yu.I. Geometrical Optics of Inhomogeneous Media. Berlin: Springer-Verlag Publ., 1990. 312 p.
3. Ермаков С.М., Сипин А.С. Метод Монте-Карло и параметрическая делимость алгоритмов. СПб.: Изд. СПбГУ, 2014. 247 с.
4. Агеева Е.Т., Афанасьев Н.Т., Ким Д.Б., Чудаев С.О. Оперативные алгоритмы расчета характеристик лучевых полей в стохастических неоднородных средах // Современные наукоемкие технологии. 2019. № 2. С. 9–14.
5. Rytov S.M., Kravtsov Y.A., Tatarskiy V.I. Principles of Statistical Radiophysics 4. Wave Propagation Through Random. Berlin Heidelberg: Media Springer-Verlag., 1989. 188 p.
6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. Изд. 6. М.: URSS, 2017. 416 с.
7. Вологдин А.Г., Приходько Л.И., Широков И.А. Статистика доплеровского смещения частоты радиоволн, отраженных от параболического ионосферного слоя // Радиофизические методы в дистанционном зондировании сред: V Всерос. Армадовские чтения. Муром, 2012. С. 159–163.