

УДК 62-1/-9

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УЗЛА РАЗМОТКИ РУЛОНА ТЕКСТИЛЬНЫХ И ПОЛИГРАФИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

<sup>1</sup>Степанов П.Е., <sup>2</sup>Усов А.Г.

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна, Высшая школа печати и медиатехнологий, Санкт-Петербург, e-mail: pestepanov@yandex.ru;

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна, Институт информационных технологий и автоматизации, Санкт-Петербург, e-mail: usovusov@gmail.com

В статье рассматривается задача разработки математической модели узла размотки рулона. Предложена уточнённая математическая модель, учитывающая наличие сенсорного вала на участке между рулоном и парой тянущих валиков. Поперечное сечение рулона представлено спиралью с постоянным шагом, определяемым как длина нормали между любыми двумя соседними витками. Предполагается, что в рассматриваемой системе обеспечивается постоянство силы натяжения; в качестве тормоза рулона используется электродвигатель постоянного тока. С целью устранения искажений частотных характеристик, для исследования колебаний в системе рассматривается вариант с разомкнутым управлением; управляющее воздействие, подаваемое на электродвигатель, устанавливается равным номинальному, полученным в результате проведения касательной линеаризации в окрестностях режима стабилизации. В силу предположения о непостоянстве параметров гармоник частотный анализ скорости рулона выполняется с помощью локального преобразования Фурье. На основании полученных результатов можно сделать вывод, что колебания, инициируемые рулоном, имеют две основные частоты, на начальном этапе размотки слабо изменяющиеся линейно, обусловленные как задаваемой формой внешнего витка спирали поперечного сечения, так и смещением оси вращения рулона относительно центральной оси.

**Ключевые слова:** узел размотки, идеальный рулон, касательная линеаризация, спектрограмма колебаний, разомкнутое управление

## MATHEMATICAL MODELING OF A UNIT FOR UNWINDING A WEB OF TEXTILE AND POLYGRAPHIC MATERIALS

<sup>1</sup>Stepanov P.E., <sup>2</sup>Usov A.G.

<sup>1</sup>Saint Petersburg State University of Industrial Technologies and Design, Higher School of Printing and Media Technologies, Saint Petersburg, e-mail: pestepanov@yandex.ru;

<sup>2</sup>Saint Petersburg State University of Industrial Technologies and Design, Institute of Information Technologies and Automation, Saint Petersburg, e-mail: usovusov@gmail.com

The article deals with the problem of developing a mathematical model of the web unwinding unit. A refined mathematical model of the system with a sensor shaft between the roll and pulling rollers is proposed. The cross-section of the web is represented by a spiral with a constant pitch, defined as the length of the normal between any two adjacent turns. It is assumed that the constancy of the tense force in the system is ensured; DC motor is used as brake. In order to eliminate distortions of frequency characteristics and to study oscillations in the system, a variant with open-loop control system is considered; the control action supplied to the electric motor is set equal to the nominal one obtained as a result of tangential linearization close to the stabilization mode. Due to the assumption that the harmonic parameters are not constant, the frequency analysis of the web speed is performed using the local Fourier transform. Based on the results obtained, it can be concluded that the oscillations initiated by the web consist of two main frequencies, which at the initial stage of unwinding vary slightly linearly, due to the specified shape of the outer turn of the helix of the cross section as well as to the shift of the web rotation axis relative to the central axis.

**Keywords:** unwinding unit, ideal web, tangential linearization, vibration spectrogram, open-loop control

В технологических процессах текстильной и лёгкой промышленности часто используется оборудование для размотки рулона как на этапе подготовительных работ, так и на этапе основного производства. Размотка рулона может осуществляться как непрерывно, так и с остановками для отмеривания необходимой длины. При размотке материала требуется обеспечить контроль ряда показателей, среди которых важнейшими являются скорость полотна и сила его натяжения. На эти показатели оказывают влияние некоторые факторы, среди которых

присутствуют характеристики рулона (форма втулки, рулона, механические характеристики и состояние материала внутри рулона), характеристики системы размотки и системы управления, конструктивные особенности узла размотки. Какие-либо нарушения этих показателей, к примеру непостоянство силы натяжения полотна, могут привести к образованию петель, складок и т.п. Нарушение заданной скорости движения полотна сказывается как на силе натяжения, так и на колебаниях полотна, инициирующихся непосредственно рулоном.

