

УДК 004.942

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОЛНОЙ ДИАГРАММЫ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ШЛАКОБЕТОНА ПРИ ТРЕХТОЧЕЧНОМ ИЗГИБЕ**¹Черноусов Н.Н., ²Стурова В.А.¹ООО «НТО «ЭКСПЕРТ»», Липецк, e-mail: nto_tezis@mail.ru;²ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет», Липецк,
e-mail: v-livenceva@mail.ru

В работе предложена математическая модель полной диаграммы деформирования шлакобетона при трехточечном изгибе на основе одного параметра (максимальное значение силы), благодаря которой можно прогнозировать разрушение материала при известном модуле упругости. Предложены формулы математических моделей деформирования и прогнозирования разрушения при неупругом трехточечном изгибе упруго-пластического материала на примере шлакобетонного образца с использованием минимального числа входящих в них экспериментальных параметров. Показаны опыты, в результате которых можно наблюдать динамическое движение магистральной трещины, что сказывается на характере деформирования реального образца из мелкозернистого шлакобетона, а также представлено математическое прогнозирование разрушения материала. Приведена экспериментальная диаграмма деформирования прямоугольного образца из мелкозернистого шлакобетона. На основании экспериментальных данных предложена зависимость для коэффициента, показывающего величину снижения действующей внешней нагрузки из-за динамического разрушения сечения элемента в нижней растянутой зоне на нисходящей ветви, начиная с величины максимального прогиба. Предложенная математическая модель с использованием известного начального модуля упругости материала позволяет исключить проведение сложных равновесных опытов, связанных с постоянной регистрацией прогибов на каждой ступени нагружения, и способна моделировать работу материала на любой стадии нагружения, вплоть до разрушения.

Ключевые слова: математическая модель, трехточечный изгиб, шлакобетон, модель деформирования, трещина**MATHEMATICAL MODEL OF THE FULL DIAGRAM OF DEFORMATION
OF SLAG CONCRETE IN THREE-POINT BEND**¹Chernousov N.N., ²Sturova V.A.¹ООО NTO EXPERT, Lipetsk, e-mail: nto_tezis@mail.ru;²Lipetsk State Technical University, Lipetsk, e-mail: v-livenceva@mail.ru

A mathematical model is proposed that depends on two parameters (the maximum value of the force and the corresponding deflection) due to which it is possible to predict the destruction of the material, the diagram of deformation of the material during bending through one parameter (maximum value of the load), with the known modulus of elasticity. The formulas of mathematical models of deformation and fracture prediction during plastic and inelastic three-point bending of an elastic-plastic material are obtained using the example of a cinder-concrete sample using the minimum number of experimental parameters included in them. Experiments are shown, as a result of which the dynamic movement of the main crack can be observed, which affects the nature of the deformation of a real specimen of fine-grained slag concrete, and a mathematical prediction of fracture of the material is presented. Based on the experimental data, a dependence is proposed for a coefficient showing the decrease in the effective external load due to the dynamic destruction of the section of the element in the lower stretched zone on the descending branch, starting from the magnitude of the deflection. The results obtained make it possible to exclude complex equilibrium experiments related to the constant recording of deflections at each loading stage, and are able to simulate the work of the material at any loading stage, up to failure.

Keywords: mathematical model, three-point bending, slag concrete, deformation model, crack

Для отображения в полной мере реальных физических процессов накопления повреждений в материале при механических испытаниях рекомендуется использовать полностью равновесные диаграммы деформирования (ПРДД), полученные при испытаниях на изгиб [1].

Цель исследования: предложить математическую модель описания полной равновесной диаграммы деформирования, применение которой поможет исключить проведение сложных равновесных опытов.

Образцы из шлакобетона, испытание на изгиб.

Так как для определения характеристик трещиностойкости бетона (вязкости раз-

рушения) при статическом нагружении используют диаграмму «нагрузка – прогиб» (« $F - f$ ») [1], равно как и диаграмму «напряжения – относительные деформации» (« $\sigma - \varepsilon$ ») в теории бетонных и железобетонных конструкций [2–4], разработка методов их математического описания является по-прежнему актуальной задачей механики твердого тела, в частности механики строительных композиционных материалов. При множестве предложенных зависимостей проблема здесь заключается к сведению к минимуму параметров уравнений.

Для математического описания зависимости приложенной нагрузки (F) от прогиба (f) при трехточечном изгибе примем в ка-

честве характерных параметров диаграммы « $F - f$ » следующие параметры (рис. 1): угол наклона восходящей ветки диаграммы к оси абсцисс α ($\operatorname{tg} \alpha = 0,6F_c/f_1$), точка 1 окончания прямолинейного участка восходящей ветки, точка 2 вершины кривой деформирования, точка 3 перегиба ниспадающей ветви диаграммы и точка 4 дефрагментации образца.