При решении задач модернизации существующего оборудования проектируются новые системы управления устройств размотки. Следствием неидеальной формы рулона и погрешности установки рулона в машину является возникновение колебаний; очевидно, их параметры будут изменяться в процессе размотки ввиду изменений параметров рулона [1]. В проектируемой системе управления размоткой рулона должен обеспечиваться учёт указанных факторов.

В настоящей статье рассматривается задача разработки математической модели

узла размотки с учётом геометрии втулки и рулона и расположения оси вращения втулки.

### Материалы и методы исследования

В качестве примера рассмотрим узел размотки рулона, показанной на рис. 1, где 1 и 1' – пара разматывающих цилиндров, 2 – сенсорный вал, 3 – рулон, 4 – втулка, 5 – полотно материала. Обозначим:  $r_n$  – радиус натяжения,  $r_{ep}$  – радиус вращения,  $\omega_2$  – угловая скорость рулона.

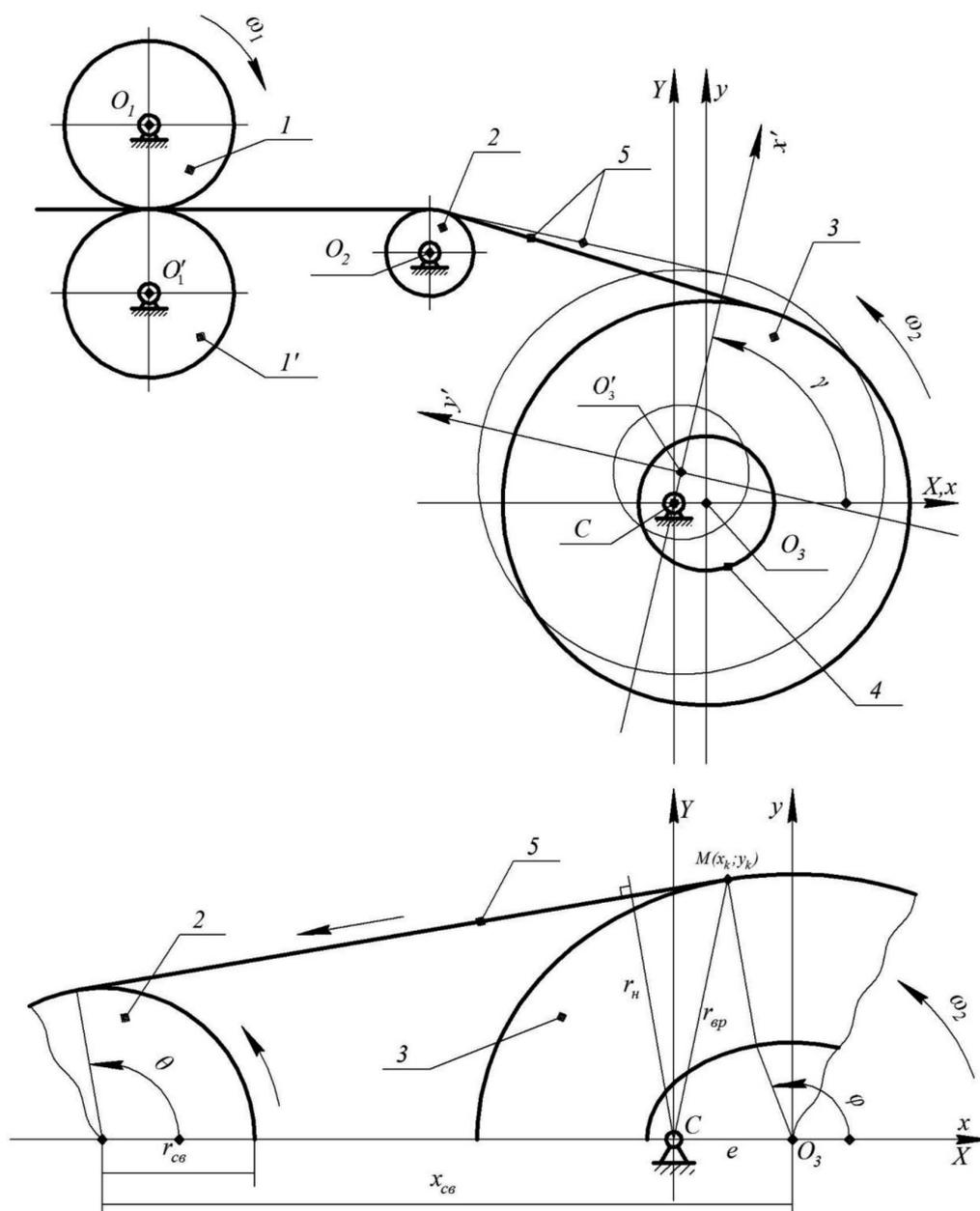


Рис. 1. Схема узла размотки рулона

Будем считать рулон абсолютно твёрдым телом, вращающимся вокруг неподвижной оси  $O_3z$ , перпендикулярной плоскости рисунка. При размотке рулона на него действует сила натяжения  $F$ , создающаяся разностью скоростей рулона и пары разматывающих цилиндров, момент силы трения в подшипниках качения в опорах  $M_m$  и момент, создаваемый электродвигателем в режиме противовключения  $M_\delta$ . Для рассматриваемой расчётной схемы нетрудно записать [2]:

$$\frac{d}{dt}(J_p \omega_2) = Fr_n - M_m - M_\delta, \quad (1)$$

где  $J_p$  – момент инерции рулона. Момент трения подшипника в первом приближении можно описать как произведение радиальной нагрузки  $F_r$ , радиуса подшипника и коэффициента трения; в свою очередь, радиальная нагрузка определяется массой рулона [3, 4]:

$$M_m = f_m F_r r_{nu} = f_m r_{nu} M_p g, \quad (2)$$

где  $f_m$  – коэффициент трения,  $r_{nu}$  – радиус подшипника,  $M_p$  – масса рулона,  $g$  – ускорение свободного падения. Составляя уравнение будем относительно скорости рулона  $v_p$ , для чего найдём её производную по времени:

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega_2 r_{ep}) = \frac{d\omega_2}{dt} r_{ep} + \frac{dr_{ep}}{dt} \omega_2, \quad (3)$$

объединяя (1), (2) и (3), после преобразований получаем

$$\frac{dv_p}{dt} = -\frac{v_p}{J_p} \frac{dJ_p}{dt} + \frac{dr_{ep}}{dt} \frac{v_p}{r_{ep}} - \frac{r_{ep}}{J_p} C_{nu} M_p + \frac{r_{ep} r_n}{J_p} F - \frac{r_{ep}}{J_p} M_\delta, \quad (4)$$

где  $C_{nu} = f_m r_{nu} g = Const$ .

Момент инерции  $J_p$  является композицией функций  $J_p = J(\gamma, \varphi(\gamma))$ . С учётом этого можно записать, что

$$\frac{dJ_p}{dt} = \frac{dJ}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{dJ}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\gamma} \omega_2. \quad (5)$$

Аналогично выглядит выражение для производной от радиуса вращения. Подставим (5) в (4):

$$\frac{dv_p}{dt} = -\frac{v_p^2}{J_p r_{ep}} \frac{dJ_p}{d\gamma} + \frac{v_p^2}{r_{ep}^2} \frac{dr_{ep}}{d\gamma} - \frac{r_{ep}}{J_p} C_{nu} M_p + \frac{r_{ep} r_n}{J_p} F - \frac{r_{ep}}{J_p} M_\delta. \quad (6)$$

Получившееся выражение (6) является нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно  $v_p$ . Для его решения создадим S-модель в пакете Simulink программы MATLAB (рис. 2) [5]. В S-модели  $M_\delta = 0$ .