Предлагается математическое описание диаграммы « $F - f$ » в следующем виде:

$$F(f) = Af^{B \cdot e^{Cf}}, \quad (1)$$

в котором A , B и C – параметры кривой деформирования

Параметры A , B и C уравнения (1) находим исходя из физических и геометрических соображений, а также на основе полученных экспериментальных данных

Будем считать, что отрезок изменения величины прогиба f от точки $f = 0$ к точке f_c , в которой функция $F(f)$ получает максимальное значение, отвечает почти линейному закону изменения усилия F от прогиба f .

Учитывая это, примем, что параметр A является известным. В первом приближении он будет равен значению производной от функции $F(f)$ по параметру f в некоторой точке промежутка прямолинейного изменения усилий F . Следовательно,

$$A = \frac{dF}{df} \Big|_{f=f_1}, \quad (2)$$

т.е. параметр A будет равен тангенсу угла наклона восходящей ветки диаграммы в области упругих деформаций к оси Of системы координат FOf .

Вычислим производную:

$$\begin{aligned} &= \frac{dF}{df} = Af^{B-1} \cdot e^{Cf} \cdot (B + Cf) = \\ &Af^B \cdot e^{Cf} \cdot \frac{B + Cf}{f} = F(f) \cdot \frac{B + Cf}{f}, \quad (3) \end{aligned}$$

которая равна нулю при $f_c = -\frac{B}{C}$.

Тогда $F_c = F(f_c) = A \cdot \left(-\frac{B}{C}\right)^B \cdot e^{-B}$ или $F_c = A \cdot \left(\frac{f_c}{e}\right)^B$, и отсюда следует, что

$$A = F_c \cdot \left(\frac{e}{f_c}\right)^B. \quad (4)$$

Для упругого материала можно допустить, что

$$A = \frac{F_c}{f_c}. \quad (5)$$

Из отношений (4) и (5) определим параметр B из равенства $\frac{F_c}{f_c} = F_c \cdot \left(\frac{e}{f_c}\right)^B$, откуда

$$f_c = \left(\frac{f_c}{e}\right)^B \rightarrow \ln f_c = B \cdot (\ln f_c - 1)$$

и

$$B = \frac{\ln f_c}{\ln f_c - 1}. \quad (6)$$

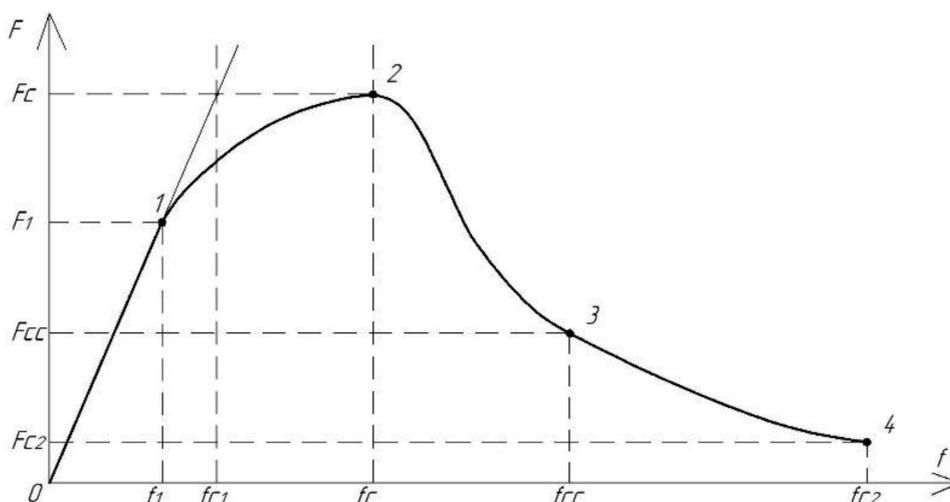


Рис. 1. Параметрические точки диаграммы «нагрузка – прогиб»

Тогда из соотношения $f_c = -\frac{B}{C}$ находим

$$C = -\frac{1}{f_c} \cdot \frac{\ln f_c}{\ln f_c - 1}. \quad (7)$$

После постановки параметров A , B и C в соотношении (1) получаем

$$F(f) = \frac{F_c}{f_c} \cdot f^{\left(\frac{\ln f_c}{\ln f_c - 1}\right)} e^{-\left(\frac{1}{f_c} \cdot \frac{\ln f_c}{\ln f_c - 1} f\right)}. \quad (8)$$

В качестве примера возьмем следующие данные: $F_c = 3500$ Н, $f_c = 0,09$ мм, при которых искомые параметры диаграммы деформирования принимают значения $A = 38,9 \cdot 10^3$ Н/мм, $B = 0,71$ и $C = -7,851$ м⁻¹.

С их использованием по формуле (1) с учётом экспериментальных значений F_c и f_c по формуле (8) на рис. 3 построена полная диаграмма « $F-f$ ».

Использование диаграмм деформирования ПРДД для расчета железобетонных конструкций на основе отходов различных отраслей промышленности и местных заполнителей, в частности – шлакобетона, получаемого на основе шлаковой пемзы [5, 6], является также актуальной задачей.

Однако, как показали опыты, диаграмма деформирования, описываемая формулой (1) для упруго-пластичного материала (рис. 2), отличается от реальной диаграммы на нисходящей ветви при испытании шла-

кобетонного образца. Это объясняется тем, что после достижения нагрузкой своей максимальной величины происходит лавинное трещинообразование (в нашем случае – начало и дальнейшее динамическое движение магистральной трещины).

В таблице приведены сравнительные значения параметрических точек ПРДД, полученных по формуле (8) и из экспериментальной диаграммы деформирования прямоугольного образца из мелкозернистого шлакобетона возрастом 714 суток, призматическая прочность – 45 МПа, прочность при изгибе – 10,42 МПа (серия ОА-0-0-6(10-12-02) с размерами поперечного сечения 40x40 мм, длина пролета $L = 150$ мм, момент инерции $I = 213333,33$ мм⁴).

Как видно из таблицы, на нисходящем участке наблюдается расхождение опытных и теоретических (8) значений приложенной нагрузки, поэтому необходимо внести корректировку в формулу (8) с учетом динамического движения магистральной трещины.

При расчете железобетонных конструкций по деформациям на основе нелинейной деформационной модели (НДМ) используется модуль деформаций (секущий или касательный), который, в отличие от начального модуля упругости (E_b – постоянная величина), с возрастанием величины и длительности действия нагрузки меняется по величине и, падая, стремится к нулю, а деформации достигают своих предельно максимальных значений [1, 2, 6].

Значения параметров ПРДД

Параметры ПРДД	Точка «1»		Точка «2»		Точка «3»		Точка «4»	
	$F_1 = 0,6 F_c$, Н	$f_1 = 0,6 f_{c1}$, мм	F_c , Н	f_c , мм	F_{cc} , Н	$f_{cc} = 2f_c$, мм	F_{c2} , Н	$f_{c2} = 6f_{c2}$, мм
опытные	2100	0,02	3500	0,09	2200	0,18	150	0,54
по ф-ле (8)	2100	0,02	3500	0,09	2850	0,18	400	0,54

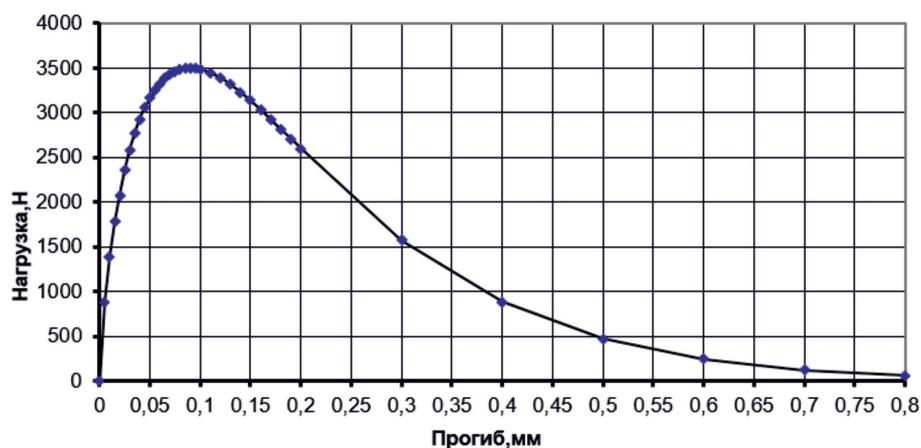


Рис. 2. Диаграмма деформирования « $F-f$ », построенная по формуле (8)

Значение начального модуля упругости можно получить из опытов на сжатие или при измерении скорости ультразвука в материале, либо непосредственно при изгибе [1, 3, 7].

Математическая модель на основе одного параметра (максимальное значение силы). Покажем в дальнейшем, что математически можно описать диаграмму деформирования материала при изгибе через один параметр F_c (максимальное значение нагрузки), учитывая, что модуль упругости известен.