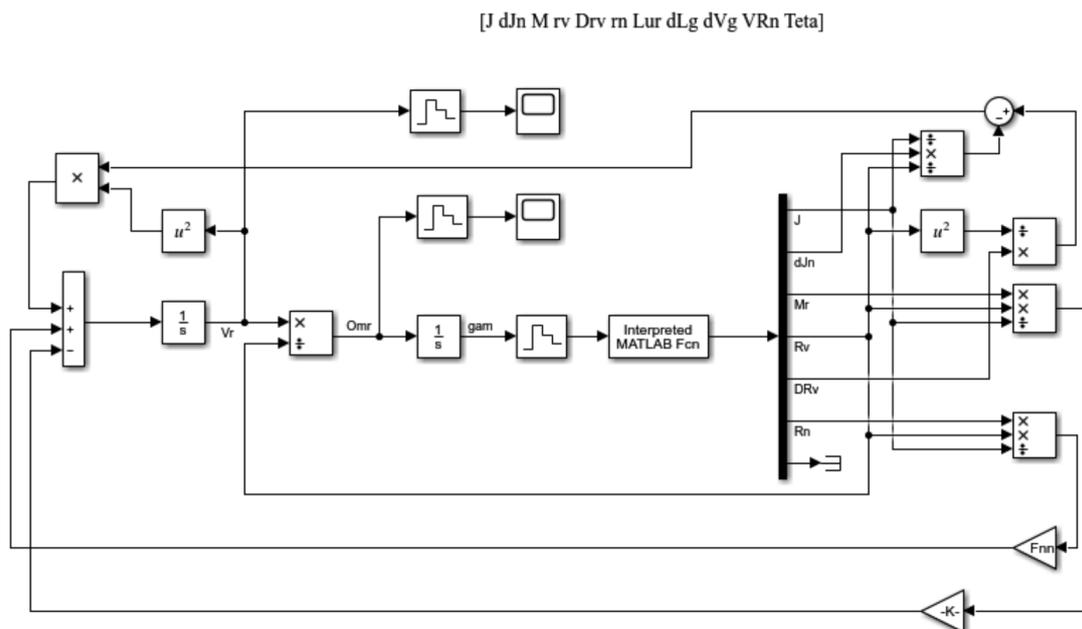


Рис. 2. S-модель

Для моделирования использовались следующие исходные данные: поперечное сечение втулки представлено эллипсом с полуосями 36,1 мм и 39,9 мм,  $r_{ce} = 100$  мм,  $x_{ce} = 1$  м, поверхностная плотность полотна 60 г/м<sup>2</sup>, ширина полотна 1,2 м,  $M_p^p = 700$  кг,  $F = 500$  Н. На рис. 3 показан график  $v_p(t)$  при начальном условии  $v_p(0) = 5$  м/с, что соответствует работе системы в режиме стабилизации.

Нетрудно догадаться, что при отсутствии тормозного момента, создаваемого электродвигателем или иным каким механическим устройством, в условии сохранения постоянной силы натяжения скорости рулона непременно возрастать, что и продемонстрировано на рис. 3. В режиме стабилизации скорость и сила натяжения полотна должны быть постоянными во избежание, к примеру, обрыва вследствие неконтролируемой подачи. Применение законов управления с обратной связью исказит частотные характеристики, в связи с чем воспользуемся разомкнутым управлением, задав некое номинальное управляющее воздействие. Составим выражение момента электродвигателя постоянного тока с постоянными магнитами [6]:

$$M_\delta = c_{m1} \frac{u_1 + c_{e1} \omega_2}{R_1} = \omega_p \frac{c_{m1} c_{e1}}{R_1} + \frac{c_{m1}}{R_1} u_1 = v_p \frac{1}{r_{ep}} \frac{c_{m1} c_{e1}}{R_1} + \frac{c_{m1}}{R_1} u_1, \quad (7)$$

где  $c_{e1}$  – константа противо э.д.с.,  $c_{m1}$  – постоянная момента,  $R_1$  – сопротивление обмотки статора,  $u_1$  – напряжение, подаваемое на обмотку статора, – управляющее воздействие. Подставим (7) в (6):

$$\frac{dv_p}{dt} = v_p^2 \left( \frac{1}{r_{ep}^2} \frac{dr_{ep}}{d\gamma} - \frac{1}{J_p r_{ep}} \frac{dJ_p}{d\gamma} \right) - v_p \frac{c_{m1} c_{e1}}{J_p R_1} - \frac{r_{ep} c_{m1}}{J_p R_1} u_1 - \frac{r_{ep}}{J_p} C_{nu} M_p + \frac{r_{ep} r_n}{J_p} F. \quad (8)$$

Уравнение (8) классифицируется как нелинейное и нестационарное, однако, строго говоря, в данной модели коэффициенты уравнения рассчитываются от угла поворота и ни прямой, ни неявной зависимости от времени нет. Можно свести уравнение (8) к нелинейному дифференциальному относительно  $\gamma(t)$ , устранив тем самым нестационарность. Воспользуемся методом касательной линеаризации в окрестности номинального режима. Предварительно введём в рассмотрение номинальные, то есть желаемые значения регулируемых переменных и их отклонения: скорость –  $v_p = v_p^h + x$  и управляющее воздействие –  $u_1 = u_n + \tau$ ; безусловно, отклонения распространяются и на  $\gamma(t)$  [7]:

$$\begin{aligned} \frac{dv_p^h}{dt} + \frac{dx}{dt} = (v_p^h + x)^2 \left[ \frac{1}{r_{ep}^2} \frac{dr_{ep}}{d\gamma} - \frac{1}{J_p r_{ep}} \frac{dJ_p}{d\gamma} \right] - \\ - (v_p^h + x) \frac{c_m c_e}{J_p R} - \frac{r_{ep} c_m}{J_p R} (u_n + \tau) - \frac{r_{ep}}{J_p} C_{nu} M_p + \frac{r_{ep} r_n}{J_p} F. \end{aligned} \quad (9)$$

Найдём значение номинального управляющего воздействия, для чего примем  $x = 0$ ,  $\tau = 0$ :

$$\frac{dv_p^h}{dt} = (v_p^h)^2 \left[ \frac{1}{r_{ep}^2} \frac{dr_{ep}}{d\gamma} - \frac{1}{J_p r_{ep}} \frac{dJ_p}{d\gamma} \right] - v_p^h \frac{c_m c_e}{J_p R} - \frac{r_{ep} c_m}{J_p R} u_n - \frac{r_{ep}}{J_p} C_{nu} M_p + \frac{r_{ep} r_n}{J_p} F.$$

Отсюда найдём

$$u_n = (v_p^h)^2 \left[ \frac{J_p}{r_{ep}^3} \frac{dr_{ep}}{d\gamma} - \frac{1}{r_{ep}^2} \frac{dJ_p}{d\gamma} \right] \frac{R}{c_m} - v_p^h \frac{c_e}{r_{ep}} - \frac{RC_{nu}}{c_m} M_p + \frac{Rr_n}{c_m} F - \frac{J_p R}{r_{ep} c_m} \frac{dv_p^h}{dt}. \quad (10)$$

Результат моделирования при  $v_p(0) = 5$  м/с,  $c_{m1} = 5,5 \frac{\text{Нм}}{\text{А}}$ ,  $c_{e1} = 4,5 \frac{\text{Вс}}{\text{рад}}$ ,  $R_1 = 3$  Ом показан на рис. 4.