Представим выражение (1) в следующем виде:

$$F(f) = Afe^{Bf}, \quad (9)$$

в котором A и B – параметры кривой деформирования.

Параметр A является известным и равен тангенсу угла наклона восходящей ветки диаграммы (рис. 1) в области упругих деформаций к оси O_f системы координат FO_f ($A = F_c/f_{c1} = F_1/f_1 = 0,6 F_c/0,6f_{c1}$).

Вычислим производную:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{df} &= Ae^{Bf} \cdot (1 + Bf) = \\ &= Afe^{Bf} \cdot \frac{(1 + Bf)}{f} = F(f) \cdot \frac{(1 + Bf)}{f}, \quad (10) \end{aligned}$$

которая равна нулю при $f_c = -\frac{1}{B}$.

Тогда $F_c = F(f_c) = A \cdot f_c \cdot e^{-1}$, и отсюда следует, что

$$A = \frac{F_c}{f_{c1}} = F_c \cdot \frac{e}{f_c}. \quad (11)$$

Из отношений (11) определим параметр

$$f_c = 2,718f_{c1}. \quad (12)$$

Начальный модуль упругости при изгибе равен [5]:

$$E_b = k_F \cdot \frac{F_c}{f_{c1}} = k_F \cdot F_c \cdot \frac{e}{f_c} = A \cdot k_F, \quad (13)$$

где k_F – единичная податливость при трехточечном изгибе, равная $k_F = L^3/(48I)$ (для опытного образца серии ОА-0-0-6(10-12-02) с размерами поперечного сечения 40x40 мм, длина пролета $L = 150$ мм, момент инерции $I = 213333,33 \text{ мм}^4$, $k_F = 0,33 \text{ мм}^{-1}$).

Тогда

$$f_{c1} = k_F \cdot \frac{F_c}{E_b}. \quad (14)$$

Таким образом, математическая модель описания диаграммы деформирования материала при изгибе с использованием одного параметра (F_c), с учетом (12) и (14), будет иметь вид

$$F(f) = \frac{E_b}{k_F} \cdot f \cdot e^{-\frac{f}{f_c}} = \frac{E_b}{k_F} \cdot f \cdot e^{-\left(\frac{E_b}{2,718 \cdot k_F \cdot F_c}\right) \cdot f}. \quad (15)$$

В качестве примера (таблица, точка «1») определяем опытный начальный модуль упругости: $E_b = k_F \cdot 0,6F_c/f_1 = 0,33 \cdot 2100/0,02 = 3,465 \cdot 10^4$ МПа.

Как показали опыты (таблица), на нисходящей ветви диаграммы происходит динамическое движение магистральной трещины, что сказывается на характере деформирования реального образца из мелкозернистого шлакобетона.

На основании экспериментальных данных предложена зависимость для коэффициента k_f , показывающего величину снижения действующей внешней нагрузки из-за динамического разрушения сечения элемента в нижней растянутой зоне на нисходящей ветви, начиная с величины прогиба $f = f_c$

$$k_f = e^{-\frac{F_c \cdot k_F}{E_b \cdot f_c} \left(1 - \sqrt{\frac{f_c}{f}}\right) \frac{f}{f_c}}. \quad (16)$$

Тогда, с учетом (16) математическая модель описания диаграммы деформирования материала при неупругом изгибе (15), будет иметь вид:

$$F(f) = \frac{E_b}{k_F} \cdot f \cdot e^{-\left[1 + \frac{F_c \cdot k_F}{E_b \cdot f_c} \left(1 - \sqrt{\frac{f_c}{f}}\right)\right] \frac{f}{f_c}}. \quad (17)$$

С использованием формулы (17) и с учетом экспериментальных значений на рис. 3 построена полная равновесная диаграмма « $F - f$ ».

Математическое прогнозирование разрушения материала.