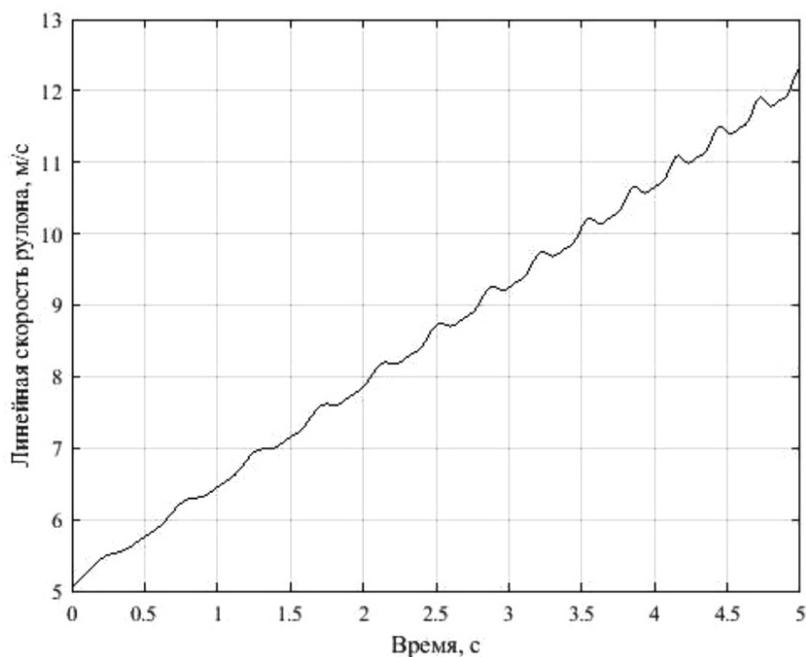


Рис. 3. Зависимость линейной скорости при  $vr(0) = 5 \text{ м/с}$

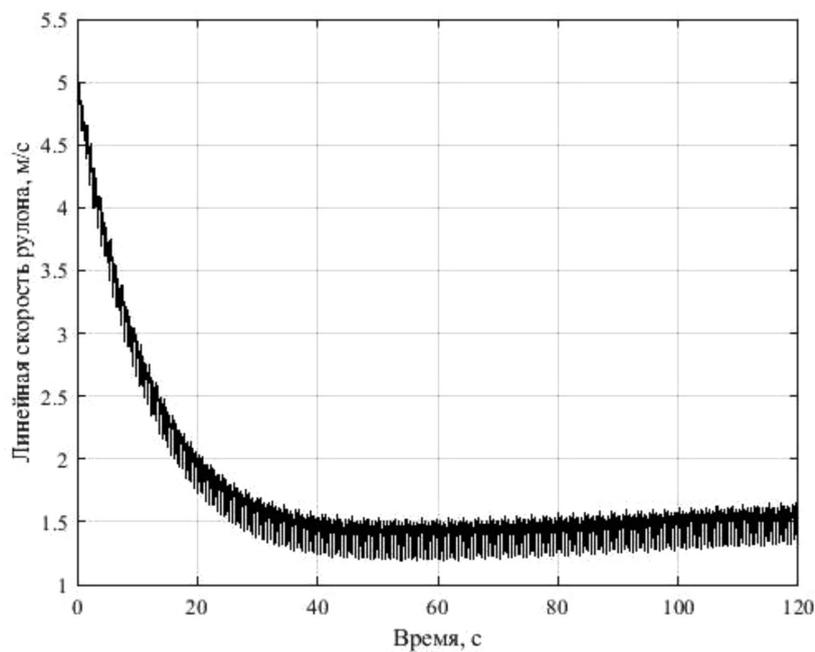


Рис. 4. Зависимость  $vr(t)$

Как видно из рис. 4, учёт в математической модели  $M_0$  обеспечил начальную стабилизацию «неколебательной» составляющей.

В силу изменения параметров колебаний, для частотного анализа воспользуемся локальным оконным преобразованием Фурье (ОПФ) и построим спектрограмму ско-

рости рулона [8]. Как известно, локальное ОПФ подвержено принципу неопределённости, согласно которому невозможно получить одновременно хорошее разрешение по частоте и по времени. Анализу подвергается часть сигнала, принадлежащего временному интервалу  $t \in [40, 120]$  с вычтен-

ной полиномиально-аппроксимированной составляющей. Интервал квантования взят равным 0,001 с; частота дискретизации, следовательно, 1 кГц. Количество рассчитываемых временных интервалов  $k_t$  в зависимости от длины исследуемого сигнала  $N_p$ , ширины оконной функции  $N$  и процента перекрытия  $p$  выражается следующей формулой [9]:

$$k_t = \frac{N_t - Np/100}{N - Np/100}.$$

Ширину оконной функции можно выбрать, зная минимальное разрешение по частоте  $df$ , частоту дискретизации  $F_s$  и нормированную ширину главного лепестка АЧХ оконной функции по нулевому уровню  $F_0$  [10]:

$$N > F_0 \frac{F_s}{df}.$$

Исходя из предположения, что частоты гармоник будут приблизительно кратны угловой скорости, а также основываясь на начальных данных, согласно которым угловая скорость в начале исследуемого процесса составит  $\approx 3$  рад/с, выберем максимальное значение минимального разрешения по частоте  $0,7879$  рад/с =  $0,1254$  Гц. В качестве оконной функции выберем окно Хэмминга с подавлением 42 дБ ( $F_0 = 4$ ), шириной  $2^{15}$  точек; перекрытие 75%. По-

строим спектрограмму скорости рулона при тех же исходных параметрах (рис. 5); интенсивность цвета показывает амплитуду частотных составляющих.

Как можно заметить, ОПФ выделяет две основные частоты: 10 и 20 рад/с, слабо изменяющиеся линейно.

### Выводы

В данной статье было выполнено математическое моделирование рулона в узле размотки. Рассматривалось движение рулона под действием постоянной силы натяжения полотна материала в условиях отсутствия какого-либо тормозного элемента и при наличии электродвигателя постоянного тока, работающего в режиме противовключения. Как и ожидалось, отсутствие тормоза приводит к увеличению скорости рулона.