Считаем, что материал разрушается и теряет свою работоспособность в точке перегиба нисходящей линии диаграммы (при $F = F_{cc}$ и $f = f_{cc}$), то есть, когда вторая производная равна нулю:

$$\frac{d^2F}{df^2} = \frac{F(f_{cc})}{f_{cc}^2} \cdot \left[(1 + Bf_{cc})^2 - 1 \right] = 0. \quad (18)$$

Отсюда находим, что точка перегиба диаграммы разрушения бетона

$$f_{cc} = -\frac{2}{B} = 2 \cdot f_c. \quad (19)$$

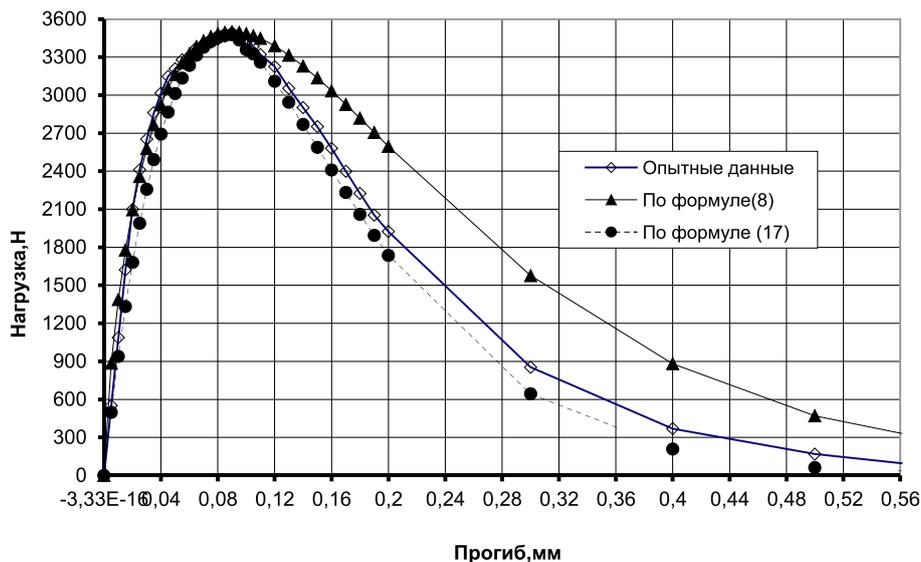


Рис. 3. Диаграмма деформирования «F-f», построенная по формулам (8) и (17), в сравнении с экспериментальными значениями

Следовательно, можно считать, что ресурс материала исчерпан при

$$f_{cc} = 2 \cdot 2,718 \cdot f_{c1} = 5,436 \cdot k_F \cdot \frac{F_c}{E_b}, \quad (20)$$

$$F(f_{cc}) = \frac{E_b}{k_F} \cdot f_{cc} \cdot e^{-\frac{f_{cc}}{f_c}} \cdot k_f =$$

$$= 5,436 \cdot F_c \cdot e^{-2} \cdot k_f = 0,736 \cdot F_c \cdot k_f. \quad (21)$$

В нашем случае в приведённом примере на основании формул (20) и (21) получаем, что $f_{cc} \approx 0,181$ мм, а $F_{cc} \approx 2090$ Н (точка «3»). Как видим, точку «3» можно принять за момент потери ресурса материала.

Важным фактором является то, что эта точка определяется через начальный параметр полной диаграммы деформирования материала в упругой зоне деформации.

Таким образом, предложенная математическая модель описания полной равновесной диаграммы деформирования (ПРДД) с использованием только одного опытного параметра (наибольшей нагрузки F_c) и известного начального модуля упругости материала позволяет исключить проведение сложных равновесных опытов, связанных с постоянной регистрацией прогибов

на каждой ступени нагружения, и способна моделировать работу материала на любой стадии нагружения, вплоть до разрушения.

Список литературы

1. ГОСТ 29167-91 Бетоны. Методы определения характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) при статическом нагружении. М.: ИПК Издательство стандартов, 1992. 24 с.
2. СП 63.13330.2018 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. СНиП 52-01-2003. М.: Минстрой России, 2019. 143 с.
3. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.
4. Карпенко Н.И., Радайкин О.В. К совершенствованию диаграмм деформирования бетона для определения момента трещинообразования и разрушающего момента в изгибаемых железобетонных элементах // Строительство и реконструкция. 2012. № 3. С. 10–16.
5. Уфимцев В.М., Коробейников Л.А. Шлаки в составе бетона: новые возможности // Технологии бетонов. 2014. № 6. С. 50–53.
6. Черноусов Н.Н., Черноусов Р.Н., Суханов А.В. Исследование механики работы мелкозернистого шлакобетона при осевом растяжении и сжатии // Строительные материалы. 2014. № 12. С. 59–63.
7. Черноусов Н.Н., Стурова В.А., Маслобоев А.А., Чурсин Е.В., Ливенцева А.А. Определение показателей деформативности конструктивных слоев дорожных одежд // Фундаментальные научные исследования. Сборник научных трудов по материалам XIX Международной научно-практической конференции (г.к. Анапа, 16 декабря 2019 г.). Анапа: Изд-во «НИЦ ЭСП» в ЮФО, 2019. С. 93–97.