Применение электродвигателя как тормоза рулона привело к начальной стабилизации скорости рулона. Необходимо отметить, что получившаяся система классифицируется как система с разомкнутым управлением. Колебания скорости рулона, инициирующиеся самим рулоном, объясняются отсутствием обратной связи и основного алгоритма управления в системе.

Исследование получившихся результатов посредством оконного преобразования Фурье показало наличие двух основных гармоник с медленно изменяющимися частотами для выбранного интервала.

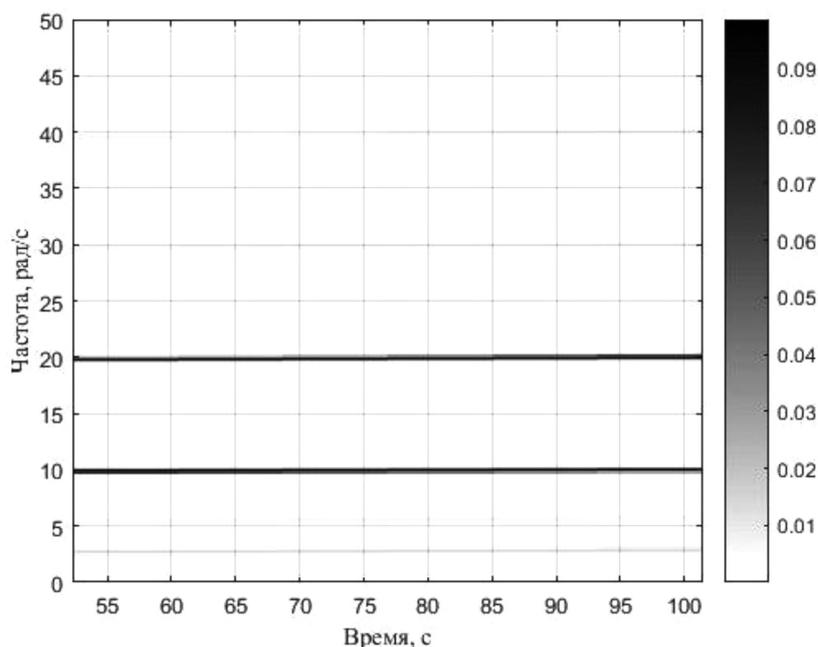


Рис. 5. Спектрограмма линейной скорости рулона

В дальнейшем полученные результаты будут использованы при моделировании узла размотки, всей перемоточной машины и синтезе алгоритма управления ей.

#### Список литературы

1. Степанов П.Е., Усов А.Г., Блоков М.П. Разработка математической модели разматываемого рулона в листорезальной машине // Известия высших учебных заведений. Проблемы полиграфии и издательского дела. 2019. № 3. С. 34–40.
2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. М.: Издательство «Высшая школа», 1966. 830 с.
3. Трение в подшипниках качения. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.detalmach.ru/spravka817.htm> (дата обращения: 01.12.2020).
4. Коэффициент трения, допустимые окружные скорости подшипников качения. [Электронный ресурс]. URL: <https://inzhener-info.ru/razdely/konstruirovaniye/opory-kacheniya/koeffitsient-treniya-dopustimye-okruzhnye-skorostipodshipnikov-kacheniya.html> (дата обращения: 01.12.2020).
5. Герман-Галкин Сергей Германович MATLAB & SIMULINK. М.: Корона-Век, 2014. 368 с.
6. Математическая модель дпт. [Электронный ресурс]. URL: <https://studfile.net/preview/6365744/page:11/> (дата обращения: 01.12.2020).
7. Линеаризация уравнения динамики. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.toehelp.ru/theory/tau/lecture03.htm> (дата обращения: 01.12.2020).
8. Павлейно М.А., Ромаданов В.М. Спектральные преобразования в MATLAB: учебно-методическое пособие. [Электронный ресурс]. URL: <https://dspace.spbu.ru/bitstream/11701/5516/1/Спектральные%20преобразования%20в%20MATLAB%20%281%29.pdf> (дата обращения: 01.12.2020).
9. Spectrogram. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.mathworks.com/help/signal/ref/spectrogram.html> (дата обращения: 01.12.2020).
10. Использование оконных функций в задачах цифрового спектрального анализа. Примеры и рекомендации. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.dsplib.ru/content/winex/winex.html> (дата обращения: 01.12.2020).